目　　录

第二部分 观测器和输出反馈设计

第 1 章 绪　论

1.1 非线性反馈控制

本书研究具有未知定常参数或时变干扰的非线性系统的反馈控制设计问题。所考虑的非**线性控制系统(nonlinear control system)**由如下有限维确定性常微分方程描述：

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x,\theta(t),u(t)), \qquad x(0)=x_0\\ y &= h(x,\theta(t))\end{aligned}$$

其中$x\in\mathbb{R}^n$为**状态(state)**，x_0为初始条件，$u(t):\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^m$为**控制(control)**输入，$\theta(t):\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^p$为**干扰(disturbance)**输入，$y\in\mathbb{R}^s$为**输出(output)**向量。当$m=s=1$时，称该系统为**单输入单输出(single input single output)**系统；当$m>1$(多输入)或$s>1$(多输出)时，称该系统为**多变量(multivariable)**系统。控制由设计者给出，而干扰可能完全未知或由已知模型，即**外部系统(exosystem)**

$$\dot{\theta}=\nu(\theta,t), \qquad \theta(0)=\theta_0$$

产生，其中θ_0为未知初始条件。当对于任意的θ以及$t\geqslant 0$有$\nu(\theta,t)=0$时，上述模型给出的干扰变为**未知参数(unknown parameter)**，即为与时间无关的常数，其值等于一个未知的初始条件($\dot{\theta}=0$，$\theta(0)=\theta_0$)。输出变量y是被控制量；若要求输出变量跟踪一个**参考信号(reference signal)** $y_{\mathrm{r}}(t)$，则称之为**跟踪问题(tracking problem)**。而当参考信号y_{r}是常数时，我们称之为**定点调节(set point regulation)**问题。

本书的目的是设计反馈控制算法，利用被测量变量的反馈来解决跟踪问题。这里考虑了两种情形：设状态x是可量测的，设计**状态反馈控制(state feedback control)**(见第一部分的第2章、第3章和第4章)；或者假设仅输出y是可量测的，设计**输出反馈控制(output feedback control)**(见第二部分的第6章和第7章)。该控制可能是基于状态**观测器(observer)**实现的(见第二部分的第5章)，也可能不是。r阶**动态输出反馈(dynamic output feedback)**控制算法是由如下常微分方程描述的一个非线性系统：

$$\begin{aligned}\dot{w} &= \mu(w,y,y_{\mathrm{r}},t), \qquad w(0)=w_0, \quad w\in\mathbb{R}^r\\ u &= u(w,y,y_{\mathrm{r}},t)\end{aligned}$$

当y由x取代时，即

$$\begin{aligned}\dot{w} &= \mu(w,x,y_{\mathrm{r}},t), \qquad w(0)=w_0, \quad w\in\mathbb{R}^r\\ u &= u(w,x,y_{\mathrm{r}},t)\end{aligned}$$

我们称之为**动态状态反馈(dynamic state feedback)**控制算法。若仅有

$$u = u(y, y_{\mathrm{r}}, t)$$

或

$$u = u(x, y_{\mathrm{r}}, t)$$

则分别称之为**静态输出反馈(static output feedback)**控制和**静态状态反馈(static state feedback)**控制。设计控制的目的是解决闭环(closed loop)系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, \theta, u(w, y, y_{\mathrm{r}}, t))\\ \dot{w} &= \mu(w, y, y_{\mathrm{r}}, t)\\ y &= h(x, \theta)\end{aligned}$$

的跟踪问题。通常提出的附加要求有：向量$x(t)$和$w(t)$是有界的；当存在干扰$\theta(t)$时，要求其对输出的影响抑制到任意程度，称为**干扰解耦 (disturbance rejection)**问题，或者衰减到任意程度，称为**干扰抑制(disturbance attenuation)**问题；通常要求所关心的平衡点$(x_{\mathrm{e}}, \omega_{\mathrm{e}})$具有渐近稳定性，而该平衡点是与期望常值参考输出$y_{\mathrm{r}}$相对应的。作为一种特殊情况，当不存在干扰，即当$\theta(t) = 0$时，参考输出$y_{\mathrm{r}}$为零，且$x$可量测时，控制问题则变为**状态反馈镇定(state feedback stabilization)**问题，即设计状态反馈控制律，使得平衡点$(x_{\mathrm{e}}, \omega_{\mathrm{e}})$局部或全局渐近稳定；而当仅有输出$y$可量测时，我们称之为**输出反馈镇定(output feedback stabilization)**问题。

1.2 从传统方法到现代非线性控制

对于参数已知且不含有干扰的非线性控制系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u)\\ y &= h(x)\end{aligned}$$

传统研究方法是基于在某定常输入u_i所对应的平衡点$x_{\mathrm{e}i}$附近的**线性近似(linear approximations)**描述方法

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_i &= F_i\xi_i + G_i v_i\\ y_i &= H_i\xi_i\end{aligned}$$

其中$\xi_i = x - x_{\mathrm{e}i}$，$v_i = u - u_i$，且

$$\begin{aligned}F_i &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_{\mathrm{e}i}, u_i)\\ G_i &= \frac{\partial f}{\partial u}(x_{\mathrm{e}i}, u_i)\\ H_i &= \frac{\partial h}{\partial x}(x_{\mathrm{e}i})\end{aligned}$$

为雅可比矩阵，其中$x_{\mathrm{e}i}$和u_i满足

$$\begin{aligned}f(x_{\mathrm{e}i}, u_i) &= 0\\ h(x_{\mathrm{e}i}) &= 0\end{aligned}$$

这种方法涉及到几个线性控制问题的求解，从一个问题向另一个问题的转化是相当关键的。

当状态变量在大范围内变化时，系统不一定能保持好的性能，甚至不能保证稳定性。由这种近似而得到的线性系统集合可以视为含有未知参数的单个线性系统(自适应方法)，或受到扰动的一族线性系统(鲁棒方法)。自适应算法和鲁棒算法都可用于控制这类由近似产生的线性系统集合。

功能更强大、价格更低廉的微处理器的使用，以及对更高性能的需求，激发了控制工程师们去设计具有创新性的非线性控制算法，并将其应用于先进控制领域，如机器人、飞机和航天器以及可作为发动机和电动机的电机等。这一情形始于20世纪70年代，当时已开始采用微分几何工具研究非线性的可控性和可观性，并且促进了非线性反馈控制设计理论在20世纪80年代的形成和发展。这种实践先于理论的情形是时常发生的。在这些应用中，非线性特性，如电动转矩、向心力和Coriolis力以及惯性力等扮演了重要角色，而这些非线性特性是能够借助于已知的物理定律进行精确建模的。基于对系统物理特性以及精确的非线性模型的深入理解，工程师们设计了用于不同领域的非线性控制算法，以满足那些采用线性控制方法所不能满足的特殊要求：1972年感应电动机的磁场定向控制；1975年直升机的自动驾驶仪；以及1976年高速刚性机器人的力矩推算等。这些算法具有一个共同的创新性特点：利用状态坐标的非线性变换和非线性状态反馈(目的在于非线性补偿)，可使闭环系统在新的坐标下具有期望的线性特征，或至少更简单一些。例如，在电力驱动应用方面，用于异步电机磁场定向控制的算法使得闭环系统特性符合直流电机的动力学特征，而直流电机工作特性好且易于控制。这很贴近极点配置理论的思想，该思想认为任何线性可控系统(稳定或不稳定的)都可以通过状态反馈转化为具有理想特征值的系统。

上述应用实例可视为现代非线性反馈设计的开始。下面通过一个简单的例子说明这些设计方法的新颖之处。如对于一阶系统($\theta \neq 0$)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \theta x^3 + u \\ y &= x \end{aligned} \tag{1.1}$$

若$y_r = 0$，即控制目标是驱动输出为零，那么采用关于原点的线性化方法有

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u \\ y &= x \end{aligned}$$

为此，我们设计如下控制 ($k > 0$)：

$$u = -kx$$

则闭环系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \theta x^3 - kx = \theta x(x^2 - \frac{k}{\theta}) \\ y &= x \end{aligned}$$

有三个平衡点：一个渐近稳定平衡点$x = 0$，其吸引域为$-\sqrt{k/\theta} < x < \sqrt{k/\theta}$，两个不稳定平衡点$x = \pm\sqrt{k/\theta}$。增益$k$越大，原点的吸引域就越大。然而，无论$k$多大，均不能获得全局渐近稳定，而采用非线性控制($k > 0$)

$$u = -\theta x^3 - kx \tag{1.2}$$

就可以做到全局渐近稳定。这个控制律就可以使闭环系统成为线性且渐近稳定的系统。实际上被控对象的非线性项θx^3被抵消了，为此就要求参数θ和非线性特性x^3是精确已知的。

上述例子说明了非线性反馈的好处，在非线性控制设计中采用这种合适的坐标的重要性还可通过如下二阶系统的例子说明：

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2+\theta x_1^2\\ \dot{x}_2 &= -2\theta^2x_1^3-2\theta x_1x_2+u\\ y &= x_1\end{aligned}\tag{1.3}$$

在新的坐标 $z_1=x_1, z_2=x_2+\theta x_1^2$ 下，该系统可表示为

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2\\ \dot{z}_2 &= u\\ y &= z_1\end{aligned}$$

因此，控制律 $(k_1>0, k_2>0)$

$$u=-k_1z_1-k_2z_2=-k_1x_1-k_2x_2-k_2\theta x_1^2\tag{1.4}$$

可保证系统全局渐近稳定。注意，在这种情形下，非线性部分 θx_1^2 也必须精确已知。

在如下的二阶系统例子中，可以明显看出将非线性坐标变换和非线性状态反馈相结合的优势：

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2+\theta x_1^2\\ \dot{x}_2 &= u\\ y &= x_1\end{aligned}\tag{1.5}$$

当 $\theta\neq0$ 时，采用关于原点的线性近似化方法无法设计线性控制

$$u = -k_1x_1-k_2x_2$$

使得原点全局渐近稳定。然而，非线性控制 $(k_1>0, k_2>0)$

$$u = -2\theta x_1x_2-2\theta^2x_1^3-k_1x_1-k_2x_2-k_2\theta x_1^2\tag{1.6}$$

能够使得原点全局渐近稳定。事实上，在新的全局坐标 $z_1=x_1, z_2=x_2+\theta x_1^2$ 下，闭环系统变为

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2\\ \dot{z}_2 &= -k_1z_1-k_2z_2\\ y &= z_1\end{aligned}$$

在某些情形下，忽略非线性项，采用线性近似方法的线性设计可能导致严重的问题。考虑系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= \theta x_2^3+u\\ y &= x_1\end{aligned}\tag{1.7}$$

与例(1.5)一样，当 $\theta>0$ 时，采用关于原点的线性近似设计的线性控制

$$u = -k_1x_1-k_2x_2$$

不能保证系统全局渐近稳定，这是由于系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= -k_1x_1 - k_2x_2 + \theta x_2^3\\ y &= x_1\end{aligned}$$

存在一个不稳定的极限环。若选择线性增益$k_1 = k^2, k_2 = k$，可以发现当取$\theta = 1/3$时，所有从区域$\{x \in \mathbb{R}^2 : kx_1^2 + (1/k)x_2^2 > 9\}$出发的轨迹都趋向无穷。通过定义$\tau = kt, z_1 = x_2/\sqrt{k}, z_2 = \sqrt{k}x_1$可以看出，上述变换实际上是将系统转化为一个逆时间 van der Pol 方程。尽管在基于线性近似的方法中，增加k似乎改进了这种情况，但为了保证相应的轨迹趋于原点，初始条件应随着k的增加而距离x_2轴越来越近。若我们采用非线性控制$(k_1 > 0, k_2 > 0)$

$$u = -\theta x_2^3 - k_1x_1 - k_2x_2 \tag{1.8}$$

抵消非线性项θx_2^3，则不会发生这样的问题。

例(1.1)、例(1.3)、例(1.5)和例(1.7) 仅给出上面所提到的开拓性应用实例的某些特点，实际上这些应用涉及到多变量模型。这些应用说明，存在几类非线性系统，对其而言采用非线性控制优于基于线性近似的线性控制方法。前者比后者应用了更多的系统信息，实际上非线性模型中包含的所有信息均可用于非线性控制算法中。

1.3 状态反馈线性化

如我们所见，通过状态空间的坐标变换和非线性状态反馈，例(1.1)、例(1.3)、例(1.5)和例(1.7) 可变换为输入–输出满足线性映射关系的线性可控系统。并非所有的非线性系统均具有这样好的特性，因此需要对系统进行分类，例如系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= x_3^3 + u\\ \dot{x}_3 &= x_1 + \theta x_3^3\\ y &= x_1\end{aligned} \tag{1.9}$$

就不可能通过状态反馈将其变换为线性可控，并且输入–输出满足线性映射的系统。实际上，由坐标变换

$$\begin{aligned}z_1 &= x_3\\ z_2 &= x_1 + \theta x_3^3\\ z_3 &= x_2 + 3\theta x_1x_3^2 + 3\theta^2x_3^5\end{aligned}$$

和非线性状态反馈

$$u = -x_3^3 - 3\theta x_2x_3^2 - 6\theta x_1^2x_3 - 21\theta^2x_1x_3^4 - 15\theta^3x_3^7 + v \tag{1.10}$$

系统(1.9)可变换至

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2\\ \dot{z}_2 &= z_3\\ \dot{z}_3 &= v\end{aligned}$$

$$y = z_2 - \theta z_1^3$$

该系统是线性可控的，但是当$\theta \neq 0$时，输入–输出不满足线性映射关系。另一方面，系统(1.9)通过状态反馈

$$u = -x_3^3 + v \tag{1.11}$$

可变换至

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= v\\ \dot{x}_3 &= x_1 + \theta x_3^3\\ y &= x_1\end{aligned}$$

尽管这是线性输入–输出映射，但当$\theta \neq 0$时，其状态方程仅是部分线性的。

对于**可状态反馈线性化的(state feedback linearizable)**系统(即可以通过状态空间坐标和非线性状态反馈变换为线性可控系统)，以及**可输入–输出反馈线性化的(input-output feedback linearizable)** 系统(即可以变换为线性输入–输出映射的系统)，已经有了理论工具来刻画其充分必要条件。在20世纪80年代初期，对于多变量系统已经得出了这两个结论。由这一理论可知，例如：

(i) 系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + \theta x_1^2\\ \dot{x}_2 &= x_3^3 + u\\ \dot{x}_3 &= x_1 + x_2^3 + x_3^3\\ y &= x_1\end{aligned} \tag{1.12}$$

对任意定常参数θ，不是可反馈线性化的，但对任意θ是可输入–输出反馈线性化的；

(ii) 系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 - x_2^2 u\\ \dot{x}_2 &= u\\ y &= x_1\end{aligned} \tag{1.13}$$

是可反馈线性化的，但不是可输入–输出反馈线性化的；

(iii) 系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1^3 + x_2^2 u\\ \dot{x}_2 &= u\\ y &= x_1\end{aligned} \tag{1.14}$$

通过状态反馈既不是关于原点可线性化的，也不是输入–输出可线性化的。

这些结果是构造性的。例如，系统(1.13)的线性化变换由坐标变换

$$z_1 = x_1 + \frac{x_2^3}{3}$$

$$z_2 = x_2$$

和状态反馈控制

$$u = -k_1(x_1 + \frac{x_2^3}{3}) - k_2 x_2 + v \tag{1.15}$$

给出。在 z 坐标系下，闭环系统(1.13)~(1.15)变为

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= z_2 \\
\dot{z}_2 &= -k_1 z_1 - k_2 z_2 + v \\
y &= z_1 - \frac{z_2^3}{3}
\end{aligned}$$

注意，输入–输出映射仍为非线性的。

对于那些不是可反馈线性化的系统，一个自然的问题是如何刻画通过状态反馈可变为线性的那部分动态的特征。系统(1.12)不是可反馈线性化的，但是状态反馈

$$u = -x_3^3 - 2\theta x_1 x_2 - 2\theta^2 x_1^3 + v \tag{1.16}$$

使得输入–输出映射成为线性的，且闭环系统 $(z_2 = x_2 + \theta x_1^2)$

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= z_2 \\
\dot{z}_2 &= v \\
\dot{x}_3 &= x_1 + x_2^3 + x_3^3 = x_1 + (z_2 - \theta x_1^2)^3 + x_3^3 \\
y &= x_1
\end{aligned}$$

是部分线性的，它是一个非线性系统和一个线性可控系统的串联。

1.4 逆系统与零动态

反馈线性化是线性系统极点配置定理的推广，而输入–输出反馈线性化则是零极点对消方法的推广。考虑线性系统

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= x_3 + u \\
\dot{x}_3 &= x_1 + x_2 + x_3 \\
y &= x_1
\end{aligned} \tag{1.17}$$

其传递函数为 $(s \in C)$

$$y(s) = \frac{s-1}{s^3 - s^2 - s - 1} u(s)$$

当式(1.12)中 $\theta = 0$ 时，线性系统(1.17)和非线性系统(1.12)具有相似的结构。将状态反馈(与式(1.16)比较，其中 $\theta = 0$)

$$u = -x_3 + v \tag{1.18}$$

应用于系统(1.17)，则对应的闭环系统

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= v
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_3 &= x_1+x_2+x_3 \\ y &= x_1\end{aligned}$$

是不可观的，其传递函数为

$$y(s)=\frac{s-1}{s^3-s}v(s)=\frac{1}{s^2}v(s)$$

这就意味着控制(1.18)将极点配置在$s=1$以及二重极点$s=0$处，导致了零极点对消。不稳定动态

$$\dot{x}_3=x_3$$

在不可观的子空间$S=\{x\in\mathbb{R}^3:x_1=0,x_2=0\}$上演化，且由与零点相互抵消的一个特征根刻画。式(1.17)的**逆系统(inverse system)**为

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= \xi+y+\dot{y} \\ u &= -\xi+\ddot{y}\end{aligned}$$

当其由$y=\dot{y}=\ddot{y}=0$驱动时，其动态与导致零极点对消的状态反馈造成的不可观动态一致。众所周知，对于线性系统而言，零极点对消方法对于**非最小相位(non-minimum phase)**系统(即系统有不稳定零点)是不可行的。

尽管对于非线性系统而言，没有传递函数和零极点的定义，但可观性仍是一个有明确定义的概念：状态反馈(1.16)使得不稳定的且在子空间$S=\{x\in\mathbb{R}^3:x_1=0,x_2=0\}$上的动态

$$\dot{x}_3 = x_3^3$$

从输出是不可观测的，所以由式(1.16)($\theta=0$)控制的闭环系统(1.12)是不可观的。由输入–输出线性化状态反馈导致的不可观动态称为**零动态(zero dynamics)**，从而线性系统中零点的概念可推广到非线性系统。更准确地说，推广了在不可观子空间上演化动态的概念。

可以定义非线性系统的逆系统并与零动态联系起来。当$\theta=0$时，系统(1.12)的逆系统为

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= \xi^3+y+\dot{y}^3, \qquad \xi(0)=\xi_0 \\ u &= -\xi^3+\ddot{y}\end{aligned}$$

若$y_{\rm r}(t)$为要跟踪的信号，则称动态

$$\dot{\xi} = \xi^3+y_{\rm r}(t)+\dot{y}_{\rm r}^3(t)$$

为**跟踪动态(tracking dynamics)**。当跟踪动态由$y=\dot{y}=\ddot{y}=0$驱动时，其与零动态是一致的；在这种情形下，需要逆系统产生输入信号，维持输出等于零。由于系统(1.12)是非最小相位的(零动态是不稳定的)，因此线性化状态反馈(1.16)不可行。实际上，对于任意非零的初始条件，即使设计v驱动$y=x_1$和$\dot{y}=x_2$到零，当t趋向于无穷时，$x_3(t)$以及控制$u(t)$还是趋向于无穷的。

1.5 不确定性系统的状态反馈

迄今为止，已经讨论了不含有不确定性的非线性系统的线性化处理方法，这些方法要求状态可量测且涉及到非线性抵消。尽管有许多重要系统的非线性模型可以由物理定律精确获得，而且它们的状态是可量测的，但假设模型中的所有参数(如质量、惯量、电阻以及电感)均为精确已知或者系统根本不受干扰影响，是非常不现实的。

这一问题就自然导致了对带有未知或者不精确已知参数的控制系统的研究。应该设计控制算法，使其在参数不确定性存在时仍然是所求控制问题的解。对于线性系统，在20世纪80年代就提出了这一问题，并引出了自适应和鲁棒控制。从1986年起，非线性系统的自适应控制已经成为一个非常活跃的领域。对于满足**线性参数化(linear parameterization)**条件并且与参数相乘的向量场$q_i(x)$具有**三角型(triangularity)**结构的系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x)+\sum_{i=1}^{p}\theta_i q_i(x)+g(x)u(t)\\ y &= h(x)\end{aligned}$$

自适应反馈线性化和自适应输入–输出线性化算法已经很成熟了。对于带有未知参数的系统，反馈线性化控制可能不满足控制目标，因此这些结果相当重要。我们通过系统(1.7)来考察这一点。假设$\theta>0$是未知的，$\hat{\theta}>0$是θ的估计，从而控制(1.8)变为

$$u = -\hat{\theta}x_2^3-k_1x_1-k_2x_2 \tag{1.19}$$

相应的闭环系统为

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= (\theta-\hat{\theta})x_2^3-k_1x_1-k_2x_2\end{aligned}$$

若$\theta-\hat{\theta}<0$，即θ估计过大，则原点是全局渐近稳定的。若$\theta-\hat{\theta}>0$，即θ估计过小，则存在一个极限环，它是吸引域的边界，得不到全局渐近稳定性。但是，通过非线性自适应方法可以克服这个缺点。实际上，**自适应反馈线性化控制(adaptive feedback linearizing control)**$(k_1>0,k_2>0)$

$$u = -\hat{\theta}x_2^3-k_1x_1-k_2x_2 \tag{1.20}$$

和自适应律

$$\dot{\hat{\theta}} = \begin{bmatrix}x_1 & x_2\end{bmatrix}P\begin{bmatrix}0\\ x_2^3\end{bmatrix} \tag{1.21}$$

对于任意的初始条件$x(0)$和$\hat{\theta}(0)$，以及任意未知正的或负的参数θ，都能保证$\lim_{t\to\infty}\|x(t)\|=0$，其中$P$为Lyapunov矩阵方程

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\ -k_1 & -k_2\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}P+P\begin{bmatrix}0 & 1\\ -k_1 & -k_2\end{bmatrix} = -I$$

的对称正定解，这一结论可由选取如下Lyapunov函数得出

$$V = x^{\mathrm{T}}Px+(\theta-\hat{\theta})^2$$

其对时间的导数为

$$\dot{V} = -x^{\mathrm{T}}x$$

对于含有未知参数的线性或者仿射系统，同样可以提出类似的问题。例如考虑系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= \theta_0+\theta_1x_1+\theta_2x_2+u\end{aligned}$$

其中$(\theta_0,\theta_1,\theta_2)$是正或者负的未知参数。在这种特殊情形下，自适应反馈线性化方法即为经典

的PID(比例–积分–微分)控制设计。也有许多系统，如

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + \theta x_1 x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= u\end{aligned}$$

即使对于θ的任意值都是可反馈线性化的，也不满足三角型条件。基于目前的研究结果来判断，对于任意参数值均可反馈线性化并不是自适应控制存在的充分条件。

由未知参数带来的不确定性可以称为是结构化的。当然，不确定性也可以是非结构化的，例如一个非线性函数，其界可以由一个已知的多项式给出，或者非线性部分可以根据实验数据表示成在一个特定区域查表的形式。这些情况都不能用自适应算法来处理，需要采用鲁棒方法和针对最劣情况设计的方法来处理。

当系统受到干扰影响时，干扰解耦问题或至少是干扰抑制问题就应运而生了。在线性系统中这类问题已经得到了广泛研究，在非线性系统中，近来也开展了对该问题的研究。非线性系统的干扰解耦(或解耦)问题得到完全解决并给出了充要条件。在20世纪80年代初期，从线性系统中提出了干扰抑制问题并得以解决，目前在非线性系统中也对该问题进行了研究并得到了充分条件。例如，设线性系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \theta(t)x + u \\ y &= x\end{aligned} \tag{1.22}$$

跟踪一个参考信号$y_{\mathrm{r}}(t)$，若θ为定常未知参数，自适应控制($\lambda > 0$)

$$\begin{aligned}u &= -\lambda(y - y_{\mathrm{r}}) - \hat{\theta}y + \dot{y}_{\mathrm{r}} \\ \dot{\hat{\theta}} &= y(y - y_{\mathrm{r}})\end{aligned} \tag{1.23}$$

能够保证对任意初始条件下的渐近跟踪，即$\lim_{t\to\infty}(y(t) - y_{\mathrm{r}}(t)) = 0$。另一方面，鲁棒控制的目的则并非是渐近跟踪，而是要求跟踪误差按照公式

$$\int_0^t (y(\tau) - y_{\mathrm{r}})^2\, d\tau \leqslant \frac{1}{k}\int_0^t \theta^2(\tau)\, d\tau$$

任意衰减。即当$y(0) = y_{\mathrm{r}}(0)$时，对于任意的正数t和任意大的正数k，上述公式均成立。注意$\theta(t)$为未知干扰，这里不要求它是常数，但要求它是平方可积的。对于系统(1.22)，干扰抑制问题的解可以由如下的鲁棒控制($k > 0$)给出：

$$u = -\lambda(y - y_{\mathrm{r}}) + \dot{y}_{\mathrm{r}} - \frac{1}{4}ky^2(y - y_{\mathrm{r}}) \tag{1.24}$$

1.6 非线性观测器

在线性可观系统中，如果并不是所有状态可量测，而是仅有输出的部分状态可量测时，则可以基于观测器来构造输出反馈算法，其观测器可提供渐近趋近于不可量测状态的估计。可观性保证存在一个线性坐标变换$z = Tx$，它可以将一个线性可观系统$\dot{x} = Ax + bu, y =$

cx 变换到**能观标准型(observer form)**

$$
\begin{aligned}
\dot{z} &= \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} y + Tbu \triangleq A_o z + ay + Tbu \\
y &= \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} z \triangleq c_o z
\end{aligned}
$$

其观测器可如下给定:

$$
\begin{aligned}
\dot{\hat{z}} &= A_o\hat{z} + ay + Tbu + k(y - c_o\hat{z}), \qquad \hat{z}(0) = \hat{z}_0 \\
\hat{x} &= T^{-1}\hat{z}
\end{aligned}
$$

其中 $k = [k_1, \cdots, k_n]^{\mathrm{T}}$，$s^n + k_n s^{n-1} + \cdots + k_2 s + k_1$ 为Hurwitz多项式，这是因为误差动态($\tilde{z} = z - \hat{z}$)

$$
\dot{\tilde{z}} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -k_1 \\ 1 & \cdots & 0 & -k_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & -k_n \end{bmatrix} \tilde{z}, \qquad \tilde{z}(0) = z(0) - \hat{z}(0)
$$

是渐近稳定的。显然，究竟哪类非线性系统可以通过一个非线性坐标变换 $z = T(x)$ 变换为

$$
\begin{aligned}
\dot{z} &= A_o z + \gamma(y) + \delta(y)u \\
y &= c_o z
\end{aligned}
$$

其中 γ 和 δ 为仅与输出 y 相关的向量场，这是一个很有趣的问题，1983年，得到了表征这类系统的充要条件。只要坐标变换确定，即可给出如下非线性**观测器(observer)**

$$
\begin{aligned}
\dot{\hat{z}} &= A_o\hat{z} + \gamma(y) + \delta(y)u + k(y - c_o\hat{z}) \\
\hat{x} &= T^{-1}(\hat{z})
\end{aligned}
$$

其误差动态与线性情形相同。这个结果是非平凡的，如下面的一个简单例子所示:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 + \theta x_1^2 \\
\dot{x}_2 &= x_1 x_2 + x_1^3 u \\
y &= x_1
\end{aligned} \tag{1.25}
$$

系统(1.25)可通过全局坐标变换

$$
\begin{aligned}
z_1 &= x_2 - \frac{1}{2}x_1^2 \\
z_2 &= x_1
\end{aligned}
$$

变换为

$$
\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= -\theta y^3 + y^3 u \\
\dot{z}_2 &= z_1 + \frac{1}{2}y^2 + \theta y^2 \\
y &= z_2
\end{aligned}
$$

与反馈线性化一样，非线性观测器的根本也是抵消非线性特性，因此当涉及未知参

数时，观测器就可能是不可实现的。例如，若式(1.25)中θ未知，$\hat{\theta}$是其估计，观测器$(k_1 > 0, k_2 > 0)$

$$\begin{bmatrix}\dot{\hat{z}}_1\\\dot{\hat{z}}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{z}_1\\\hat{z}_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}y^3u\\y^2/2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-y^3\\y^2\end{bmatrix}\hat{\theta} + \begin{bmatrix}k_1\\k_2\end{bmatrix}(y - \hat{z}_2) \tag{1.26}$$

中的误差动态不再为线性的：

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{z}}_1 &= -k_1\tilde{z}_2 - (\theta - \hat{\theta})y^3\\\dot{\tilde{z}}_2 &= \tilde{z}_1 - k_2\tilde{z}_2 + (\theta - \hat{\theta})y^2\end{aligned}$$

如果当t趋于无穷时，输出$y(t)$不趋于零，则误差$\tilde{z}(t)$除$\theta = \hat{\theta}$外也不趋于零。在这种情形下，观测器必须重新设计，以使存在未知定常参数时同样可获得收敛的状态估计，这样的观测器称为**自适应观测器(adaptive observer)**。在线性参数化的约束条件下，线性和非线性系统的这个问题均已得到解决。

例如考虑系统

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}x_2 + \theta x_1^2\\\theta x_1^2 + u\end{bmatrix} \triangleq A_c\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} + b\theta x_1^2 + gu\\y &= x_1 \triangleq c_c x\end{aligned} \tag{1.27}$$

观测器为$(k_1 > 0, k_2 > 0)$

$$\begin{bmatrix}\dot{\hat{x}}_1\\\dot{\hat{x}}_2\end{bmatrix} = A_c\begin{bmatrix}\hat{x}_1\\\hat{x}_2\end{bmatrix} + b\hat{\theta}y^2 + gu + \begin{bmatrix}k_1\\k_2\end{bmatrix}(y - \hat{x}_1) \tag{1.28}$$

其中$\hat{\theta}$为未知定常参数θ的估计。寻找一个修正律

$$\dot{\hat{\theta}} = w(y, \hat{\theta}, \hat{x}_1, \hat{x}_2, u)$$

对于θ的任意未知值，使得估计误差$\tilde{x} = x - \hat{x}$的动态$(\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta})$

$$\begin{bmatrix}\dot{\tilde{x}}_1\\\dot{\tilde{x}}_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-k_1\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 + \tilde{\theta}y^2\\-k_2\tilde{x}_1 + \tilde{\theta}y^2\end{bmatrix} = (A_c - kc_c)\begin{bmatrix}\tilde{x}_1\\\tilde{x}_2\end{bmatrix} + b\tilde{\theta}y^2$$

当$t \to \infty$时趋向于零。如果选择如下的k_1和$k_2(\lambda > 0)$:

$$\begin{bmatrix}k_1\\k_2\end{bmatrix} = A_c b + \lambda b$$

记$A = A_c - kc_c$，则有

$$c_c(sI - A)^{-1}b = \frac{1}{s + \lambda}$$

根据 Meyer-Kalman-Yacubovich 引理 B.2.2，这意味着存在正定矩阵P和Q，使得

$$\begin{aligned}A^{\mathrm{T}}P + PA &= -Q\\Pb &= c_c^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

成立。因此修正律

$$\dot{\hat{\theta}} = y^2(y - \hat{x}_1) \tag{1.29}$$

与式(1.28)一起给出了一个自适应观测器。实际上，由于θ是常数，有

$$\dot{\tilde{\theta}} = -y^2(y - \hat{x}_1)$$

且误差动态为

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= A\tilde{x} + by^2\tilde{\theta} \\ \dot{\tilde{\theta}} &= -y^2\tilde{x}_1\end{aligned}$$

取函数

$$V = \tilde{x}^{\mathrm{T}}P\tilde{x} + \tilde{\theta}^2$$

对时间的微分，并利用 $Pb = c_{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}}$，有

$$\frac{dV}{dt} = -\tilde{x}^{\mathrm{T}}Q\tilde{x} + 2\tilde{x}^{\mathrm{T}}Pby^2\tilde{\theta} - 2y^2\tilde{\theta}\tilde{x}_1 = -\tilde{x}^{\mathrm{T}}Q\tilde{x}$$

因此，若输出 $y(t)$ 是有界的，则有

$$\lim_{t\to\infty}\|\tilde{x}(t)\| = 0$$

故式(1.28)和式(1.29)定义了一个自适应观测器。

1.7 输出反馈

所有的状态均可量测且可用于反馈的假设往往是不现实的，例如某些状态可能无法通过传感器测得(如鼠笼式感应电机中的转子电流)，或者需要的传感器太昂贵或不可靠。对于线性系统而言，采用状态观测器和分离原理可以解决这些困难。分离原理表明，当任何线性镇定状态反馈算法中的状态由线性观测器给出的估计所代替时，算法仍可实现全局镇定。

对于非线性系统而言，输出反馈全局镇定往往是很难解决的问题。然而，也存在一些系统，当采用基于观测器的控制时可以实现全局稳定。考虑系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + u + \theta_2 x_1^2 \\ \dot{x}_2 &= \theta_1 x_1^3 + u + \theta_2 x_1^2 \\ y &= x_1\end{aligned} \tag{1.30}$$

若 $\theta_2 = 0$，在坐标 $z_1 = x_1, z_2 = x_1 - x_2$ 下，式(1.30)变为

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_1 - z_2 + u \\ \dot{z}_2 &= z_1 - z_2 - \theta_1 z_1^3 \\ y &= z_1\end{aligned}$$

因此，当参数 θ_1 已知，且仅有输出 y 可量测时，采用函数

$$V = \frac{1}{2}[z_1^2 + z_2^2 + (z_2 - \hat{z}_2)^2]$$

可以设计输出反馈镇定控制，其中 $\hat{z}_2$ 表示不可量测状态 z_2 的估计。实际上，求 V 对时间的导数得

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= z_1^2 - z_1z_2 + z_1u + z_2z_1 - z_2^2 - \theta_1 z_2 z_1^3 \\ &\quad + (z_2 - \hat{z}_2)(z_1 - z_2 - \theta_1 z_1^3 - \dot{\hat{z}}_2)\end{aligned}$$

选择控制 $(k > 0)$

$$u = -z_1(1+k) + \theta_1 \hat{z}_2 z_1^2 \tag{1.31}$$

状态估计 $\hat{z}_2$ 的动态如下

$$\dot{\hat{z}}_2 = z_1 - \hat{z}_2 - 2\theta_1 z_1^3 \tag{1.32}$$

将其代入 $\dot{V}$ 中得

$$\frac{dV}{dt} = -kz_1^2 - z_2^2 - (z_2 - \hat{z}_2)^2$$

故当 t 趋于无穷时，闭环系统(1.30)~闭环系统(1.31)使得 z 指数趋于零，且 $\hat{z}_2$ 指数趋于 z_2。动态补偿(1.31)是基于降阶观测器(1.32)构成的，状态观测是在闭环系统中实现的，因此，它是**输出反馈镇定控制(output feedback stabilizing control)**。应该注意，修正项 $-\theta_1 z_1^3$ 被加入开环降阶观测器

$$\dot{\hat{z}}_2 = -\hat{z}_2 + y - \theta_1 y^3$$

中。系统(1.30)(其中 $\theta_2 = 0$)也可由静态输出反馈($k_1 > 0, k_2 > 0$)

$$u = (-1 - k_1 - k_2\theta_1^2 y^4)y \tag{1.33}$$

实现全局镇定，它并不是基于非线性抵消的。在 z 坐标系($z_1 = x_1, z_2 = x_1 - x_2$)下，闭环系统变为

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_1 - z_2 - z_1 - k_1 z_1 - k_2\theta_1^2 z_1^5 \\ \dot{z}_2 &= z_1 - z_2 - \theta_1 z_1^3\end{aligned}$$

其全局稳定性可通过选取如下 Lyapunov 函数证明

$$V = \frac{1}{2}z_1^2 + z_2^2$$

当 $k_1 > 1/4$ 和 $k_2 \geqslant 1$ 时，其对时间的导数：

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= z_1 z_2 - k_1 z_1^2 - z_2^2 - [z_1^2(k_2\theta_1^2 z_1^4) + z_1 z_2(2\theta_1 z_1^2) + z_2^2] \\ &\leqslant -k_1 z_1^2 + z_1 z_2 - z_2^2\end{aligned}$$

是负定的。

1.8 不确定性系统的输出反馈

系统(1.27)和系统(1.30) 属于一类可观测的，具有线性渐近稳定零动态的最小相位非线性系统，在合适的状态坐标下，其非线性只与量测输出 y 有关。对于这些系统，只要参数和非线性性质精确已知，即可设计输出反馈控制。而当系统不确定时，对于同一类非线性系统，可得到其他输出反馈控制算法：

(i) 自适应跟踪算法，它是基于观测器构造的，要求非线性特性精确已知，且未知定常参数满足线性参数化条件；

(ii) 鲁棒镇定算法，它与观测器无关，仅要求非线性特性的界函数已知，但不要求线性参数化条件。

例如，系统

$$\dot{x}_1 = x_2 + \theta(e^{x_1+2x_2+x_3} - 1)$$

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_2 &= x_3 \\
\dot{x}_3 &= u \\
y &= x_1 + 2x_2 + x_3
\end{aligned} \tag{1.34}
$$

就属于这一类系统：相对阶为1，通过线性坐标变换

$$
\begin{aligned}
z_1 &= x_1 \\
z_2 &= x_2 \\
z_3 &= x_1 + 2x_2 + x_3
\end{aligned}
$$

可确定零动态是线性渐近稳定的。实际上，在该变换作用下，式(1.34)变为

$$
\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= z_2 + \theta(\mathrm{e}^{z_3} - 1) \\
\dot{z}_2 &= -z_1 - 2z_2 + z_3 \\
\dot{z}_3 &= z_2 + \theta(\mathrm{e}^{z_3} - 1) - 2z_1 - 4z_2 + 2z_3 + u \\
y &= z_3
\end{aligned}
$$

令 $y = z_3 = 0$，得其零动态为

$$
\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= z_2 \\
\dot{z}_2 &= -z_1 - 2z_2
\end{aligned}
$$

显然，这是渐近稳定的，从而系统为最小相位系统。

另一例子由系统(1.30)给出，其中 $\theta_1 = 0$，θ_2 未知，在前面部分中已进行了基于观测器的控制设计。若 $\theta_1 = 0$ 且 θ_2 未知，则可设计自适应输出反馈控制。将式(1.30)重写为

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} (u + \theta_2 y^2) \triangleq A_\mathrm{c} x + b(u + \theta_2 y^2) \\
y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \triangleq c_\mathrm{c} x
\end{aligned}
$$

在 x 坐标系下，自适应观测器为

$$
\begin{aligned}
\dot{\hat{x}}_1 &= \hat{x}_2 + u + \hat{\theta}_2 y^2 + k_1(y - \hat{x}_1) \\
\dot{\hat{x}}_2 &= u + \hat{\theta}_2 y^2 + k_2(y - \hat{x}_1) \\
\dot{\hat{\theta}}_2 &= y^2(y - \hat{x}_1)
\end{aligned} \tag{1.35}
$$

其中(λ_o 为正实数)

$$
\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \lambda_\mathrm{o} \\ \lambda_\mathrm{o} \end{bmatrix} \triangleq k_\mathrm{o}
$$

使得 $(A_\mathrm{c} - k_\mathrm{o} c_\mathrm{c})$ 的特征多项式为 $(s+1)(s+\lambda_\mathrm{o})$，即传递函数中有一处零极点对消

$$
c_\mathrm{c}[sI - (A_\mathrm{c} - k_\mathrm{o} c_\mathrm{c})]^{-1} b = \frac{1}{s + \lambda_\mathrm{o}}
$$

令参考模型给定如下：

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_{\mathrm{r}1} &= x_{\mathrm{r}2} - k_3 x_{\mathrm{r}1} - k_4 x_{\mathrm{r}2} + u_\mathrm{r} \\
\dot{x}_{\mathrm{r}2} &= -k_3 x_{\mathrm{r}1} - k_4 x_{\mathrm{r}2} + u_\mathrm{r}
\end{aligned}
$$

$$y = x_{r1}$$

参考输出y_r由该模型产生。选择增益$k_c = (k_3, k_4)$，使得$(A_c - bk_c)$的特征多项式为$(s+1)(s+\lambda_c)$，即在传递函数$c_c[sI-(A_c-bk_c)]^{-1}b = 1/(s+\lambda_c)$ (λ_c为正实数)中存在一处零极点对消。在两处零极点对消中，我们利用了三元组$(A_c - k_o c_c, b, c_c)$和$(A_c - bk_c, b, c_c)$所具有的重要性质，即均为最小相位的，且相对阶为1。设计控制为

$$u = -\hat{\theta}_2 y^2 - k_3 \hat{x}_1 - k_4 \hat{x}_2 + u_r \tag{1.36}$$

其中状态估计由观测器提供。通过使用未知参数θ_2相同的估计$\hat{\theta}_2$，控制器和观测器均试图消除非线性项$\theta_2 y^2$，而估计$\hat{\theta}_2$的修正律给定如下：

$$\dot{\hat{\theta}}_2 = y^2[y - y_r + \eta(y - \hat{x}_1)] \tag{1.37}$$

(η为充分大的正实数)，该修正律对跟踪误差$y - y_r$和观测器误差$y - \hat{x}_1$均有作用。由如下描述的跟踪误差$e = x - x_r$，观测器误差$\tilde{x} = x - \hat{x}$以及估计误差$\tilde{\theta}_2 = \theta_2 - \hat{\theta}_2$的动态

$$\begin{aligned}
\dot{e} &= (A_c - bk_c)e + by^2\tilde{\theta}_2 + bk_c\tilde{x} \\
\dot{\tilde{x}} &= (A_c - k_o c_c)\tilde{x} + by^2\tilde{\theta}_2 \\
\dot{\tilde{\theta}}_2 &= -y^2 c_c(e + \eta\tilde{x})
\end{aligned}$$

并且取如下函数：

$$V = e^{\mathrm{T}} P_c e + \eta \tilde{x}^{\mathrm{T}} P_o \tilde{x} + \tilde{\theta}_2^2$$

来判定闭环系统的稳定性，其中P_c和P_o为下式的正定解：

$$\begin{aligned}
(A_c - bk_c)^{\mathrm{T}} P_c + P_c(A_c - bk_c) &= -Q_c \\
P_c b &= c_c^{\mathrm{T}} \\
(A_c - k_o c_c)^{\mathrm{T}} P_o + P_o(A_c - k_o c_c) &= -Q_o \\
P_o b &= c_c^{\mathrm{T}}
\end{aligned}$$

根据Meyer-Kalman-Yacubovich引理B.2.2，Q_c和Q_o为合适的正定矩阵。实际上，有

$$\frac{dV}{dt} = -e^{\mathrm{T}} Q_c e + 2e^{\mathrm{T}} P_c b k_c \tilde{x} - \eta \tilde{x}^{\mathrm{T}} Q_o \tilde{x}$$

自适应跟踪控制(adaptive tracking control)式(1.36)是基于自适应观测器求解未知参数θ_2为任意值时的跟踪问题。系统(1.30)的相对阶为1，因此其跟踪控制设计非常简单。对于相对阶大于1的系统，其跟踪问题可由更复杂的自适应控制算法解决。系统(1.30)属于一类可观的最小相位非线性系统，它具有线性零动态和与系统不确定性和非线性无关的可定义相对阶，在合适的坐标下，其非线性只与输出相关。

由传递函数描述的线性系统

$$W(s) = \frac{b_{n-\rho}s^{n-\rho} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

其中$(a_0, \cdots, a_{n-1}, b_0, \cdots, b_{n-\rho})$为未知常系数，如果是最小相位的($b_{n-\rho}s^{n-\rho} + \cdots + b_1 s + b_0$的所有$n-\rho$个零点具有负实部)且$b_{n-\rho}$(通常称为高频增益)的符号已知，则属于这类系统。

当参数不是线性地进入系统，但其界预先已知时，鲁棒非线性算法不仅可以镇定系

统(1.30)，而且可以镇定更一般的系统

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 + \theta_1 x_1^{\theta_2} + u \\
\dot{x}_2 &= \theta_1 x_1^{\theta_2} + u \\
y &= x_1
\end{aligned}
\tag{1.38}
$$

其中非线性项 $\theta_1 x_1^{\theta_2}$ 是不确定的，且仅已知其值属于由已知非线性函数界定的一个区域。在新的坐标 $z = x_2 - x_1, y = x_1$ 下，系统(1.38)变为

$$
\begin{aligned}
\dot{z} &= -z - y \\
\dot{y} &= z + y + \theta_1 y^{\theta_2} + u
\end{aligned}
$$

假设 $|\theta_1 y^{\theta_2 - 1}| < y^8$，即 θ_1 和 θ_2 的界是可得到的，则静态输出反馈控制

$$
u = -y(2 + y^8) \tag{1.39}
$$

将全局镇定系统族(1.38)。实际上，函数

$$
V = \frac{1}{2}(z^2 + y^2)
$$

的时间导数是负定的

$$
\begin{aligned}
\frac{dV}{dt} &= -z^2 - zy + yz + y^2 - 2y^2 + y^2(\theta_1 y^{\theta_2 - 1} - y^8) \\
&\leqslant -y^2 - z^2
\end{aligned}
$$

基于最劣情况设计的控制(1.39)是**鲁棒输出反馈镇定控制 (robust output feedback stabilizing control)**。系统(1.38)的相对阶为 1 且为最小相位系统，因此式(1.39)的设计比较简单，是线性高增益控制方法的推广。对于相对阶大于 1 的系统，需要采取更复杂的动态输出反馈算法。将针对不确定参数属于有界集合的线性系统所得到的同时镇定结果推广到一类非线性系统，从而得到了这些结果。

1.9 本书章节安排

本书介绍了非线性设计方法，该方法广泛应用于电机、机器人、航天器和飞行器控制以及电力系统中。本书分为两个部分，第一部分为状态反馈设计(第 2 章、第 3 章和第 4 章)，第二部分为输出反馈设计(第 6 章和第 7 章)，并包括了观测器的设计(第 5 章)。附录 A 和附录 B 分别介绍了实际用到的微分几何和稳定性理论的基本结果，主要说明了符号和术语。读者可以进一步阅读参考文献所列出的几本很好的相关书籍。每章都介绍了一些求解过的例题、设计实例和启示性的习题。只要涉及到的坐标变换是全局的，所给出的结果就是全局的，在这种意义下，所给出的结果是非局部的。那些仅能得到局部结果的控制算法不在本书讨论范围之内。本书所提及的全部结论都针对单输入单输出系统，尽管大部分相关应用涉及到多变量模型。在每一章的结尾尽可能给出了一些主要结论在多变量系统中的推广，也给出了一些涉及到多变量系统的求解过的实例。

第 2 章和第 3 章研究无输出的非线性系统。第 2 章研究不含有不确定性的系统，即不受干扰影响且参数和非线性项精确已知。主要结果是反馈线性化定理，该定理是线性系统中的极点配置定理在一类非线性系统中的推广，这类非线性系统由微分几何条件描述。第 2 章还介绍了部分反馈线性化理论。第 3 章研究含有不确定性的可反馈线性化系统，即含有未知参

数或受到时变干扰的影响。对于这样的系统，主要采用自适应和鲁棒的反馈线性化算法，包括模型参考自适应控制和线性系统的高增益方法。

第4章在本书中首次引入了一个要控制的单输出变量，分别定义了逆系统、相对阶、零动态、跟踪动态以及最小相位系统，并且描述了干扰解耦和干扰抑制问题。这一章的主要结果是输入–输出反馈线性化定理，该定理是线性系统零极点对消方法的推广。本章还说明了零极点对消与零动态和部分反馈线性化的关系，并针对含有未知参数的系统建立了相应的自适应算法。本章给出了干扰解耦问题可解性的充要条件，以及干扰抑制问题可解性和确保暂态指标自适应跟踪设计的充分条件。

第5章研究观测器和自适应观测器。本章的主要结论是提供了线性渐近稳定误差动态的观测器存在的充分条件。这一结论可视为通过变换为观测器标准型构造线性系统观测器方法的推广。本章建立了相应的具有线性误差动态的自适应观测器，包括带有未知参数的线性系统自适应观测器的特例。

第6章和第7章研究输出反馈设计。第6章研究不含有不确定性的系统，分别给出了由静态和动态输出反馈进行线性化的条件。对于一类由微分几何条件描述的非线性系统，设计了输出反馈控制算法。第7章研究的是含有未知定常参数系统的跟踪问题，并区分了两种情形：非线性参数化和线性参数化。针对第一种情形设计了鲁棒镇定控制，而针对第二种情形建立了自适应跟踪控制。这两个控制算法均可应用于含有未知系数的线性最小相位系统，将线性系统的已知结果推广到一类非线性系统中。

1.10 实际控制问题

下面给出一些广泛研究的具有非线性模型的物理系统，这些模型和相应的控制问题在本书中将用以说明所给出的方法。

1.10.1 感应电机(Induction motor)

非饱和感应电机的具体模型如下：

$$\begin{aligned}
\frac{d\omega}{dt} &= \frac{n_{\mathrm{p}}M}{JL_{\mathrm{r}}}(\psi_a i_b - \psi_b i_a) - \frac{T_{\mathrm{L}}}{J}\\
\frac{d\psi_a}{dt} &= -\frac{R_{\mathrm{r}}}{L_{\mathrm{r}}}\psi_a - n_{\mathrm{p}}\omega\psi_b + \frac{R_{\mathrm{r}}}{L_{\mathrm{r}}}Mi_a\\
\frac{d\psi_b}{dt} &= -\frac{R_{\mathrm{r}}}{L_{\mathrm{r}}}\psi_b + n_{\mathrm{p}}\omega\psi_a + \frac{R_{\mathrm{r}}}{L_{\mathrm{r}}}Mi_b\\
\frac{di_a}{dt} &= \frac{MR_{\mathrm{r}}}{(L_{\mathrm{r}}L_{\mathrm{s}} - M^2)L_{\mathrm{r}}}\psi_a + \frac{n_{\mathrm{p}}M}{L_{\mathrm{r}}L_{\mathrm{s}} - M^2}\omega\psi_b\\
&\quad - \frac{M^2R_{\mathrm{r}} + L_{\mathrm{r}}^2R_{\mathrm{s}}}{(L_{\mathrm{r}}L_{\mathrm{s}} - M^2)L_{\mathrm{r}}}i_a + \frac{L_{\mathrm{r}}}{L_{\mathrm{r}}L_{\mathrm{s}} - M^2}u_a\\
\frac{di_b}{dt} &= \frac{MR_{\mathrm{r}}}{(L_{\mathrm{r}}L_{\mathrm{s}} - M^2)L_{\mathrm{r}}}\psi_b - \frac{n_{\mathrm{p}}M}{L_{\mathrm{r}}L_{\mathrm{s}} - M^2}\omega\psi_a\\
&\quad - \frac{M^2R_{\mathrm{r}} + L_{\mathrm{r}}^2R_{\mathrm{s}}}{(L_{\mathrm{r}}L_{\mathrm{s}} - M^2)L_{\mathrm{r}}}i_b + \frac{L_{\mathrm{r}}}{L_{\mathrm{r}}L_{\mathrm{s}} - M^2}u_b
\end{aligned}$$

其中，转子转速ω，转子磁通(ψ_a,ψ_b)和定子电流(i_a,i_b)为状态；转子转动惯量J，定子和转子电感$(L_{\mathrm{s}},L_{\mathrm{r}})$，互感系数$M$，定子和转子电阻$(R_{\mathrm{s}},R_{\mathrm{r}})$和极对数$n_{\mathrm{p}}$为参数。电压$(u_a,u_b)$为全状态$(\omega,\psi_a,\psi_b,i_a,i_b)$的函数。$(\psi_a,\psi_b)$难以测量，因此将电压设为可测量变量$(\omega,i_a,i_b)$的

函数更为合适。设计电压 (u_a, u_b)，使得在负载力矩 T_{L} 变化和由于欧姆热而可能引起的转子电阻 R_{r} 变化的情况下，转子转速 ω 跟踪参考信号 $\omega_{\mathrm{r}}(t)$，$\psi_a^2+\psi_b^2$ 调整到期望常值 Ψ_{r}(典型的选择是使电机效率最大化)。

简化模型(电流反馈电机)给出如下：

$$
\begin{aligned}
\frac{d\omega}{dt} &= \frac{n_{\mathrm{p}}M}{JL}(\psi_a i_b - \psi_b i_a) - \frac{T_{\mathrm{L}}}{J} \\
\frac{d\psi_a}{dt} &= -\frac{R_{\mathrm{r}}}{L_{\mathrm{r}}}\psi_a - n_{\mathrm{p}}\omega\psi_b + \frac{R_{\mathrm{r}}}{L_{\mathrm{r}}}Mi_a \\
\frac{d\psi_b}{dt} &= -\frac{R_{\mathrm{r}}}{L_{\mathrm{r}}}\psi_b + n_{\mathrm{p}}\omega\psi_a + \frac{R_{\mathrm{r}}}{L_{\mathrm{r}}}Mi_b
\end{aligned}
$$

其中，(i_a, i_b) 为控制变量。

1.10.2 刚体机器人(Rigid robot)

具有两个旋转关节的2连杆平面机器人，假设其关节和连杆均为刚性的，则可建立模型如下：

$$
\begin{aligned}
&(\theta_1 + 2\theta_3\cos q_2)\ddot{q}_1 + (\theta_2 + \theta_3\cos q_2)\ddot{q}_2 \\
&-2\theta_3\sin q_2\dot{q}_1\dot{q}_2 - \theta_3\sin q_2\dot{q}_2^2 + \theta_5\cos q_1 + \theta_6\cos(q_1+q_2) = u_1 \\
&(\theta_2 + \theta_3\cos q_2)\ddot{q}_1 + \theta_4\ddot{q}_2 + \theta_3\sin q_1\dot{q}_1^2 + \theta_6\cos(q_1+q_2) = u_2 \\
&y_1 = l_1\cos q_1 + l_2\cos(q_1+q_2) \\
&y_2 = l_1\sin q_1 + l_2\sin(q_1+q_2)
\end{aligned}
$$

其中，参数 $\theta_i, 1 \leqslant i \leqslant 6$ 取决于实际物理参数

$$
\begin{aligned}
\theta_1 &= I_1 + m_1 d_1^2 + m_2(d_2^2 + l_1^2) + I_2 \\
\theta_2 &= I_2 + m_2 d_2^2 \\
\theta_3 &= m_2 l_1 d_2 \\
\theta_4 &= m_2 d_2^2 + I_2 \\
\theta_5 &= (m_1 d_1 + m_2 l_1)g \\
\theta_6 &= m_2 d_2 g
\end{aligned}
$$

其中，g 为重力常数，I_i，m_i 和 l_i 分别为连杆 i 的惯量、质量和长度，$d_i = l_i/2$。假设转矩输入 (u_1, u_2) 将被设计为状态 $(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2)$ 的函数，或可测量变量 (q_1, q_2) 的函数，从而使得输出，即终点坐标 (y_1, y_2) 跟踪参考轨迹 $(y_{\mathrm{r}1}(t), y_{\mathrm{r}2}(t))$。参数 θ_i 可能是未知的。更一般地，一个 N 连杆机器人可以建模为

$$
\begin{aligned}
B(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + g(q) &= u \\
y &= q
\end{aligned}
$$

其中，$q \in \mathbb{R}^N$ 为连杆位移向量，$u \in \mathbb{R}^N$ 为施加于每个连杆上的力矩向量，$y \in \mathbb{R}^N$ 为输出向量，$B(q)$ 为 $N \times N$ 惯量矩阵，$C(q,\dot{q})\dot{q}$ 为 Coriolis 力和向心力，$g(q)$ 为重力向量。一般的设计问题为，设计 u 为状态 $(q,\dot{q})$ 的函数或者输出 y 的函数，从而使得输出 y 跟踪期望的参考信号 y_{r}。

1.10.3 刚体(Rigid body)

考虑一个刚体的动态特性，令 (x,y,z) 为绝对坐标系下质心的坐标，(ϕ,θ,ψ) 分别为滚转角、俯仰角和方位角，(u,v,w) 为固连于刚体的相对坐标系下的速度分量。控制输入为同一相对坐标系下的力矩分量 (τ_x,τ_y,τ_z) 和推力 ρ。其运动方程为

$$
\begin{aligned}
&\dot{\phi}=\omega_x+\tan\theta(\omega_y\sin\phi+\omega_z\cos\phi)\\
&\dot{\theta}=\omega_y\cos\phi-\omega_z\sin\phi\\
&\dot{\psi}=\frac{\omega_y\sin\phi+\omega_z\cos\phi}{\cos\theta}\\
&J_x\dot{\omega}_x+(J_z-J_y)\omega_y\omega_z=\tau_x\\
&J_y\dot{\omega}_y+(J_x-J_z)\omega_x\omega_z=\tau_y\\
&J_z\dot{\omega}_z+(J_y-J_x)\omega_x\omega_y=\tau_z\\
&\dot{x}=u\cos\psi\cos\theta+v(\cos\psi\sin\theta\sin\phi-\sin\psi\cos\phi)\\
&\qquad+w(\cos\psi\sin\theta\cos\phi+\sin\psi\sin\phi)\\
&\dot{y}=u\sin\psi\cos\theta+v(\sin\psi\sin\theta\sin\phi+\cos\psi\cos\phi)\\
&\qquad+w(\sin\psi\sin\theta\cos\phi-\cos\psi\sin\phi)\\
&\dot{z}=-u\sin\theta+v\cos\theta\sin\phi+w\cos\theta\cos\phi\\
&\dot{u}=-g\sin\theta+\omega_z v-\omega_y w+\frac{X}{m}+\frac{J\rho}{m}\\
&\dot{v}=g\cos\theta\sin\phi-\omega_z u+\omega_x w+\frac{Y}{m}\\
&\dot{w}=g\cos\theta\cos\phi+\omega_y u-\omega_x v+\frac{Z}{m}
\end{aligned}
$$

其中，(x,y,z) 为 z 轴铅垂向下的绝对坐标系下的质心坐标，(u,v,w) 为固连于刚体的相对坐标系下的速度分量，(ϕ,θ,ψ) 分别为滚转角、俯仰角和方位角，$(\omega_x,\omega_y,\omega_z)$为相对于主惯性轴的角速度分量，$(X+J_\rho,Y,Z)$ 为除重力以外的力向量的分量，m 为质量，(J_x,J_y,J_z) 为相对于主惯性轴的惯性矩。控制问题为：设计$(\tau_x,\tau_y,\tau_z,\rho)$，使得系统跟踪参考轨迹 $(x_{\mathrm{r}}(t),y_{\mathrm{r}}(t),z_{\mathrm{r}}(t),\phi_{\mathrm{r}}(t),\theta_{\mathrm{r}}(t),\psi_{\mathrm{r}}(t))$。

1.10.4 空间飞行器(Spacecraft)

由气体喷射器驱动的空间飞行器的动态模型如下给出：

$$
\begin{aligned}
\dot{\phi}&=\omega_x+\tan\theta(\omega_y\sin\phi+\omega_z\cos\phi)\\
\dot{\theta}&=\omega_y\cos\phi-\omega_z\sin\phi\\
\dot{\psi}&=\frac{\omega_y\sin\phi+\omega_z\cos\phi}{\cos\theta}\\
J\begin{bmatrix}\dot{\omega}_x\\ \dot{\omega}_y\\ \dot{\omega}_z\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix}0&\omega_z&-\omega_y\\ -\omega_z&0&\omega_x\\ \omega_y&-\omega_x&0\end{bmatrix}J\begin{bmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\tau_x\\ \tau_y\\ \tau_z\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

其中，(ϕ,θ,ψ) 为滚转角、俯仰角和偏航角；$(\omega_x,\omega_y,\omega_z)$ 为飞行器在体坐标系下的角速度分量；J 为飞行器的对称正定惯量矩阵；(τ_x,τ_y,τ_z) 为由气体喷射器产生的转矩。控制问题为：设计控制输入 (τ_x,τ_y,τ_z)，使飞行器可以跟踪参考姿态 $(\phi_{\mathrm{r}}(t),\theta_{\mathrm{r}}(t),\psi_{\mathrm{r}}(t))$。惯量矩阵 J 中的项可能是未知的。

1.10.5 倒立摆(inverted pendulum)

运动小车和置于其上的倒立摆所构成的系统的动态方程可给出如下：

$$
\begin{aligned}
(M+m)\ddot{x} + ml\cos\varphi\ddot{\varphi} - ml\sin\varphi\dot{\varphi}^2 &= u_1 \\
ml\cos\varphi\ddot{x} + ml^2\ddot{\varphi} - mgl\sin\varphi &= u_2
\end{aligned}
$$

其中，φ 为倒立摆相对于垂直方向的角位移，x 为小车的位置，l 为摆长，M 为小车的质量，m 为倒立摆末端的点质量，g 为重力常数。输入 u_1 为施加于小车上的力，而输入 u_2 为施加于倒立摆底部的力矩。有如下几个控制问题：

(a) 假设状态$(x, \dot{x}, \varphi, \dot{\varphi})$可测量：

(i) 设计 (u_1, u_2)，使系统跟踪 $x_{\mathrm{r}}(t)$ 和 $\varphi_{\mathrm{r}}(t)$；

(ii) 当 $u_2 = 0$ 时，设计 u_1，使系统跟踪 $\varphi_{\mathrm{r}}(t)$，特别地，$\varphi_{\mathrm{r}}(t) = 0$；

(iii) 当 u_1是常数且未知时，设计 u_2，使系统跟踪 $\varphi_{\mathrm{r}}(t)$，特别地，$\varphi_{\mathrm{r}}(t) = 0$；

(iv) 当参数未知时，解决以上 3 个控制问题。

(b) 假设仅有 φ 可测量：

(i) 当 $u_2 = 0$ 时，设计 u_1，使系统跟踪 $\varphi_{\mathrm{r}}(t)$；

(ii) 当 u_1 为常数且未知时，设计 u_2，使系统跟踪 $\varphi_{\mathrm{r}}(t)$。

1.10.6 球棒系统(Ball and beam)

系统由一个点质量为 m 的球和一个无限长的棒构成，棒绕中点的惯性矩为 J，在中点上施加的力矩为 τ，忽略任何摩擦，则系统模型如下所示：

$$
\begin{aligned}
\dot{r} &= v \\
\dot{v} &= -g\sin\varphi + r\omega^2 \\
\dot{\varphi} &= \omega \\
\dot{\omega} &= \frac{-2mrv\omega}{J+mr^2} - \frac{mgr\cos\varphi}{J+mr^2} + \tau
\end{aligned}
$$

其中，r 表示球相对于原点的位置，φ 表示棒相对于水平线旋转的角度。假设状态 (r, v, φ, ω) 可测量，设计控制 τ，使得 r 跟踪任意常数参考值 r_{r}，包括 $r_{\mathrm{r}} = 0$。

1.10.7 点质量卫星Point mass satellite)

平面内的一个点质量 m 受到逆平方规律力场的作用，其势能为 k/r，径向力和切向力分别为 u_1 和 u_2，其方程为

$$
\begin{aligned}
\dot{r} &= v \\
\dot{v} &= r\omega^2 - \frac{k}{mr^2} + \frac{u_1}{m} \\
\dot{\varphi} &= \omega \\
\dot{\omega} &= -\frac{2v\omega}{r} + \frac{u_2}{mr} \\
y_1 &= r
\end{aligned}
$$

$$y_2 = \omega$$

其中，(r,φ)为该点质量卫星的极坐标，v为径向速度，ω为角速度。假设状态(r,v,φ,ω)均是可测量的，或者仅有变量r和φ是可测量的，则当参数(k,m)已知或未知时，有如下控制问题：

(a) 设计(u_1,u_2)跟踪常数r_{r}和ω_{r}；

(b) 当$u_1=0$时，设计u_2跟踪常数r_{r}。

1.10.8 柔性关节机器人(Robot with flexible joint)

带有一个旋转弹性关节的单连杆机器人手臂，在垂直平面内旋转，其动态方程如下所示：

$$\begin{aligned} J_{\mathrm{l}}\ddot{q}_1+F_{\mathrm{l}}\dot{q}_1+k(q_1-q_2)+Mgl\sin q_1 &= 0\\ J_{\mathrm{m}}\ddot{q}_2+F_{\mathrm{m}}\dot{q}_2-k(q_1-q_2) &= u\\ y &= q_1 \end{aligned}$$

其中，q_1和q_2分别为连杆位移和转子位移。连杆惯量J_{l}，电机转子惯量J_{m}，弹性常数k，连杆质量M，重力常数g，质心l以及粘滞摩擦系数F_{l}和F_{m}均为正的定常参数。控制u为电机输出力矩。控制问题为：

(a) 假设所有状态$(q_1,\dot{q}_1,q_2,\dot{q}_2)$均是可测量的，设计$u$，使$q_1$在下列两种情况下跟踪期望参考$q_{\mathrm{r}1}(t)$：

  (i) 假设参数是已知的；

  (ii) 参数是未知的。

(b) 假设仅有q_1是可测量的，设计u，使q_1在下列两种情况下跟踪期望参考$q_{\mathrm{r}1}(t)$：

  (i) 假设参数是已知的；

  (ii) 所有参数均为未知的。

1.10.9 同步发电机(Synchronous generator)

同步发电机通过纯电感传输线连接到一个电网的其余部分，电网可由无穷大母线表示(即机器按照同步速度ω_{s}旋转，能够吸收或释放任意量的能量)。同步发电机的模型为

$$\begin{aligned} \dot{\delta} &= \omega-\omega_{\mathrm{s}}\\ \dot{\omega} &= c_{\mathrm{m}}-\theta_2\omega\psi_{\mathrm{f}}\sin\delta-\theta_3\omega\psi_A\sin\delta-\theta_4\omega\psi_B\cos\delta+\theta_5\sin\delta\cos\delta\\ \dot{\psi}_{\mathrm{f}} &= v_{\mathrm{f}}-\theta_8\omega\psi_f+\theta_9\omega\psi_A+\theta_{10}\cos\delta\\ \dot{\psi}_A &= \theta_{11}\omega\psi_{\mathrm{f}}-\theta_{12}\omega\psi_A+\theta_{13}\cos\delta\\ \dot{\psi}_B &= -\theta_{14}\omega\psi_B-\theta_{15}\sin\delta \end{aligned}$$

其中，δ为发电机转子相对于无穷大总线的转角，ω为转子角速度，ψ_{f}为场磁通链，ψ_A为直轴减震器绕组磁通链，ψ_B为交轴减震器绕组磁通链，v_{f}为场激磁电压，c_{m}为气轮机提供的

加速度；θ_i 为与机器($\theta_2 > 0$)、传输线电气参数、转子惯量以及无穷大总线常值电压相关的常值参数。令$(\delta_e, \omega_s, \psi_{fe}, \psi_{Ae}, \psi_{Be})$为输入$(c_m, v_{fe})$下的稳定运行条件。传输线中的短路会导致大部分参数突然变化，并且强制系统到运行在一个不同的条件下。控制问题为：设计反馈控制$c_m - c_{me}$，$v_f - v_{fe}$，在短路未被清除或者迅速清除时，将发电机驱动到稳定的运行条件下。忽略减震器绕组的动态特性，降阶模型(θ_i' 是新的参数)为

$$
\begin{aligned}
\dot{\delta} &= \omega - \omega_s \\
\dot{\omega} &= c_m - \theta_2'\omega\psi_f \sin\delta + \theta_3' \sin\delta\cos\delta \\
\dot{\psi}_f &= v_f - \theta_4'\omega\psi_f + \theta_5'\cos\delta
\end{aligned}
$$

输入v_f比输入c_m变化快，因此c_m可视为定常参数($c_m = \theta_1'$)，设计反馈控制v_f，使得在出现短路或者气轮机故障后能够镇定发电机。磁通链(ψ_f, ψ_A, ψ_B)通常是不能测量得到的。

1.10.10 同步电机(Synchronous motor)

正弦磁通分布的永磁同步电机的动态方程为

$$
\begin{aligned}
\frac{d\delta}{dt} &= \omega \\
\frac{d\omega}{dt} &= -\frac{K_m}{J} i_a \sin(p\delta) + \frac{K_m}{J} i_b \cos(p\delta) - \frac{F}{J}\omega - \frac{T_L}{J} \\
\frac{di_a}{dt} &= -\frac{R}{L} i_a + \frac{K_m}{L}\omega \sin(p\delta) + \frac{u_a}{L} \\
\frac{di_b}{dt} &= -\frac{R}{L} i_b - \frac{K_m}{L}\omega \cos(p\delta) + \frac{u_b}{L}
\end{aligned}
$$

其中，δ和ω为转子位置和速度，(i_a, i_b)和(u_a, u_b)为一个固定定子坐标系中的定子电流和电压。电机的参数为定子绕组电阻R和自感L，电机转矩常数K_m，转子惯量J，粘滞摩擦F以及极对数p。除T_L以外，所有参数均为正的。假设$(\delta, \omega, i_a, i_b)$均是可测量的，则控制问题为：在下列两种情况下，设计u_a和u_b，使得δ跟踪一个光滑参考信号$\delta_r(t)$：

(i) 假设参数是已知的；

(ii) 参数是未知的。

1.10.11 未知点质量(Unknown point mass)

考虑一个未知点质量m受到控制输入力u，未知常值干扰力d，未知粘滞阻尼力$k_v\dot{x}$以及未知弹性力$k_p x$的作用。按照牛顿定律，可建立模型为

$$
m\ddot{x} = u + d - k_p x - k_v \dot{x}
$$

其中，m, k_p, k_v是未知的正常数，d是未知的。控制任务为：在下列两种情况下，设计反馈控制算法，使得$x(t)$渐近跟踪参考信号$x_r(t)$：

(a) x和$\dot{x}$是可测量的；

(b) 仅有x是可测量的。

1.10.12 **太阳帆板卫星(Satellite with solar arrays)**

当忽略耦合时，沿每一惯性主轴均带有柔性附件(太阳帆板)的卫星的简化模型为

$$\phi(s) = \frac{1}{Js^2}\sum_{i=1}^{N}\frac{s^2+2\zeta_i\omega_i s+\omega_i^2}{\frac{J-2p_i^2}{J}s^2+2\zeta_i\omega_i s+\omega_i^2}\left[u(s)+\frac{d_{\mathrm{T}}}{s}\right]$$

其中，N 为弹性模态的个数，ω_i 为悬臂频率，ζ_i 为阻尼比，p_i 为耦合因子($J>2p_i^2$)，J 为卫星相对于所考虑轴的惯性矩，ϕ 为旋转角，u 为控制，由执行器(气体喷射或反作用飞轮)给出的力矩产生，d_{T} 为常值干扰力矩。太阳能帆板可能会旋转，因此假设参数 $J, p_i, \omega_i, \zeta_i, d_{\mathrm{T}}$ 是未知的常数，控制问题为：在仅有 ϕ 可测量时，设计反馈镇定控制 u。

1.11 习题

下面的例子在本章中已讨论过，为了便于参考和比较，再次集中给出这些例子。读者可以结合自己的背景知识设计观测器、状态和输出反馈镇定或者跟踪控制，并与本章概括的解法加以比较。所有的习题基于本书所介绍的方法均全局可解。

1.1 参见式(1.2)，试设计如下系统的镇定反馈控制：

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \theta x^3+u\\ y &= x\end{aligned}$$

1.2 参见式(1.4)，试设计如下系统的状态反馈镇定控制：

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2+\theta x_1^2\\ \dot{x}_2 &= -2\theta^2x_1^3-2\theta x_1x_2+u\\ y &= x_1\end{aligned}$$

1.3 参见式(1.6)，试设计如下系统的状态镇定反馈控制：

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2+\theta x_1^2\\ \dot{x}_2 &= u\\ y &= x_1\end{aligned}$$

1.4 参见式(1.20)和式(1.21)，试设计如下系统的自适应状态镇定反馈控制：

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= \theta x_2^3+u\\ y &= x_1\end{aligned}$$

1.5 参见式(1.10)和式(1.11)，试设计如下系统的状态镇定反馈控制：

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= x_3^3+u\\ \dot{x}_3 &= x_1+\theta x_3^3\\ y &= x_1\end{aligned}$$

1.6 参见式(1.16)，试设计如下系统的自适应状态镇定反馈控制：

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + \theta x_1^2\\ \dot{x}_2 &= x_3^3 + u\\ \dot{x}_3 &= x_1 + x_2^3 + x_3^3\\ y &= x_1\end{aligned}$$

1.7 参见式(1.15)，试设计如下系统的状态镇定反馈控制：

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 - x_2^2 u\\ \dot{x}_2 &= u\\ y &= x_1\end{aligned}$$

1.8 试设计如下系统(1.14)的状态镇定反馈控制：

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1^3 + x_2^2 u\\ \dot{x}_2 &= u\\ y &= x_1\end{aligned}$$

使得原点为全局渐近稳定平衡点。

提示：取函数$V = (x_1^2 + x_2^2)/2$。

1.9 参见式(1.18)，试设计如下线性系统的状态镇定反馈控制：

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= x_3 + u\\ \dot{x}_3 &= x_1 + x_2 + x_3\\ y &= x_1\end{aligned}$$

1.10 参见式(1.26)，试设计如下系统的观测器：

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + \theta x_1^2\\ \dot{x}_2 &= x_1 x_2 + x_1^3 u\\ y &= x_1\end{aligned}$$

1.11 参见式(1.28)和式(1.29)，试设计如下系统的自适应观测器：

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + \theta x_1^2\\ \dot{x}_2 &= \theta x_1^2 + u\\ y &= x_1\end{aligned}$$

1.12 参见式(1.23)和式(1.24)，试设计如下系统的输出反馈自适应跟踪控制：

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \theta x + u\\ y &= x\end{aligned}$$

1.13 参见式 (1.31)~式 (1.33) 以及式 (1.35)~式 (1.37)，试设计如下系统的状态镇定反馈控制和输出镇定反馈控制：

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + u + \theta_2 x_1^2 \\ \dot{x}_2 &= \theta_1 x_1^3 + u + \theta_2 x_1^2 \\ y &= x_1\end{aligned}$$

1.14 试设计如下系统 (1.34) 的输出反馈自适应跟踪控制：

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + \theta[\exp(x_1 + 2x_2 + x_3) - 1] \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= u \\ y &= x_1 + 2x_2 + x_3\end{aligned}$$

1.15 参见式 (1.39)，试设计如下系统的输出镇定反馈控制：

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + \theta_1 x_1^{\theta_2} + u \\ \dot{x}_2 &= \theta_1 x_1^{\theta_2} + u \\ y &= x_1\end{aligned}$$

第一部分　状态反馈设计

第 2 章　反馈线性化

本章考虑不含有不确定性的单输入系统，设其在平衡点 x_e 的邻域 $U_{x_e} \subset \mathbb{R}^n$ 内的动态描述为

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \qquad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R} \tag{2.1}$$

其中 x_e 是对应于输入 $u = 0$ 的平衡点，即 $f(x_e) = 0$；假设 f 和 g 为定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的光滑向量场，且$g(x_e) \neq 0$。在2.2节和2.3节中分别给出了两个结论，以阐明系统(2.1)可仅通过非线性坐标变换(见2.3节)，或通过非线性反馈与坐标变换(见2.2节)，变换为线性可控系统的充要条件。这两个问题分别称为状态线性化和反馈线性化。反馈线性化可视为线性系统极点配置的推广，2.1节回顾了线性系统的极点配置。本章还论述了更为普遍的问题，如部分反馈线性化(见2.4节)及其在镇定问题中的应用(见2.5节)，全局反馈线性化(见2.6节)以及在多变量系统中的推广(见2.7节)。2.8节讨论了一些实例。

2.1　线性系统的极点配置

首先，我们回顾线性系统理论中的一个众所周知的结论：极点配置定理，并给出其证明，以便推广到非线性系统(2.1)中。

定理 2.1.1　极点配置(Pole Placement)　*考虑单输入线性系统*

$$\dot{x} = Fx + gu, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R} \tag{2.2}$$

*对于给定的 $\nu \leqslant n/2$，对任意共轭复数 $\gamma_i \pm \mathrm{j}\omega_i, 1 \leqslant i \leqslant \nu$ 和 $n - 2\nu$ 个任意实数 $\lambda_j, 2\nu + 1 \leqslant j \leqslant n$，当且仅当***Kalman可控性条件(Kalman controllability condition)**

$$\mathrm{span}\{g, Fg, \cdots, F^{n-1}g\} = \mathbb{R}^n \tag{2.3}$$

*成立时，存在***线性状态反馈变换(linear state feedback transformation)**，*即线性坐标变换(T 是非奇异的)*

$$z = Tx, \qquad z \in \mathbb{R}^n$$

以及状态反馈($v \in \mathbb{R}$)

$$u = kx + v$$

使得闭环系统

$$\dot{x} = (F + gk)x + gv$$

在 z 坐标系下为

$$\dot{z} = T(F+gk)T^{-1}z + Tgv$$

其中

$$T(F+gk)T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \triangleq A$$

$$Tg = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \triangleq b$$

且

$$\begin{aligned} \det(sI-A) &= s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 \\ &= \prod_{i=1}^{\nu}(s-\gamma_i-\mathrm{j}\omega_i)(s-\gamma_i+\mathrm{j}\omega_i) \prod_{k=2\nu+1}^{n}(s-\lambda_k) \end{aligned}$$

□

证明: 充分性。由可控性假设式 (2.3) 可知，$n\times n$ 维**可控性矩阵(controllability matrix)**

$$R = [g, Fg, \cdots, F^{n-1}g]$$

是非奇异的，因此存在惟一的行向量 h 满足线性方程

$$hR = h[g, Fg, \cdots, F^{n-1}g] = [hg, hFg, \cdots, hF^{n-1}g] = [0, \cdots, 0, 1] \tag{2.4}$$

即

$$h = [0, \cdots, 0, 1]R^{-1} \tag{2.5}$$

令

$$\det(sI-F) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0$$

为矩阵 F 的特征多项式。则由 Cayley-Hamilton 定理可知

$$F^n = -\alpha_{n-1}F^{n-1} - \cdots - \alpha_1 F - \alpha_0 I \tag{2.6}$$

定义 $n\times n$ 维非奇异矩阵 T，

$$T = \begin{bmatrix} h \\ hF \\ \vdots \\ hF^{n-1} \end{bmatrix}$$

矩阵 T 的非奇异性可通过观察如下 $n\times n$ 维 Toeplitz 矩阵的非奇异性证得：

$$
\begin{aligned}
N &= TR=\begin{bmatrix} h \\ hF \\ \vdots \\ hF^{n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} g & Fg & \cdots & F^{n-1}g\end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} hg & hFg & \cdots & hF^{n-1}g \\ hFg & hF^2g & \cdots & hF^ng \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ hF^{n-1}g & hF^ng & \cdots & hF^{2n-2}g\end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.7}
$$

实际上，由定义 (2.4) 可知

$$
\begin{aligned}
hF^ig &= 0, \quad 0\leqslant i\leqslant n-2 \\
hF^{n-1}g &= 1
\end{aligned} \tag{2.8}
$$

由于假设 R 为非奇异的，所以 $T=NR^{-1}$ 也是非奇异的，并且 $z=Tx$ 是线性坐标变换。在 z 坐标系下，线性系统 $\dot{x}=Fx+gu$ 可变为 $\dot{z}=TFT^{-1}z+Tgu$。更准确地说，根据式 (2.8) 可以计算

$$
\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= h\dot{x}=hFx+hgu=hFx=z_2 \\
&\vdots \\
\dot{z}_{n-1} &= hF^{n-2}\dot{x}=hF^{n-1}x+hF^{n-2}gu=hF^{n-1}x=z_n \\
\dot{z}_n &= hF^nx+hF^{n-1}gu=hF^nx+u
\end{aligned} \tag{2.9}
$$

再应用式 (2.6)，有

$$
\begin{aligned}
hF^nx &= -\alpha_{n-1}hF^{n-1}x-\cdots-\alpha_1hFx-\alpha_0hx \\
&= -\alpha_0z_1-\alpha_1z_2-\cdots-\alpha_{n-1}z_n
\end{aligned}
$$

将其代入式 (2.9)，可得

$$
\begin{aligned}
\dot{z} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{n-1}\end{bmatrix} z+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1\end{bmatrix} u \\
&= TFT^{-1}z+Tgu
\end{aligned} \tag{2.10}
$$

即线性系统的**控制器标准型(controller form)**。现在定义状态反馈

$$
\begin{aligned}
u &= [\alpha_0-a_0,\cdots,\alpha_{n-1}-a_{n-1}]z+v \\
&= [\alpha_0-a_0,\cdots,\alpha_{n-1}-a_{n-1}]Tx+v \\
&\triangleq (\alpha-a)^{\mathrm{T}}Tx+v\triangleq kx+v
\end{aligned} \tag{2.11}
$$

并将其代入式(2.10)，可得

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v = Az + bv$$

从而充分性得证。

必要性。用反证法证明。假设条件(2.3)不成立，即

$$\mathrm{rank}[g, Fg, \cdots, F^{n-1}g] = r < n$$

从而可知 $g, Fg, \cdots, F^{r-1}g$ 是线性无关的，且子空间

$$\mathcal{R} = \mathrm{span}\{g, Fg, \cdots, F^{r-1}g\}$$

是 F 不变的，即 $F\mathcal{R} \subset \mathcal{R}$。令 $e_j, r+1 \leqslant j \leqslant n$ 与 $g, \cdots, F^{r-1}g$ 共同形成 $\mathbb{R}^n$ 空间中的一组基。在新基 $\{F^{r-1}g, \cdots, g, e_{r+1}, \cdots, e_n\}$ 下，(F, g) 变为

$$TFT^{-1} = \left[\begin{array}{ccccc|c} -\alpha_{r-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \tilde{F}_{12} \\ -\alpha_1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \\ -\alpha_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \\ \hline & & 0 & & & \tilde{F}_{22} \end{array}\right], \qquad Tg = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \hline 0 \end{array}\right]$$

其中

$$T^{-1} = [F^{r-1}g, \cdots, g, e_{r+1}, \cdots, e_n]$$

对于任意选择的向量 k，状态反馈

$$u = kx + v$$

都不会改变 $\tilde{F}_{22}$ 的特征值，这与假设矛盾。可控性条件(2.3)的必要性也可以通过证明如下事实来证明：对于线性坐标变换和状态反馈，式(2.3)是不变的。其次应考证，对于 (A, b)，式(2.3)成立，且当矩阵 A 选择任意的特征值时，式(2.3)均成立。 □

评注 2.1.1 由线性系统理论可知，对于在任意正的(任意小的)时间内，是否存在分段连续输入，使得系统可以从任意状态 x_1 迁移到任意状态 x_2，式(2.3)给出了其充要条件。条件(2.3)等价于 **Popov-Belevich-Hautus 可控性条件(Popov-Belevich-Hautus controllability condition)**：

$$\mathrm{rank}[sI - F, g] = n, \qquad \forall s \in \mathbb{C}$$

满足这些条件的线性系统 (F, g) 称为是**可控的 (controllable)**。 □

评注 2.1.2 假设 A 是渐近稳定的，在 z 坐标系下，闭环系统的一个 Lyapunov 函数为 $V = z^{\mathrm{T}}Pz$，可通过求解关于 P 的 Lyapunov 矩阵方程

$$A^{\mathrm{T}}P + PA = -I$$

计算，并且其在原来的 x 坐标系下变为 $V = x^{\mathrm{T}}T^{\mathrm{T}}PTx$。 □

评注 2.1.3 充分性部分的证明是构造性的。为将闭环系统极点配置在复平面内的期望位置，必须对系统 (2.2) 施加由式 (2.11) 给出的状态反馈，即

$$u = (\alpha - a)^{\mathrm{T}} T x + v$$

其中，α 和 a 分别是由给定矩阵 F 和闭环矩阵 A(具有期望的特征值)的特征多项式系数构成的向量。 □

若考虑所有可控的 (F, g) 族，且定义**线性状态反馈变换(linear state feedback transformations)** 如下：

$$(F, g) \to (T(F + gk)T^{-1}, Tg)$$

其中 T 为一个 $n \times n$ 维非奇异矩阵，k 是一个行向量，则定理 2.1.1 可以重新叙述如下。

定理 2.1.2 当且仅当(F, g)是可控的，线性系统(F, g)可以由线性状态反馈变换变为 **Brunovsky 控制器标准型：(Brunovsky controller form)**

$$A_{\mathrm{c}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad b_{\mathrm{c}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

即存在一个非奇异阵 T 和一个行向量 k，使得

$$(T(F + gk)T^{-1}, Tg) = (A_{\mathrm{c}}, b_{\mathrm{c}})$$

□

当两个单输入线性系统通过一个线性状态反馈变换而关联时，则称它们是反馈等价的，因此所有系统都可以划分为反馈等价类。由定理 2.1.2 可知，所有单输入线性可控系统都属于由 Brunovsky 控制器标准型 (2.12) 表示的同一个**反馈等价类(feedback equivalence class)**。

若我们只考虑作用在(F, g)上的一个线性坐标变换

$$(F, g) \to (TFT^{-1}, Tg)$$

则在极点配置定理 2.1.1 证明的中间步骤，可以得到一个结论。

定理 2.1.3 满足 $\det(sI - F) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0$ 的任意可控的(F, g)都可以由一个线性坐标变换变为

(a) **控制器标准型(controller form)**

$$T_1 F T_1^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \quad T_1 g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(b) **可控标准型(controllable form)**

$$T_2FT_2^{-1} = \begin{bmatrix} -\alpha_{n-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -\alpha_{n-2} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\alpha_1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad T_2g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

□

证明: (a) 结论 (a) 在定理 2.1.1 证明的前一部分中已得证，见式 (2.10)。

(b) 由于

$$\operatorname{rank}[g, Fg, \cdots, F^{n-1}g] = n$$

我们可以选择 n 个线性无关的向量 $F^{n-1}g, \cdots, g$ 作为一组新的基，在新的坐标 $z = T_2x$ 下，系统可表示为可控标准型，其中

$$T_2 = [F^{n-1}g, \cdots, g]^{-1}$$

由 Cayley-Hamilton 定理有

$$F^n g = -\alpha_{n-1}F^{n-1}g - \cdots - \alpha_1 Fg - \alpha_0 g$$

显然，结论成立。 □

2.2 反馈线性化

现在考虑单输入非线性系统 (2.1)，向量场 $f(x)$ 不限定为线性的，且 $g(x)$ 也不限定为常数，因此其可视为是线性系统 (2.2) 的推广。我们将重点研究在平衡点 x_e ($f(x_e) = 0$)的邻域 U_{x_e} 内的动态。我们假设平衡点为原点，这是因为总可以通过一个坐标变换 $z = x - x_e$ 使 $z = 0$ 为平衡点。然而，若 $f(x_0)$ 和 $g(x_0)$ 是线性相关的，即 $f(x_0) = \gamma g(x_0)$，且 $g(x_0) \neq 0$，则在任意点 x_0 的一个邻域内可做同样的处理，而 x_0 不必是向量场 f 的平衡点。事实上，我们可以定义坐标变换 $z = x - x_0$，使得在新的坐标系下，

$$\dot{z} = f(z + x_0) + g(z + x_0)u \tag{2.13}$$

若令 v 为新的控制变量，定义 $v = u + \gamma$，代入式 (2.13) 得

$$\dot{z} = f(z + x_0) - \gamma g(z + x_0) + g(z + x_0)v \triangleq f_z(z) + g_z(z)v$$

其中 $f_z(0) = 0, g_z(0) \neq 0$。

我们可以将线性状态反馈变换的概念推广如下：

(a) 非线性局部坐标变换

$$z = T(x), \qquad T(0) = 0$$

其中 $T : U_0 \to R^n$ 是在原点的一个邻域 U_0 内的局部微分同胚；

(b) 非线性状态反馈

$$u = k(x) + \beta(x)v \tag{2.14}$$

其中 $k(0)=0, \beta(0)\neq 0, k: U_0\to\mathbb{R}$ 和 $\beta: U_0\to\mathbb{R}$ 均为光滑函数。

以上变换称为**非线性状态反馈变换(nonlinear state feedback transformation)**。

非线性状态反馈 (2.14) 对向量场 f 和 g 的作用是将它们变换为向量场

$$\begin{aligned}\tilde{f} &= f+kg \\ \tilde{g} &= \beta g\end{aligned}$$

非线性状态反馈变换作用于单输入系统 (2.1)，将系统 (2.1) 变换为

$$\dot{z}=\frac{dT}{dx}(f+kg)\circ T^{-1}(z)+\Big(\frac{dT}{dx}\beta g\circ T^{-1}(z)\Big)v$$

一个很自然的问题是，确定包含 Brunovsky 控制器标准型的非线性反馈等价类。正如我们所看到的，它包含所有单输入可控线性系统，我们希望确定属于这一等价类的所有非线性系统 (2.1)。

定义 2.2.1 对于两个系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1)+g_1(x_1)u, \qquad x_1\in\mathbb{R}^n \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_2)+g_2(x_2)v, \qquad x_2\in\mathbb{R}^n\end{aligned}$$

其中 f_1, f_2, g_1 和 g_2 是 $\mathbb{R}^n$ 上的光滑向量场，且$f_1(0)=0, f_2(0)=0, g_1(0)\neq 0, g_2(0)\neq 0$，若存在两个光滑函数$k(x_1)$和$\beta(x_1)$(其中 $k(0)=0, \beta(0)\neq 0$)构成状态反馈

$$u = k(x_1)+\beta(x_1)v$$

以及$\mathbb{R}^n$ 中原点的一个邻域内的局部微分同胚

$$x_2 = T(x_1), \qquad T(0)=0$$

使得闭环系统

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1)+(kg_1)(x_1)+(\beta g_1)(x_1)v$$

在x_2 坐标下为

$$\begin{aligned}\dot{x}_2 &= \frac{dT}{dx_1}(f_1+kg_1)\circ T^{-1}(x_2)+\left(\frac{dT}{dx_1}(\beta g_1)\circ T^{-1}(x_2)\right)v \\ &= f_2(x_2)+g_2(x_2)v\end{aligned}$$

则称这两个系统是局部**反馈等价的(feedback equivalent)**。 □

定义 2.2.2 如果非线性单输入系统 (2.1) 局部反馈等价于具有 Brunovsky 控制器标准型的线性系统

$$\dot{z} = \begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\\0&0&0&\cdots&0\end{bmatrix}z+\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}v=A_cz+b_cv, \quad z\in\mathbb{R}^n \tag{2.15}$$

则称系统 (2.1) 为局部**可状态反馈线性化的(state feedback linearizable)**。 □

我们希望确定那些局部可反馈线性化的非线性系统。下面的定理为界定这类系统提供了充分必要条件。

定理 2.2.1 **反馈线性化(Feedback Linearization)** 单输入系统(2.1)是局部可状态反馈线性化的，当且仅当在原点的一个邻域U_0内满足：

(i) $\mathrm{span}\{g,\cdots,ad_f^{n-1}g\}=\mathbb{R}^n$，

(ii) 分布$\mathcal{G}_{n-2}=\mathrm{span}\{g,\cdots,ad_f^{n-2}g\}$是对合的，且具有常数秩$n-1$，

或者等价地，当且仅当满足：

(iii) 分布

$$\mathcal{G}_i \;=\; \mathrm{span}\{g,\cdots,ad_f^i g\},\qquad 0\leqslant i\leqslant n-1$$

是对合的，且有常数秩$i+1$。

□

证明: 充分性。由假设(i)和假设(ii)，我们可以应用Frobenius定理A.4.3，其保证了存在一个光滑函数$h:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$，在原点的一个邻域内满足

$$\begin{aligned}\langle dh,\,ad_{(-f)}^{n-1}g\rangle &\neq 0\\ \langle dh,\,ad_{(-f)}^{i}g\rangle &= 0,\qquad 0\leqslant i\leqslant n-2\end{aligned}\tag{2.16}$$

且$h(0)=0$。换言之，条件(i)和条件(ii)保证了线性偏微分方程组

$$(\langle dh,g\rangle,\langle dh,ad_{(-f)}g\rangle,\cdots,\langle dh,ad_{(-f)}^{n-1}g\rangle) \;=\; (0,\cdots,0,\gamma(x))\tag{2.17}$$

对于某个光滑函数$\gamma(x),\gamma(0)\neq 0$存在解$h$。定义$n$个函数$h(x),L_fh(x),\cdots,L_f^{n-1}h(x)$,，可以证明

$$z \;=\; (z_1,z_2,\cdots,z_n)=(h(x),L_fh(x),\cdots,L_f^{n-1}h(x))\triangleq T(x)\tag{2.18}$$

是原点的一个邻域内的局部微分同胚，实际上，只需证明其雅可比矩阵dT/dx是非奇异的，再应用逆函数定理A.1.1，定义$n\times n$维矩阵

$$\begin{aligned}N(x) &= \frac{dT}{dx}\left[g\ \cdots\ ad_{(-f)}^{n-1}g\right]\\ &= \begin{bmatrix}\langle dh,g\rangle & \cdots & \langle dh,ad_{(-f)}^{n-1}g\rangle\\ \langle d(L_fh),g\rangle & \cdots & \langle d(L_fh),ad_{(-f)}^{n-1}g\rangle\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \langle d(L_f^{n-1}h),g\rangle & \cdots & \langle d(L_f^{n-1}h),ad_{(-f)}^{n-1}g\rangle\end{bmatrix}\end{aligned}$$

由式(2.17)，矩阵$N(x)$的第一行为$[0,\cdots,0,\gamma(x)]$。根据Leibniz公式和式(2.17)，有

$$\begin{aligned}\langle d(L_fh),g\rangle &= L_f\langle dh,g\rangle+\langle dh,ad_{(-f)}g\rangle=0\\ \langle d(L_fh),ad_{(-f)}g\rangle &= L_f\langle dh,ad_{(-f)}g\rangle+\langle dh,ad_{(-f)}^2g\rangle=0\\ &\ \ \vdots\\ \langle d(L_fh),ad_{(-f)}^{n-2}g\rangle &= L_f\langle dh,ad_{(-f)}^{n-2}g\rangle+\langle dh,ad_{(-f)}^{n-1}g\rangle=\gamma(x)\end{aligned}$$

因此，矩阵$N(x)$的第二行为$[0,\cdots,0,\gamma(x),\langle d(L_fh),ad_{(-f)}^{n-1}g\rangle]$。反复应用Leibniz公式，可计

算 $N(x)$ 的其余行，得

$$N(x) = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \gamma(x) \\ 0 & \cdots & \gamma(x) & \langle d(L_f h), ad_{(-f)}^{n-1} g\rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \gamma(x) & \cdots & \langle d(L_f^{n-1} h), ad_{(-f)}^{n-2} g\rangle & \langle d(L_f^{n-1} h), ad_{(-f)}^{n-1} g\rangle \end{bmatrix}$$

即 $N(x)$ 在原点的一个邻域内是非奇异的。这一事实结合假设 (i) 说明 dT/dx 是非奇异的：由逆函数定理 A.1.1 可得，$z = T(x)$ 是一个局部微分同胚。系统

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

在 z 坐标系下表示为

$$\dot{z}_i = L_f^i h(x) + L_g L_f^{i-1} h(x) u, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n \tag{2.19}$$

由式(2.17)，应用 Leibniz 公式

$$\begin{aligned} L_g L_f^i h(x) &= 0, \qquad 0 \leqslant i \leqslant n-2 \\ L_g L_f^{n-1} h(x) &= \gamma(x) \end{aligned}$$

式 (2.19)变为

$$\begin{aligned} \dot{z}_i &= z_{i+1}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n-1 \\ \dot{z}_n &= L_f^n h(x) + L_g L_f^{n-1} h(x) u \end{aligned} \tag{2.20}$$

定义状态反馈

$$\begin{aligned} u &= -\frac{L_f^n h(x)}{L_g L_f^{n-1} h(x)} + \frac{1}{L_g L_f^{n-1} h(x)} v \\ &\triangleq k(x) + \beta(x) v \end{aligned} \tag{2.21}$$

注意，由 $f(0) = 0$ 可知 $k(0) = 0$，且由 $L_g L_f^{n-1} h(0) = \gamma(0) \neq 0$ 可知 $\beta(0) \neq 0$。将式 (2.21) 代入式 (2.20) 可得 Brunovsky 控制器标准型 (2.15)。条件(i)说明在 U_0 内有 $\operatorname{rank} \mathcal{G}_i = i+1, \quad 0 \leqslant i \leqslant n-1$，考察矩阵 $N(x)$ 可知

$$\begin{aligned} dh &\in \mathcal{G}_{n-2}^{\perp} \\ dh,\, d(L_f h) &\in \mathcal{G}_{n-3}^{\perp} \\ &\vdots \\ dh, \cdots, d(L_f^i h) &\in \mathcal{G}_{n-i-2}^{\perp} \\ &\vdots \\ dh, \cdots, d(L_f^{n-2} h) &\in \mathcal{G}_0^{\perp} \end{aligned}$$

且 $dh, \cdots, d(L_f^i h)$，$0 \leqslant i \leqslant n-2$ 是线性无关的。因此，由 Frobenius 定理 A.4.3 可知分布 $\mathcal{G}_i$，$i = 0, \cdots, n-2$ 是对合的。由假设 (i) 可知，$\mathcal{G}_{n-1}$ 是对合的，这说明由条件 (i) 和条件 (ii) 可推出条件 (iii)。另一方面，由条件 (iii) 也可以推出条件 (i) 和条件 (ii)，因此条件 (i) 和条件 (ii) 等价于条件 (iii)。

必要性。由假设可知，存在一个非线性状态反馈变换将系统 (2.1) 变为系统 (2.15)，反之亦

然。考虑具有Brunovsky控制器标准型的线性系统(2.15)，可计算得分布

$$\mathcal{G}_i = \text{span}\{b_c, \cdots, A_c^i b_c\}, \qquad 0 \leqslant i \leqslant n-1$$

是对合的，且其维数为 $i+1$。现在证明在非线性状态反馈变换下，它们是不变的。在状态空间坐标变换下，分布 $\mathcal{G}_i$ 是不变的，因此只需考虑非线性状态反馈变换对系统 (f,g) 的作用。

$$(f,g) \quad \rightarrow \quad (f+kg, \beta g) = (\tilde{f}, \tilde{g})$$

显然

$$\mathcal{G}_0 = \text{span}\{g\} = \text{span}\{\beta g\} = \text{span}\{\tilde{g}\} = \tilde{\mathcal{G}}_0$$

下面采用归纳法进行推导。假设

$$\mathcal{G}_i = \text{span}\{g, \cdots, ad_f^i g\} = \text{span}\{\tilde{g}, \cdots, ad_{\tilde{f}}^i \tilde{g}\} = \tilde{\mathcal{G}}_i$$

现在来推导

$$\mathcal{G}_{i+1} = \tilde{\mathcal{G}}_{i+1}$$

由定义

$$\mathcal{G}_i = \text{span}\{\mathcal{G}_{i-1}, ad_f^i g\} = \text{span}\{\mathcal{G}_{i-1}, ad_f \mathcal{G}_{i-1}\}$$

得

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{i+1} &= \text{span}\{\mathcal{G}_i, ad_f \mathcal{G}_i\} \\
\tilde{\mathcal{G}}_{i+1} &= \text{span}\{\tilde{\mathcal{G}}_i, ad_{\tilde{f}} \tilde{\mathcal{G}}_i\} \\
&= \text{span}\{\mathcal{G}_i, ad_{f+kg} \mathcal{G}_i\} \\
&= \text{span}\{\mathcal{G}_i, k ad_g X - (L_X k) g + ad_f X : \forall X \in \mathcal{G}_i\}
\end{aligned}$$

由于 $\mathcal{G}_i$ 是对合的，特别地，有 $ad_g \mathcal{G}_i \subset \mathcal{G}_i$，从而可得

$$\tilde{\mathcal{G}}_{i+1} = \text{span}\{\mathcal{G}_i, ad_f \mathcal{G}_i\} = \mathcal{G}_{i+1}$$

因此对于任意可反馈线性化系统(2.15)，条件(iii)成立。 □

评注 2.2.1 在 z 坐标系下，向量场 g 为

$$g = L_g L_f^{n-1} h \frac{\partial}{\partial z_n}$$

因此

$$\mathcal{G}_0 = \text{span}\left\{(L_g L_f^{n-1} h) \frac{\partial}{\partial z_n}\right\} = \text{span}\left\{\frac{\partial}{\partial z_n}\right\}$$

因为在 z 坐标系下，向量场 f 为

$$f = z_2 \frac{\partial}{\partial z_1} + \cdots + z_n \frac{\partial}{\partial z_{n-1}} + L_f^n h \frac{\partial}{\partial z_n}$$

可计算得

$$\begin{aligned}
ad_f g &= \left[\left(z_2 \frac{\partial}{\partial z_1} + \cdots + z_n \frac{\partial}{\partial z_{n-1}} + L_f^n h \frac{\partial}{\partial z_n}\right), L_g L_f^{n-1} h \frac{\partial}{\partial z_n}\right] \\
&= -L_g L_f^{n-1} h \frac{\partial}{\partial z_{n-1}} - L_g L_f^{n-1} h \left(\frac{\partial}{\partial z_n} L_f^n h\right) \frac{\partial}{\partial z_n}
\end{aligned}$$

$$+\sum_{i=1}^{n-1} z_{i+1}\left(\frac{\partial}{\partial z_i}L_gL_f^{n-1}h\right)\frac{\partial}{\partial z_n}+L_f^nh\left(\frac{\partial}{\partial z_n}L_gL_f^{n-1}h\right)\frac{\partial}{\partial z_n}$$

由于$L_gL_f^{n-1}h\neq 0$，有

$$\mathcal{G}_1 = \mathrm{span}\left\{\frac{\partial}{\partial z_n},\frac{\partial}{\partial z_{n-1}}\right\}$$

同理，可计算得

$$\mathcal{G}_i = \mathrm{span}\left\{\frac{\partial}{\partial z_n},\cdots,\frac{\partial}{\partial z_{n-i}}\right\},\qquad 0\leqslant i\leqslant n-1$$

□

评注 2.2.2 由定理2.1.2所表述的极点配置定理2.1.1是反馈线性化定理2.2.1的推论。实际上，对于线性系统(2.2)，条件(ii)总是满足的，而条件(i)则变为Kalman可控性条件

$$\mathrm{rank}[g,Fg,\cdots,F^{n-1}g] = n$$

□

评注 2.2.3 注意，极点配置定理和反馈线性化定理的充分性部分的证明在概念上遵循同样的步骤。可控性假设(2.3)是求解线性方程(2.4)的充分条件，而条件(i)和条件(ii)是求解线性偏微分方程(2.17)的充分条件。这正是两个证明的主要不同之处，但只是技术处理上的不同。□

评注 2.2.4 由于式(2.16)的解不惟一，因此一个可反馈线性化系统的线性化变换也不惟一。□

下面给出反馈线性化定理(2.2.1)的三个推论。

推论 2.2.1 二维非线性系统(2.1)

$$\dot{x} = f(x)+g(x)u,\qquad x\in\mathbb{R}^2$$

在原点的一个邻域内是局部可状态反馈线性化的，当且仅当其关于原点的**线性近似(linear approximation)**

$$\dot{x} = \frac{df}{dx}(0)x+g(0)u\triangleq Fx+gu$$

是可控的。 □

证明: 充分性。因为$g(0)\neq 0$，g为光滑向量场，因此在原点的一个邻域内g不为零，且$\mathcal{G}_0=\mathrm{span}\{g\}$是秩为1的对合分布。又由于

$$ad_fg = \frac{dg}{dx}f-\frac{df}{dx}g \tag{2.22}$$

且$f(0)=0$，在原点处有

$$ad_fg(0) = -\frac{df(0)}{dx}g(0)=-Fg \tag{2.23}$$

由线性近似的可控性假设，$g(0)$和$ad_fg(0)$是线性无关的。由于g和ad_fg是光滑向量场，它们在原点的一个邻域U_0内也是线性无关的，即

$$\mathrm{rank}\{g,ad_fg\} = 2,\qquad \forall x\in U_0 \tag{2.24}$$

因此可应用反馈线性化定理2.2.1。

必要性。由反馈线性化定理2.2.1推出式(2.24)，再由式(2.22)和式(2.23)推出g和Fg是线性无关的。 □

可以举例说明，对于系统(2.1)，当$n \geqslant 3$时，关于原点线性近似的可控性已不再是局部可状态反馈线性化系统的充分条件，而只是必要条件，这一点很容易验证。

推论 2.2.2 若非线性系统(2.1)是局部可状态反馈线性化的，则其关于原点的线性近似

$$\dot{x} = \frac{df}{dx}(0)(x) + g(0)u \triangleq Fx + gu \tag{2.25}$$

是可控的，也即$\mathrm{rank}[g, Fg, \cdots, F^{n-1}g] = n$。 □

证明: 此证明留给读者作为练习。 □

推论 2.2.3 三角型(**triangular form**)系统

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= x_{i+1} + \phi_i(x_1, \cdots, x_i), \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1 \\ \dot{x}_n &= \phi_n(x_1, \cdots, x_n) + u \end{aligned} \tag{2.26}$$

是局部可反馈线性化的，其中$\phi_1, \cdots, \phi_n$是光滑函数，满足$\phi_i(0) = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant n$。 □

证明: 一种证明方法是计算分布$\mathcal{G}_{n-1}$和$\mathcal{G}_{n-2}$，并验证定理2.2.1的条件(i)和条件(ii)是否成立。另一种方法是直接计算如下反馈线性化变换:

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 \\ z_2 &= x_2 + \phi_1(x_1) \\ z_3 &= x_3 + \phi_2(x_1, x_2) + \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1}(x_2 + \phi_1(x_1)) \triangleq x_3 + \bar{\phi}_2(x_1, x_2) \\ z_{i+1} &= x_{i+1} + \phi_i(x_1, \cdots, x_i) + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \bar{\phi}_{i-1}}{\partial x_j}(x_{j+1} + \phi_j(x_1, \cdots, x_j)) \\ &\triangleq x_{i+1} + \bar{\phi}_i(x_1, \cdots, x_i), \qquad 3 \leqslant i \leqslant n-1 \\ v &= \phi_n(x_1, \cdots, x_n) + u + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \bar{\phi}_{n-1}}{\partial x_j}(x_{j+1} + \phi_j(x_1, \cdots, x_j)) \end{aligned}$$

□

评注 2.2.5 更一般地，考虑系统

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \phi_i(x_1, \cdots, x_{i+1}), \qquad 1 \leqslant i \leqslant n-1 \\ \dot{x}_n &= \phi_n(x_1, \cdots, x_n) + \beta(x_1, \cdots, x_n)u \end{aligned}$$

其中，ϕ_i，$1 \leqslant i \leqslant n$和$\beta$为光滑函数，满足$\phi_i(0) = 0$，$1 \leqslant i \leqslant n$，$\partial\phi_i/\partial x_{i+1}(0) \neq 0$，$1 \leqslant i \leqslant n-1$，且$\beta(0) \neq 0$。此系统称为**三角型**(**triangular form**)系统，并且为局部可反馈线性化的。 □

评注 2.2.6 当状态方程中控制量u为非线性的时，也即

$$\dot{x} = f(x, u), \qquad f(0, u) = 0, \qquad \forall u \in \mathbb{R}$$

对于下面的**增广系统(extended system)**，可提出反馈线性化问题：

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x,u)\\ \dot{u} &= w\end{aligned}\tag{2.27}$$

其中 w 为新的控制量，(x,u) 为广义状态。若反馈线性化定理的条件适用于增广系统(2.27)，则相应的控制

$$\dot{u} = \alpha(x,u)+\beta(x,u)v, \qquad u(0)=u_0$$

是原系统的一个**动态状态反馈线性化控制(dynamic state feedback linearizing control)**。 □

例 2.2.1 考虑系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2^3\\ \dot{x}_2 &= u\end{aligned}$$

由推论2.2.1知，它在原点的任意邻域内都不是可反馈线性化的，这是因为关于原点的线性近似是不可控的。 □

例 2.2.2 考虑系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2+x_1^2\\ \dot{x}_2 &= u\end{aligned}\tag{2.28}$$

注意，线性状态反馈 $u=-k_1x_1-k_2x_2$ 不能使其原点全局渐近稳定。由推论2.2.1或推论2.2.3可知，该系统是可反馈线性化的。记

$$f = (x_2+x_1^2)\frac{\partial}{\partial x_1}, \qquad g=\frac{\partial}{\partial x_2}$$

计算

$$ad_f g = -\frac{\partial}{\partial x_1}$$

使得

$$\mathcal{G}_1 = \mathrm{span}\{g, ad_f g\}=\mathbb{R}^2, \qquad \forall x\in\mathbb{R}^2$$

参见式(2.16)，通过确定一个函数 h，使得 $h(0)=0$ 以及

$$\begin{aligned}\langle dh, g\rangle &= 0\\ \langle dh, ad_{(-f)}g\rangle &\neq 0\end{aligned}$$

可计算线性化变换。对本例来讲，关于 x_1 的任意局部可逆函数 $h(x_1)$，均满足

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_2}h(x_1) &= 0\\ \frac{\partial}{\partial x_1}h(x_1) &\neq 0, \quad \forall x\in U_0\end{aligned}$$

参见式(2.18)和式(2.21)，若选择 $h_1(x_1)=x_1$，则反馈线性化变换为

$$\begin{aligned}z_1 &= h_1(x_1)=x_1\\ z_2 &= L_f h_1(x_1)=x_2+x_1^2\end{aligned}$$

$$u = -2x_1x_2 - 2x_1^3 + v$$

而若取 $h_2(x_1) = x_1 + x_1^3$，则反馈线性化变换为

$$\begin{aligned} z_1 &= h_2(x_1) = x_1 + x_1^3 \\ z_2 &= L_f h_2(x_1) = x_2 + x_1^2 + 3x_1^2 x_2 + 3x_1^4 \\ u &= \frac{-2x_1x_2 - 2x_1^3 - 6x_1x_2^2 - 18x_1^3x_2 - 12x_1^5}{1+3x_1^2} + \frac{1}{1+3x_1^2}v \end{aligned}$$

这说明反馈线性化变换并不惟一。但是，在实际情况下，变换的选择将影响所得的线性化状态反馈律的复杂程度。 □

例 2.2.3 考虑系统

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + \alpha(x_2)u \\ \dot{x}_2 &= u \end{aligned} \tag{2.29}$$

其中 α 是光滑函数。记 $f = x_2\partial/\partial x_1$，$g = \alpha(x_2)\partial/\partial x_1 + \partial/\partial x_2$。计算可得 $ad_f g = -\partial/\partial x_1$，因此在$\mathbb{R}^2$中 $\operatorname{rank}\mathcal{G}_1 = 2$。此系统是局部可反馈线性化的。现在寻找一个函数 $h(x_1, x_2)$，使得

$$\alpha(x_2)\frac{\partial h}{\partial x_1} + \frac{\partial h}{\partial x_2} = 0, \qquad \frac{\partial h}{\partial x_1} \neq 0 \tag{2.30}$$

显然，函数

$$h(x_1, x_2) = x_1 - \int_0^{x_2} \alpha(\xi)d\xi$$

满足偏微分方程 (2.30)。在全局坐标

$$\begin{aligned} z_1 &= h(x_1, x_2) = x_1 - \int_0^{x_2} \alpha(\xi)d\xi \\ z_2 &= L_f h(x_1, x_2) = x_2 \end{aligned}$$

下，系统变为

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= u \end{aligned}$$

注意，只需要坐标变换而不需反馈即可使系统为线性且可控的。 □

例 2.2.4 考虑系统(α, β_1, β_2为光滑函数)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + \alpha(x_2)\beta_1(x_1, x_2) + \alpha(x_2)\beta_2(x_1, x_2)u \\ \dot{x}_2 &= \beta_1(x_1, x_2) + \beta_2(x_1, x_2)u \end{aligned} \tag{2.31}$$

其中 $\beta_2 \neq 0$，$\forall x \in \mathbb{R}^2$。此系统与例 2.2.3 中 $\beta_1 = 0$和$\beta_2 = 1$ 是一致的。该系统通过如下微分同胚

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 - \int_0^{x_2} \alpha(\xi)d\xi \\ z_2 &= x_2 \end{aligned}$$

和状态反馈

$$u = \frac{1}{\beta_2(x_1, x_2)}(-\beta_1(x_1, x_2) + v)$$

可反馈线性化。 □

例 2.2.5 考虑系统

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 + \frac{1}{3}x_3^3 \\
\dot{x}_2 &= x_3 \\
\dot{x}_3 &= u
\end{aligned}
$$

关于原点的线性近似是可控的，但是正如我们将要看到的，此系统不是可反馈线性化的。记

$$
\begin{aligned}
f &= \left(x_2 + \frac{1}{3}x_3^3\right)\frac{\partial}{\partial x_1} + x_3\frac{\partial}{\partial x_2} \\
g &= \frac{\partial}{\partial x_3}
\end{aligned}
$$

计算可得

$$
\begin{aligned}
ad_f g &= -x_3^2\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2} \\
[g, ad_f g] &= -2x_3\frac{\partial}{\partial x_1} \\
ad_f^2 g &= \frac{\partial}{\partial x_1}
\end{aligned}
$$

在整个 $\mathbb{R}^3$ 中，有 $\mathrm{span}\{g, ad_f g, ad_f^2 g\} = \mathbb{R}^3$，因此可以满足定理 2.2.1 的条件 (i)。但是，由于 $[g, ad_f g] \notin \mathrm{span}\{g, ad_f g\}$，分布 $\mathcal{G}_1 = \mathrm{span}\{g, ad_f g\}$ 不是对合的，从而不满足定理 2.2.1 的条件 (ii)，故此系统不是可状态反馈线性化的。该例说明关于原点线性近似的可控性并不是可反馈线性化的充分条件。 □

例 2.2.6 考虑系统

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 + x_1x_3 \\
\dot{x}_2 &= x_3 \\
\dot{x}_3 &= u
\end{aligned}
$$

由推论 2.2.3 或评注 2.2.5 可知，它不是三角型系统。记

$$
\begin{aligned}
f &= (x_2 + x_1x_3)\frac{\partial}{\partial x_1} + x_3\frac{\partial}{\partial x_2} \\
g &= \frac{\partial}{\partial x_3}
\end{aligned}
$$

计算可得

$$
\begin{aligned}
ad_f g &= -x_1\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2} \\
ad_f^2 g &= x_1x_3\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_1} - (x_2 + x_1x_3)\frac{\partial}{\partial x_1} = (-x_2 + 1)\frac{\partial}{\partial x_1}
\end{aligned}
$$

且有

$$
\mathrm{rank}\{g, ad_f g, ad_f^2 g\} = 3, \qquad \forall x \in \{x \in \mathbb{R}^3 : x_2 \neq 1\}
$$

另外，因为 $[g, ad_f g] = 0$，分布

$$
\mathcal{G}_1 = \mathrm{span}\{g, ad_f g\}
$$

是对合的，在$\mathbb{R}^3$上秩为常数2，因此可以满足定理2.2.1的条件(i)和条件(ii)，该系统是可状态反馈线性化的。为计算线性化微分同胚和状态反馈，需要确定一个函数h，满足$h(0)=0$，且在U_0中有

$$\begin{aligned}\langle dh, g\rangle &= 0\\ \langle dh, ad_f g\rangle &= 0\\ \langle dh, ad_f^2 g\rangle &\neq 0\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial x_3} &= 0\\ -x_1\frac{\partial}{\partial x_1}h-\frac{\partial}{\partial x_2}h &= 0\\ (-x_2+1)\frac{\partial h}{\partial x_1} &\neq 0\end{aligned}\tag{2.32}$$

函数$h(x)=x_1\mathrm{e}^{-x_2}$满足偏微分方程组(2.32)。给出如下微分同胚：

$$z = (z_1,z_2,z_3)=(h(x),L_fh(x),L_f^2h(x))=T(x)$$

其中

$$\begin{aligned}L_fh &= (x_2+x_1x_3)\mathrm{e}^{-x_2}-x_3x_1\mathrm{e}^{-x_2}=x_2\mathrm{e}^{-x_2}\\ L_f^2h &= x_3(\mathrm{e}^{-x_2}-x_2\mathrm{e}^{-x_2})\end{aligned}$$

线性化状态反馈为

$$u = -\frac{L_f^3h}{L_gL_f^2h}+\frac{1}{L_gL_f^2h}v$$

其中

$$\begin{aligned}L_f^3h &= x_3^2(-\mathrm{e}^{-x_2}-\mathrm{e}^{-x_2}+x_2\mathrm{e}^{-x_2})=x_3^2(-2+x_2)\mathrm{e}^{-x_2}\\ L_gL_f^2h &= \mathrm{e}^{-x_2}(1-x_2)\end{aligned}$$

此例说明可反馈线性化系统不一定要求是三角型系统(2.26)。 □

例 2.2.7 考虑系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2+x_3^3\\ \dot{x}_2 &= x_3-3x_3^2x_4\\ \dot{x}_3 &= x_4\\ \dot{x}_4 &= u\end{aligned}$$

其不是三角型系统(2.26)。可以通过全局坐标变换

$$\begin{aligned}z_1 &= x_1\\ z_2 &= x_2+x_3^3\\ z_3 &= x_3\\ z_4 &= x_4\end{aligned}$$

线性化，而不需要状态反馈。 □

2.3 坐标变换线性化

如在例2.2.3和例2.2.7中所见，有些非线性系统仅用非线性坐标变换即可变换为线性可控系统。本节将给出这类系统的充要条件，以及构造线性化坐标的具体方法。

定义 2.3.1 对于两个系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1) + g_1(x_1)u, \qquad x_1 \in \mathbb{R}^n \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_2) + g_2(x_2)u, \qquad x_2 \in \mathbb{R}^n\end{aligned}$$

其中f_1, f_2, g_1, g_2是R^n中的光滑向量场，$f_1(0) = 0, f_2(0) = 0, g_1(0) \neq 0, g_2(0) \neq 0$，若在$R^n$中原点的一个邻域内存在局部微分同胚

$$x_2 = T(x_1), \qquad T(0) = 0$$

满足

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dx_1} f_1 \circ T^{-1}(x_2) &= f_2(x_2) \\ \frac{dT}{dx_1} g_1 \circ T^{-1}(x_2) &= g_2(x_2)\end{aligned}$$

则称这两个系统是局部**状态等价的(state equivalent)**。 □

定义 2.3.2 若非线性单输入系统(2.1)局部状态等价于一个线性可控系统，即

$$\dot{z} = Az + bu, \qquad z \in \mathbb{R}^n$$

其中(A, b)为可控对，则称该系统是局部**可状态线性化的(state linearizable)**。 □

我们的目的是刻画所有局部可状态线性化的系统。考虑非线性局部坐标变换

$$z = T(x), \qquad T(0) = 0 \tag{2.33}$$

我们希望确定那些非线性单输入系统(2.1)，这些系统可以通过局部坐标变换(2.33)变换为线性可控系统，也即

$$\begin{aligned}\dot{z} &= \frac{dT}{dx} f \circ T^{-1}(z) + \left(\frac{dT}{dx} g \circ T^{-1}(z)\right) u \\ &= Az + bu\end{aligned}$$

其中$\mathrm{rank}[b, Ab, \cdots, A^{n-1}b] = n$。由定理2.1.3可知，任意线性可控系统都可以变换为一个可控标准型，因此取(A, b)为可控标准型。

定理 2.3.1 **状态线性化(State Linearization)** 对于非线性单输入系统(2.1)，当且仅当在原点的一个邻域U_0内满足：

(i) $\mathrm{span}\{g, ad_f g, \cdots, ad_f^{n-1} g\} = \mathbb{R}^n$;

(ii) $[ad_f^i g, ad_f^j g] = 0,\ 0 \leqslant i, j \leqslant n$，或等价地表示为$[g, ad_f^i g] = 0,\ 0 \leqslant i \leqslant 2n-1$

则该系统局部可状态线性化，即在原点的一个邻域内由微分同胚

$$z = T(x), \qquad T(0)=0, \qquad z\in\mathbb{R}^n$$

可变换为一个线性可控系统

$$\begin{aligned}\dot{z} &= \frac{dT}{dx}f\circ T^{-1}(z)+\left(\frac{dT}{dx}g\circ T^{-1}(z)\right)u\\ &= \begin{bmatrix}-\alpha_{n-1} & 1 & 0 & \cdots & 0\\ -\alpha_{n-2} & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -\alpha_1 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ -\alpha_0 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}z+\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}u\end{aligned} \tag{2.34}$$

□

证明: 充分性。由假设(ii)知，分布

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_0 &= \text{span}\{ad_f g,\cdots,ad_f^{n-1}g\}\\ \mathcal{D}_i &= \text{span}\{g,\cdots,ad_f^{i-1}g,ad_f^{i+1}g,\cdots,ad_f^{n-1}g\}, \qquad 1\leqslant i\leqslant n-2\\ \mathcal{D}_{n-1} &= \text{span}\{g,\cdots,ad_f^{n-2}g\}\end{aligned}$$

是对合的，且由条件(i)可知此分布的秩为常数$n-1$，因此由Frobenius定理A.4.3得，存在n个光滑函数$\bar{\phi}_i(x)$, $\bar{\phi}_i(0)=0$, $1\leqslant i\leqslant n$，满足

$$\begin{aligned}\langle d\bar{\phi}_i,\mathcal{D}_{n-i}\rangle &= 0\\ \langle d\bar{\phi}_i,ad_{(-f)}^{n-i}g\rangle &= \gamma_i\neq 0, \qquad 1\leqslant i\leqslant n\end{aligned} \tag{2.35}$$

由假设(i)，其满足

$$\text{rank}\{d\bar{\phi}_i,\cdots,d\bar{\phi}_n\} = n$$

由逆函数定理A.1.1，可得

$$\bar{z} = (\bar{z}_1,\cdots,\bar{z}_n)=(\bar{\phi}_1(x),\cdots,\bar{\phi}_n(x))=\bar{\phi}(x)$$

是一个局部微分同胚。在$\bar{z}$坐标系下有

$$\begin{aligned}g &= \gamma_n\frac{\partial}{\partial\bar{z}_n}\\ ad_{(-f)}g &= \gamma_{n-1}\frac{\partial}{\partial\bar{z}_{n-1}}\\ &\vdots\\ ad_{(-f)}^{n-1}g &= \gamma_1\frac{\partial}{\partial\bar{z}_1}\end{aligned}$$

由假设(ii)，可得

$$\gamma_i = \gamma_i(\bar{z}_i), \qquad i\leqslant 1\leqslant n$$

可定义

$$\delta_i(\bar{z}_i) = \int_0^{\bar{z}_i}\frac{1}{\gamma_i(\xi)}d\xi$$

和 n 个函数

$$\phi_i = \delta_i \circ \bar{\phi}_i, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n \tag{2.36}$$

满足

$$\begin{aligned} \langle d\phi_i, \mathcal{D}_{n-i} \rangle &= 0 \\ \langle d\phi_i, ad_{(-f)}^{n-i} g \rangle &= 1, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n \end{aligned}$$

且

$$z = (z_1, \cdots, z_n) = (\phi_1(x), \cdots, \phi_n(x)) = \phi(x)$$

是一个局部微分同胚。在 z 坐标系下，向量场 $g, \cdots, ad_{(-f)}^{n-1} g$ 是同时局部平整的，也即

$$\begin{aligned} g &= \frac{\partial}{\partial z_n} \\ ad_{(-f)} g &= \frac{\partial}{\partial z_{n-1}} \\ &\vdots \\ ad_{(-f)}^{n-1} g &= \frac{\partial}{\partial z_1} \end{aligned}$$

也可使用另一种方法求得平整局部坐标系，即从

$$\begin{bmatrix} d\phi_1 \\ \vdots \\ d\phi_n \end{bmatrix} \left[ad_{(-f)}^{n-1} g, \cdots, g \right] = I_{n \times n} \tag{2.37}$$

中计算正则微分I型 $d\phi_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$，然后求积分

$$\phi_i = \int d\phi_i, \qquad \phi_i(0) = 0$$

在此，希望在 z 坐标系下确定向量场 f 的分量，也即光滑函数 $(f_1, \cdots, f_n)$ 满足

$$f = f_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \cdots + f_n \frac{\partial}{\partial z_n}$$

由 $g = \partial/\partial z_n$ 以及

$$ad_{(-f)} g = \frac{\partial}{\partial z_{n-1}} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial z_n} f_i \right) \frac{\partial}{\partial z_i}$$

可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z_n} f_i &= 0, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n, i \neq n-1 \\ \frac{\partial}{\partial z_n} f_{n-1} &= 1 \end{aligned}$$

再由

$$ad_{(-f)}^2 g = \frac{\partial}{\partial z_{n-2}} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial z_{n-1}} f_i \right) \frac{\partial}{\partial z_i}$$

可得

$$\frac{\partial}{\partial z_{n-1}} f_i = 0, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n, i \neq n-2$$

$$\frac{\partial}{\partial z_{n-1}} f_{n-2} = 1$$

且一般地，由

$$ad_{(-f)}^{j} g = \frac{\partial}{\partial z_{n-j}} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial z_{n-j+1}} f_i \right) \frac{\partial}{\partial z_i}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n-1 \tag{2.38}$$

可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z_{n-j+1}} f_i &= 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant n, i \neq n-j, 1 \leqslant j \leqslant n-1 \\ \frac{\partial}{\partial z_{n-j+1}} f_{n-j} &= 1, \qquad 1 \leqslant j \leqslant n-1 \end{aligned}$$

因此可得

$$\begin{aligned} f_i &= \psi_i(z_1) + z_{i+1}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n-1 \\ f_n &= \psi_n(z_1) \end{aligned} \tag{2.39}$$

其中 $\psi_i(z_1)$ 为合适的函数。现在可由式 (2.38) 和式 (2.39) 计算得

$$ad_{(-f)}^{n} g = ad_{(-f)} ad_{(-f)}^{n-1} g = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial z_1} \psi_i(z_1) \right) \frac{\partial}{\partial z_i}$$

根据条件 (ii) 和式 (2.38)，有

$$[ad_{(-f)}^{n-1} g, ad_f^n g] = 0$$

从而

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} \psi_i(z_1) \right) \frac{\partial}{\partial z_i} = 0$$

考虑到 $f(0)=0$，该式表明函数 $\psi_i, 1 \leqslant i \leqslant n$ 关于 z_1 是线性的，也即

$$\psi_i(z_1) = -\alpha_{n-i} z_1, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n$$

综上所述，

$$\begin{aligned} f &= (-\alpha_{n-1} z_1 + z_2) \frac{\partial}{\partial z_1} + \cdots + (-\alpha_1 z_1 + z_n) \frac{\partial}{\partial z_{n-1}} - \alpha_0 z_1 \frac{\partial}{\partial z_n} \\ &= \begin{bmatrix} -\alpha_{n-1} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\alpha_1 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_{n-1} \\ z_n \end{bmatrix} \\ g &= \frac{\partial}{\partial z_n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \end{aligned}$$

充分性得证。

必要性。条件 (i) 和条件 (ii) 与局部坐标系无关，且系统 (2.34) 满足条件 (i) 和条件 (ii)。 □

评注 2.3.1 状态线性化定理 2.3.1 将定理 2.1.3(b) 对线性可控系统所建立的结果推广到了一类非线性系统。这两个结果的证明是相似的。条件 (ii) 对于线性系统而言总是成立的，但是对于非线性系统则不然，加上条件 (ii) 的目的是确保由式 (2.37) 计算的微分是正则的。 □

例 2.3.1 (续例 2.2.3)对于系统 (2.29)，有

$$g = \alpha(x_2)\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad ad_{(-f)}g = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad ad^2_{(-f)}g = 0$$

因此，它满足定理 2.3.1 的条件 (i) 和条件 (ii)。参照定理的充分性证明，计算正则微分 $d\phi_1 = \phi_{11}dx_1 + \phi_{12}dx_2$ 和 $d\phi_2 = \phi_{21}dx_1 + \phi_{22}dx_2$，满足

$$\begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \alpha(x_2) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

由此可得

$$\begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha(x_2) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

积分得

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \int_0^x dx_1 - \alpha(x_2)dx_2 = x_1 - \int_0^{x_2} \alpha(\xi)d\xi \\ \phi_2 &= \int_0^x dx_2 = x_2 \end{aligned}$$

其中 $\phi_i(0) = 0$。在新坐标系

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 - \int_0^{x_2} \alpha(\xi)d\xi \\ z_2 &= x_2 \end{aligned}$$

下，系统 (2.29) 变为

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= u \end{aligned}$$

□

例 2.3.2 考虑系统

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + e^{x_2}x_3 - e^{x_2}x_2^3 \\ \dot{x}_2 &= x_3 - x_2^3 \\ \dot{x}_3 &= u + 3x_2^2x_3 - 3x_2^5 \end{aligned} \tag{2.40}$$

记

$$\begin{aligned} f &= (x_2 + e^{x_2}x_3 - e^{x_2}x_2^3)\frac{\partial}{\partial x_1} + (x_3 - x_2^3)\frac{\partial}{\partial x_2} \\ &\quad + (3x_2^2x_3 - 3x_2^5)\frac{\partial}{\partial x_3} \\ g &= \frac{\partial}{\partial x_3} \end{aligned}$$

且计算可得

$$\begin{aligned} ad_f g &= -e^{x_2}\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2} - 3x_2^2\frac{\partial}{\partial x_3} \\ ad_f^2 g &= -e^{x_2}(x_3 - x_2^3)\frac{\partial}{\partial x_1} - 6x_2(x_3 - x_2^3)\frac{\partial}{\partial x_3} \end{aligned}$$

$$+(1+x_3\mathrm{e}^{x_2}-x_2^3\mathrm{e}^{x_2}-3x_2^2\mathrm{e}^{x_2})\frac{\partial}{\partial x_1}-3x_2^2\frac{\partial}{\partial x_2}$$
$$+(6x_3x_2-15x_2^4)\frac{\partial}{\partial x_3}+3\mathrm{e}^{x_2}x_2^2\frac{\partial}{\partial x_1}+3x_2^2\frac{\partial}{\partial x_2}+9x_2^4\frac{\partial}{\partial x_3}=\frac{\partial}{\partial x_1}$$

容易验证

$$\begin{aligned}[g,ad_fg] &= 0\\ [g,ad_f^2g] &= 0\\ [ad_fg,ad_f^2g] &= 0\end{aligned}$$

因此满足定理2.3.1的条件，式(2.40)可由一个微分同胚(无状态反馈)变换为一个线性可控系统。由式(2.35)，该线性化微分同胚可通过确定 $\bar{\phi}_1(x),\bar{\phi}_2(x),\bar{\phi}_3(x)$ 这三个函数来计算：

$$\begin{aligned}\langle d\bar{\phi}_1,\mathrm{span}\{g,ad_fg\}\rangle &= 0\\ \langle d\bar{\phi}_1,ad_{(-f)}^2g\rangle &= \gamma_1\neq 0\\ \langle d\bar{\phi}_2,\mathrm{span}\{g,ad_f^2g\}\rangle &= 0\\ \langle d\bar{\phi}_2,ad_{(-f)}g\rangle &= \gamma_2\neq 0\\ \langle d\bar{\phi}_3,\mathrm{span}\{ad_fg,ad_f^2g\}\rangle &= 0\\ \langle d\bar{\phi}_3,g\rangle &= \gamma_3\neq 0\end{aligned}$$

其中 $\bar{\phi}_i(0)=0$。上式等价于偏微分方程组

$$\begin{aligned}\frac{\partial\bar{\phi}_1}{\partial x_3} &= 0,\quad \mathrm{e}^{x_2}\frac{\partial\bar{\phi}_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\bar{\phi}_1}{\partial x_2}+3x_2^2\frac{\partial\bar{\phi}_1}{\partial x_3}=0,\quad \frac{\partial\bar{\phi}_1}{\partial x_1}=\gamma_1\\ \frac{\partial\bar{\phi}_2}{\partial x_3} &= 0,\quad \frac{\partial\bar{\phi}_2}{\partial x_1}=0,\quad \mathrm{e}^{x_2}\frac{\partial\bar{\phi}_2}{\partial x_1}+\frac{\partial\bar{\phi}_2}{\partial x_2}+3x_2^2\frac{\partial\bar{\phi}_2}{\partial x_3}=\gamma_2\\ \mathrm{e}^{x_2}\frac{\partial\bar{\phi}_3}{\partial x_1}+\frac{\partial\bar{\phi}_3}{\partial x_2}+3x_2^2\frac{\partial\bar{\phi}_3}{\partial x_3} &= 0,\quad \frac{\partial\bar{\phi}_3}{\partial x_1}=0,\quad \frac{\partial\bar{\phi}_3}{\partial x_3}=\gamma_3\end{aligned}$$

方程的一个解给出如下：

$$\begin{aligned}\bar{\phi}_1(x) &= \gamma_1(x_1-\mathrm{e}^{x_2})+\gamma_1\\ \bar{\phi}_2(x) &= \gamma_2x_2\\ \bar{\phi}_3(x) &= \gamma_3(x_3-x_2^3)\end{aligned}$$

回想式(2.36)，线性化微分同胚为

$$\begin{aligned}z_1 &= \phi_1(x)=1+x_1-\mathrm{e}^{x_2}\\ z_2 &= \phi_2(x)=x_2\\ z_3 &= \phi_3(x)=x_3-x_2^3\end{aligned}$$

□

2.4 部分反馈线性化

在本节中，对于那些不是可反馈线性化的系统，确定可反馈线性化的子系统。

定义 2.4.1 若非线性单输入系统(2.1)局部反馈等价于部分线性系统

$$
\begin{aligned}
\dot{\xi} &= \varphi(\xi, z), \qquad \xi \in \mathbb{R}^{n-r} \\
\dot{z} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v, \qquad z \in \mathbb{R}^r
\end{aligned} \tag{2.41}
$$

则称系统是(具有指数 $r \leqslant n$ 的)局部**可部分状态反馈线性化的(partially state feedback linearizable)**。 □

如果一个系统对于指数 $r \leqslant n$ 是可部分状态反馈线性化的，则其对于指数 r' 也是可部分状态反馈线性化的，其中 r' 是小于 r 的任意整数。若 $r = n$，则系统是局部可状态反馈线性化的。

定理 2.4.1 系统(2.1)是具有指数 $r = 1$ 的局部可部分反馈线性化的。 □

证明: 因为 $g(0) \neq 0$ 且 g 是一个光滑向量场，由定理 A.4.4 可得，g 是局部可平整化的，即存在一个局部微分同胚

$$
z = \phi(x), \qquad \phi(0) = 0
$$

使得

$$
\begin{aligned}
\langle d\phi_i, g \rangle &= 0, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n-1 \\
\langle d\phi_n, g \rangle &= 1
\end{aligned}
$$

在 z 坐标系下，系统(2.1)变为

$$
\begin{aligned}
\dot{z}_i &= L_f \phi_i, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n-1 \\
\dot{z}_n &= L_f \phi_n + u
\end{aligned} \tag{2.42}
$$

定义

$$
u = -L_f \phi_n + v
$$

将其代入式(2.42)，得

$$
\begin{aligned}
\dot{z}_i &= L_f \phi_i(z), \qquad 1 \leqslant i \leqslant n-1 \\
\dot{z}_n &= v
\end{aligned}
$$

即为式(2.41)中 $r = 1$ 的情形。 □

定理 2.4.2 **部分反馈线性化(Partial Feedback Linearization)** 对于系统(2.1)，如果分布 $\bar{\mathcal{G}}_{r-2}$ ($\mathcal{G}_{r-2}$ 的对合闭包) 在原点的一个邻域 U_0 内有小于等于 $n-1$ 的常数秩，且存在整数 $r, 2 \leqslant r \leqslant n$，使得

$$
ad_f^{r-1} g(x) \notin \bar{\mathcal{G}}_{r-2}(x) = \text{inv.cl.}\,\text{span}\{g, \cdots, ad_f^{r-2} g\}, \quad \forall x \in U_0 \tag{2.43}
$$

则系统是具有指数 r 的局部可部分反馈线性化的。 □

证明：由式(2.43)，及假设$\bar{\mathcal{G}}_{r-2}$有小于等于$n-1$的常数秩，因此能够应用Frobenius定理A.4.3，该定理保证存在一个光滑函数$h(x)$，$h(0)=0$，在原点的一个邻域内满足

$$\begin{aligned} \langle dh, ad_{(-f)}^{r-1} g\rangle &= \gamma \neq 0 \\ \langle dh, \bar{\mathcal{G}}_{r-2}\rangle &= 0 \end{aligned} \tag{2.44}$$

由反证法，可以证明由于$ad_f^{r-1}g \notin \bar{\mathcal{G}}_{r-2}$，从而在$U_0$内有

$$\operatorname{rank}\{g, \cdots, ad_f^{r-2}g, ad_f^{r-1}g\} = r \tag{2.45}$$

假设对于某个$j<r-1$和某个$x \in U_0$

$$ad_f^j g(x) \in \mathcal{G}_{j-1} = \operatorname{span}\{g(x), \cdots, ad_f^{j-1}g(x)\}$$

则

$$ad_f^j g(x) = \sum_{i=1}^{j} \alpha_i ad_f^{i-1} g(x)$$

这表明

$$ad_f^{j+1} g = \left[f, \sum_{i=1}^{j} \alpha_i ad_f^{i-1} g\right] = \sum_{i=1}^{j}(\alpha_i ad_f^i g + (L_f\alpha_i) ad_f^{i-1} g) \in \mathcal{G}_{j-1}$$

与式(2.43)的假设相矛盾。反复应用Leibniz法则，由h的定义可得

$$\begin{bmatrix} \langle dh, g\rangle & \cdots & \langle dh, ad_{(-f)}^{r-1} g\rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle d(L_f^{r-1}h), g\rangle & \cdots & \langle d(L_f^{r-1}h), ad_{(-f)}^{r-1} g\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \gamma \\ 0 & \cdots & \gamma & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \gamma & \cdots & * & * \end{bmatrix}$$

因此，由式(2.45)有

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} dh \\ \vdots \\ d(L_f^{r-1}h) \end{bmatrix} = r$$

特别是有

$$\begin{aligned} \langle d(L_f^{r-1}h), g\rangle &= \gamma \neq 0 \\ \langle d(L_f^j h), g\rangle &= 0, \qquad 0 \leqslant j \leqslant r-2 \end{aligned} \tag{2.46}$$

因此，再次应用定理A.4.3，由于span$\{g\}$是秩为1的对合分布，因此加上已确定的函数$(h, \cdots, L_f^{r-1}h)$，则可确定$n-r$个函数$\xi_1(x), \cdots, \xi_{n-r}(x), \xi_i(0)=0$，满足

$$L_g\xi_i = \langle d\xi_i(x), g\rangle = 0, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n-r \tag{2.47}$$

以及

$$\text{rank}\begin{bmatrix} d\xi_1 \\ \vdots \\ d\xi_{n-r} \\ dh \\ \vdots \\ d(L_f^{r-1}h) \end{bmatrix} = n$$

根据逆函数定理 A.1.1 可知

$$\begin{aligned} \xi_i &= \xi_i(x), \qquad 1 \leqslant i \leqslant n-r \\ z_j &= L_f^{j-1}h, \qquad 1 \leqslant j \leqslant r \end{aligned}$$

是一个局部微分同胚。在 (ξ, z) 局部坐标系下，系统(2.1)变为

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_i &= L_f\xi_i(x) + uL_g\xi_i(x), \quad 1 \leqslant i \leqslant n-r \\ \dot{z}_j &= L_f^j h + uL_gL_f^{j-1}h, \qquad 1 \leqslant j \leqslant r \end{aligned}$$

根据式 (2.46) 和式 (2.47)，并回顾前面的 $z_{j+1} = L_f^j h,\ 0 \leqslant j \leqslant r-1$，由于 $f(0) = 0$，$L_f^r h(0) = 0$，可得

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_i &= L_f\xi_i(x) \\ \dot{z}_j &= z_{j+1}, \qquad 1 \leqslant j \leqslant r-1 \\ \dot{z}_r &= L_f^r h + uL_gL_f^{r-1}h \end{aligned} \tag{2.48}$$

从而，由式 (2.46) 可知，在原点的一个邻域内有

$$L_gL_f^{r-1}h = \gamma \neq 0$$

定义

$$u = \frac{1}{L_gL_f^{r-1}h}(-L_f^r h + v) \triangleq k(x) + \beta(x)v \tag{2.49}$$

将式 (2.49) 代入式 (2.48)，可得出式 (2.41)，即

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \varphi(\xi, z) \\ \dot{z} &= A_c z + b_c v \end{aligned}$$

□

例 2.4.1 考虑系统

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + x_4^2 + u \\ \dot{x}_2 &= u + x_4^2 \\ \dot{x}_3 &= -(x_3 - x_2)^3 + x_4^2 + x_4^3 + u \\ \dot{x}_4 &= (x_2 - x_3)x_4^2 - x_4 \end{aligned} \tag{2.50}$$

记

$$f = (x_2 + x_4^2)\frac{\partial}{\partial x_1} + x_4^2\frac{\partial}{\partial x_2} + (-(x_3 - x_2)^3 + x_4^2 + x_4^3)\frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$+((x_2-x_3)x_4^2-x_4)\frac{\partial}{\partial x_4}$$

$$g = \frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial x_2}+\frac{\partial}{\partial x_3}$$

计算可得

$$\begin{aligned}ad_fg &= -\frac{\partial}{\partial x_1}-3(x_3-x_2)^2\frac{\partial}{\partial x_3}-x_4^2\frac{\partial}{\partial x_4}+3(x_3-x_2)^2\frac{\partial}{\partial x_3}+x_4^2\frac{\partial}{\partial x_4}\\ &= -\frac{\partial}{\partial x_1}\\ ad_f^2g &= 0\end{aligned}$$

由于

$$ad_fg \quad \notin \quad \mathrm{span}\{g\}$$

系统(2.50)是具有指数$r=2$的可部分反馈线性化的。为得到该变换，要找到一个函数$h(x)$，$h(0)=0$，满足

$$\begin{aligned}\langle dh, ad_fg\rangle &= \gamma\neq 0\\ \langle dh, g\rangle &= 0\end{aligned}$$

也即一个函数h，使得

$$\begin{aligned}-\frac{\partial h}{\partial x_1} &= \gamma\neq 0\\ \frac{\partial h}{\partial x_1}+\frac{\partial h}{\partial x_2}+\frac{\partial h}{\partial x_3} &= 0\end{aligned}$$

$h(x)$的一个解由

$$h(x) = x_1-x_2$$

给出。因此，前两个坐标为

$$\begin{aligned}h(x) &= x_1-x_2\\ L_fh(x) &= x_2+x_4^2-x_4^2=x_2\end{aligned}$$

另外两个坐标$\xi_1(x)$和$\xi_2(x)$必须满足$\xi_i(0)=0$，且

$$\langle d\xi_i(x), g\rangle = 0, \qquad i=1,2$$

也即

$$\frac{\partial \xi_i(x)}{\partial x_1}+\frac{\partial \xi_i(x)}{\partial x_2}+\frac{\partial \xi_i(x)}{\partial x_3} = 0, \qquad i=1,2$$

另外，它们必须满足秩条件

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} d\xi_1\\ d\xi_2\\ dh\\ d(L_fh)\end{bmatrix} = 4, \qquad \forall x\in U_0$$

一个解为

$$\xi_1(x) = x_3-x_2$$

$$\xi_2(x) \quad = \quad x_4$$

最终得到的坐标变换是一个线性变换

$$\begin{aligned} z_1 &= h(x) = x_1 - x_2 \\ z_2 &= L_f h(x) = x_2 \\ z_3 &= \xi_1(x) = x_3 - x_2 \\ z_4 &= \xi_2(x) = x_4 \end{aligned}$$

在 z 坐标系下，有

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \dot{x}_1 - \dot{x}_2 = x_2 + x_4^2 + u - u - x_4^2 = x_2 = z_2 \\ \dot{z}_2 &= \dot{x}_2 = u + x_4^2 = u + z_4^2 \\ \dot{z}_3 &= \dot{x}_3 - \dot{x}_2 = -(x_3 - x_2)^3 + x_4^2 + x_4^3 + u - u - x_4^2 = -z_3^3 + z_4^3 \\ \dot{z}_4 &= \dot{x}_4 = (x_2 - x_3)x_4^2 - x_4 = -z_3 z_4^2 - z_4 \end{aligned}$$

该系统通过反馈

$$u \quad = \quad v - z_4^2$$

变为式 (2.41) 所示的部分线性系统。 □

定义 2.4.1 并不要求式 (2.41) 中的 φ 与向量 z 相关。正如下面将看到的，为计算镇定控制，有必要界定 φ 仅与 z_1 相关的那些情形。

定义 2.4.2 若非线性单输入系统(2.1)局部反馈等价于部分线性系统

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \varphi(\xi, z_1), \qquad \xi \in \mathbb{R}^{n-r} \\ \dot{z} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v, \qquad z \in \mathbb{R}^r \end{aligned} \tag{2.51}$$

则称为是具有指数 $r \leqslant n$ 的局部**三角型部分可状态反馈线性化的(partially state feedback linearizable in triangular form)**。 □

评注 2.4.1 注意，在式 (2.51)中，只有向量 z 的第一个分量 z_1 影响系统的非线性部分。 □

可以用微分几何来刻画出那些非线性系统的充分条件，它们可以局部反馈等价于三角型部分线性系统。

定理 2.4.3 **三角型部分线性化(Partial Linearization in Triangular Form)** 对于系统 (2.1)，若分布

$$\mathcal{G}_i \quad = \quad \mathrm{span}\{g, \cdots, ad_f^i g\}, \qquad 0 \leqslant i \leqslant r-1 \tag{2.52}$$

是对合的，且在原点的一个邻域 U_0 内具有常数秩 $i+1$，则该系统是具有指数 $r \leqslant n$ 的三角型局部可部分反馈线性化的。 □

证明: 假设

$$ad_f^{r-1}g \notin \mathcal{G}_{r-2} = \bar{\mathcal{G}}_{r-2}$$

因此，根据定理2.4.2的证明，存在一个光滑函数$h(x)$，$h(0)=0$，使得

$$\begin{aligned}\langle dh, \mathcal{G}_{r-2}\rangle &= 0 \\ \langle dh, ad_{(-f)}^{r-1}g\rangle &= \gamma \neq 0\end{aligned}$$

且在原点的一个邻域内有

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} dh \\ \vdots \\ d(L_f^{r-1}h)\end{bmatrix} = r$$

由于假设分布$\mathcal{G}_{r-1}$是对合的且有常数秩r，由Frobenius定理A.4.3，可以确定$n-r$个函数$\xi_i(x), 1 \leqslant i \leqslant n-r, \xi_i(0)=0$，使得在原点的一个邻域内

$$\langle d\xi_i(x), \mathcal{G}_{r-1}\rangle = 0 \tag{2.53}$$

且

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} d\xi_1 \\ \vdots \\ d\xi_{n-r} \\ dh \\ \vdots \\ d(L_f^{r-1}h)\end{bmatrix} = n$$

由逆函数定理A.1.1可知

$$\begin{aligned}\xi_i &= \xi_i(x), \qquad 1 \leqslant i \leqslant n-r \\ z_j &= L_f^{j-1}h(x), \qquad 1 \leqslant j \leqslant r\end{aligned}$$

是一个局部微分同胚。在(ξ, z)坐标系下，参照定理2.4.2的证明，系统(2.1)变为

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_i &= L_f\xi_i \triangleq \varphi_i(\xi, z), \qquad 1 \leqslant i \leqslant n-r \\ \dot{z}_j &= z_{j+1}, \qquad 1 \leqslant j \leqslant r-1 \\ \dot{z}_r &= L_f^r h + uL_gL_f^{r-1}h\end{aligned} \tag{2.54}$$

应用Leibniz公式，由式(2.53)得，对于$1 \leqslant i \leqslant n-r$，

$$\langle d(L_f\xi_i), \mathcal{G}_{r-2}\rangle = L_f\langle d\xi_i, \mathcal{G}_{r-2}\rangle - \langle d\xi_i, [f, \mathcal{G}_{r-2}]\rangle = 0 \tag{2.55}$$

在(ξ, z)坐标系下，有

$$\begin{aligned} f &= \sum_{i=1}^{n-r}(L_f\xi_i)\frac{\partial}{\partial \xi_i} + \sum_{j=1}^{r-1} z_{j+1}\frac{\partial}{\partial z_j} + (L_f^r h)\frac{\partial}{\partial z_r} \\ \mathcal{G}_0 &= \operatorname{span}\{g\} = \operatorname{span}\left\{\frac{\partial}{\partial z_r}\right\}\end{aligned}$$

从而由式 (2.55) 得

$$\frac{\partial(L_f\xi_i)}{\partial z_r} = 0, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n-r$$

回想 $\mathcal{G}_{j+1} = \text{span}\{\mathcal{G}_j, ad_f\mathcal{G}_j\}$，有

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_1 &= \text{span}\left\{\frac{\partial}{\partial z_r}, -\sum_{i=1}^{n-r}\left(\frac{\partial}{\partial z_r}(L_f\xi_i)\right)\frac{\partial}{\partial \xi_i} - \frac{\partial}{\partial z_{r-1}} - \left(\frac{\partial}{\partial z_r}(L_f^r h)\right)\frac{\partial}{\partial z_r}\right\} \\ &= \text{span}\left\{\frac{\partial}{\partial z_r}, \frac{\partial}{\partial z_{r-1}}\right\}\end{aligned}$$

由式 (2.55)

$$\frac{\partial(L_f\xi_i)}{\partial z_{r-1}} = 0, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n-r$$

使用归纳法进行推导。假设

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_j &= \text{span}\left\{\frac{\partial}{\partial z_r}, \cdots, \frac{\partial}{\partial z_{r-j}}\right\} \\ \frac{\partial(L_f\xi_i)}{\partial z_k} &= 0, \qquad r-j \leqslant k \leqslant r, 1 \leqslant i \leqslant n-r\end{aligned} \tag{2.56}$$

计算得

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_{j+1} = \ &\text{span}\Big\{\frac{\partial}{\partial z_r}, \cdots, \frac{\partial}{\partial z_{r-j}}, -\sum_{i=1}^{n-r}\left(\frac{\partial}{\partial z_{r-j}}(L_f\xi_i)\right)\frac{\partial}{\partial \xi_i} \\ &- \frac{\partial}{\partial z_{r-j-1}} - \left(\frac{\partial}{\partial z_{r-j}}(L_f^r h)\right)\frac{\partial}{\partial z_r}\Big\} = \text{span}\Big\{\frac{\partial}{\partial z_r}, \cdots, \frac{\partial}{\partial z_{r-j-1}}\Big\}\end{aligned}$$

从而，若 $j \leqslant r-3$，由式(2.55)得

$$\frac{\partial(L_f\xi_i)}{\partial z_{r-j-1}} = 0, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n-r$$

由于对于 $j=1$ 已证得式 (2.56) 成立，可归纳得

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_{r-2} &= \text{span}\left\{\frac{\partial}{\partial z_2}, \cdots, \frac{\partial}{\partial z_r}\right\} \\ \frac{\partial(L_f\xi_i)}{\partial z_j} &= 0, \qquad 2 \leqslant j \leqslant r, 1 \leqslant i \leqslant n-r\end{aligned}$$

采用式 (2.54) 中的符号，即

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial z_j} = \frac{\partial(L_f\xi_i)}{\partial z_j} = 0, \qquad 2 \leqslant j \leqslant r, 1 \leqslant i \leqslant n-r$$

由此也可得 $\mathcal{G}_{r-1} = \text{span}\left\{\frac{\partial}{\partial z_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial z_r}\right\}$。 □

例 2.4.2 (续例 2.4.1)对于系统 (2.50)，由于分布

$$\mathcal{G}_1 = \text{span}\{g, ad_f g\}$$

是对合的且在 $\mathbb{R}^4$ 中具有常数秩2，则该系统是局部可部分反馈线性化为指数 $r=2$ 的三角型系统。实际上，如例 2.4.1 所示，在新的坐标系下，系统是三角型的。 □

例 2.4.3 考虑系统

$$\dot{x}_1 = x_1^3 + x_2^5 + 2x_3^3$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_2 &= x_3\\ \dot{x}_3 &= u\end{aligned}$$

下面计算

$$\begin{aligned}ad_f g &= -6x_3^2\frac{\partial}{\partial x_1}-\frac{\partial}{\partial x_2}\\ [g, ad_f g] &= 12x_3\frac{\partial}{\partial x_1}\end{aligned}$$

由于在原点的任意邻域内分布$\mathcal{G}_1=\text{span}\{g, ad_f g\}$不是对合的，因此系统不是可反馈线性化的。根据定义2.4.2，系统是可部分状态反馈线性化为指数为$r=1$的三角型形式。实际上，令$x_3=z$，有

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1^3+x_2^5+2z^3\\ \dot{x}_2 &= z\\ \dot{z} &= u\end{aligned}$$

另一方面，由定义2.4.1可知，系统是具有指数$r=2$的可部分状态反馈线性化的。实际上，令$\xi=x_1$, $z_1=x_2$, $z_2=x_3$，则有

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= \xi^3+z_1^5+2z_2^3\\ \dot{z}_1 &= z_2\\ \dot{z}_2 &= u\end{aligned}$$

□

2.5 三角型系统的镇定

这一节研究可部分状态反馈线性化为三角型的系统的镇定问题。

定理 2.5.1 三角型镇定(Triangular Stabilization) 考虑具有三角型结构的部分线性系统

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= \varphi(\xi, z_1), \qquad \xi\in\mathbb{R}^{n-r}\\ \dot{z}_i &= z_{i+1}, \qquad 1\leqslant i\leqslant r-1\\ \dot{z}_r &= v\end{aligned}$$

其中φ是一个光滑函数，$\varphi(0,0)=0$，假设存在一个光滑函数

$$v_0 = v_0(\xi), \qquad v_0(0)=0$$

和一个正定的径向无界函数$V_0(\xi)$，使得$\langle dV_0, \varphi(\xi, v_0(\xi))\rangle$是负定的。那么，存在一个光滑反馈控制

$$v = v_r(\xi, z)$$

使得原点$(\xi, z)=0$是全局渐近稳定的。 □

证明: 首先，证明定理在$r=1$时成立，即对于系统

$$\dot{\xi} = \varphi(\xi, z_1)$$

$$\dot{z}_1 = v$$

其在新坐标

$$\xi = \xi, \quad \tilde{z}_1 = z_1 - v_0(\xi)$$

下可表示为

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \varphi(\xi, \tilde{z}_1 + v_0(\xi)) \triangleq \psi(\xi, \tilde{z}_1) \\ \dot{\tilde{z}}_1 &= -\frac{\partial v_0}{\partial \xi}\varphi(\xi, z_1) + v \end{aligned} \tag{2.57}$$

由于 ψ 的分量为光滑函数，ψ 可表示为($\bar{\psi}$ 的分量也是光滑函数)

$$\psi(\xi, \tilde{z}_1) = \varphi(\xi, v_0(\xi)) + \tilde{z}_1\bar{\psi}(\xi, \tilde{z}_1)$$

将其代入式 (2.57)，可得

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \varphi(\xi, v_0(\xi)) + \tilde{z}_1\bar{\psi}(\xi, \tilde{z}_1) \\ \dot{\tilde{z}}_1 &= -\frac{\partial v_0}{\partial \xi}\varphi(\xi, z_1) + v \end{aligned}$$

考虑函数

$$V_1 = V_0(\xi) + \frac{1}{2}\tilde{z}_1^2$$

由对 V_0 的假设可知，其对时间的导数为

$$\dot{V}_1 = \langle dV_0, \varphi(\xi, v_0(\xi))\rangle + \tilde{z}_1\langle dV_0, \bar{\psi}(\xi, \tilde{z}_1)\rangle - \tilde{z}_1\frac{\partial v_0}{\partial \xi}\varphi(\xi, z_1) + \tilde{z}_1 v$$

定义

$$v_1 = -\langle dV_0, \bar{\psi}(\xi, \tilde{z}_1)\rangle + \frac{\partial v_0}{\partial \xi}\varphi(\xi, z_1) - k_1\tilde{z}_1$$

将 $v = v_1$ 代入 $\dot{V}_1$，可得

$$\dot{V}_1 = \langle dV_0, \varphi(\xi, v_0(\xi))\rangle - k_1\tilde{z}_1^2$$

因为 V_1 是径向无界正定函数，且 $\dot{V}_1$ 是负定的，由Lyapunov 定理B.1.5可知，原点是全局渐近稳定的。当 $r > 1$ 时，采用归纳法证明。

命题 假设对于系统

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \varphi(\xi, z_1) \\ \dot{z}_j &= z_{j+1}, \qquad 1 \leqslant j \leqslant i-1 \\ \dot{z}_i &= v \end{aligned} \tag{2.58}$$

存在 i 个光滑函数 $v_0(\xi), \cdots, v_{i-1}(\xi, z_1, \cdots, z_{i-1})$ 和一个镇定状态反馈控制

$$v = v_i(\xi, z_1, \cdots, z_i)$$

其中 $v_j(0, \cdots, 0) = 0$, $1 \leqslant j \leqslant i$，使得

$$V_i = V_0 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{i}\tilde{z}_j^2$$

对时间的导数为

$$\dot{V}_i = \langle dV_0, \varphi(\xi, v_0(\xi))\rangle - \sum_{j=1}^{i} k_j \tilde{z}_j^2$$

其中 $k_j > 0, 1 \leqslant j \leqslant i$，

$$\tilde{z}_j = z_j - v_{j-1}(\xi, z_1, \cdots, z_{j-1}), \qquad 1 \leqslant j \leqslant i$$

并且式(2.58)中的 $v = v_i(\xi, z_1, \cdots, z_i)$，则存在一个镇定状态反馈控制 $v = v_{i+1}(\xi, z_1, \cdots, z_{i+1})$ 且 $v_{i+1}(0, \cdots, 0) = 0$，对于系统

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \varphi(\xi, z_1) \\ \dot{z}_j &= z_{j+1}, \qquad 1 \leqslant j \leqslant i \\ \dot{z}_{i+1} &= v \end{aligned} \tag{2.59}$$

使得如下给定函数

$$V_{i+1} = V_0 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{i+1} \tilde{z}_j^2 = V_i + \frac{1}{2}\tilde{z}_{i+1}^2$$

对时间的导数为

$$\dot{V}_{i+1} = \langle dV_0, \varphi(\xi, v_0(\xi))\rangle - \sum_{j=1}^{i+1} k_j \tilde{z}_j^2 \tag{2.60}$$

其中 $k_{i+1} > 0$，且

$$\tilde{z}_{i+1} = z_{i+1} - v_i(\xi, z_1, \cdots, z_i)$$

命题的证明：在$(\xi, \tilde{z}_1, \cdots, \tilde{z}_{i+1})$坐标下表示式(2.59)，并应用对 V_i 的假设，可计算

$$\begin{aligned} \dot{V}_{i+1} &= \langle dV_0, \varphi(\xi, v_0(\xi))\rangle - \sum_{j=1}^{i} k_j \tilde{z}_j^2 \\ &\quad + \tilde{z}_{i+1}\Big(\tilde{z}_i + v - \frac{\partial v_i}{\partial \xi}\varphi(\xi, z_1) - \sum_{j=1}^{i} \frac{\partial v_i}{\partial z_j} z_{j+1}\Big) \end{aligned}$$

定义

$$\begin{aligned} v &= v_{i+1}(\xi, z_1, \cdots, z_{i+1}) \\ &= -\tilde{z}_i + \frac{\partial v_i}{\partial \xi}\varphi(\xi, z_1) + \sum_{j=1}^{i} \frac{\partial v_i}{\partial z_j} z_{j+1} - k_{i+1}\tilde{z}_{i+1} \end{aligned}$$

可得式(2.60)。

应用命题 $r-1$ 次，可迭代建立一个全局镇定控制

$$v = v_r(\xi, z_1, \cdots, z_r)$$

使得

$$V_r = V_0 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{r} \tilde{z}_j^2$$

是径向无界正定函数，且有

$$\dot{V}_r = \langle dV_0, \varphi(\xi, v_0(\xi)) \rangle - \sum_{j=1}^{r} k_j \tilde{z}_j^2$$

□

例 2.5.1 考虑系统

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 &= u \end{aligned}$$

其低阶子系统为

$$\dot{x}_1 = x_1 x_2$$

取

$$x_2 = v_0(x_1) = -x_1^2$$

则低阶子系统的原点 $x_1 = 0$ 是全局渐近稳定的。
引入全局坐标变换

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 \\ z_2 &= x_2 - v_0(x_1) = x_2 + x_1^2 \end{aligned}$$

则系统变为

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -z_1^3 + z_1 z_2 \\ \dot{z}_2 &= u + 2x_1^2 x_2 = u + 2z_1^2(z_2 - z_1^2) = u + 2z_1^2 z_2 - 2z_1^4 \end{aligned}$$

下面寻找一个状态反馈控制律

$$u = u_1(z_1, z_2) = u_1(x_1, x_2)$$

使得备选的 Lyapunov 函数

$$V = \frac{1}{2}(z_1^2 + z_2^2) = \frac{1}{2}\left[x_1^2 + (x_2 + x_1^2)^2\right]$$

对时间的导数

$$\dot{V} = -z_1^4 + z_1^2 z_2 + 2z_1^2 z_2^2 - 2z_1^4 z_2 + z_2 u$$

是负定的。显然，一个选择是

$$u_1 = -z_1^2 - 2z_1^2 z_2 + 2z_1^4 - z_2$$

从而 $\dot{V} = -z_1^4 - z_2^2$。 □

例 2.5.2 考虑系统

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + x_1^2 + x_1 x_2 + x_1 x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= u \end{aligned}$$

虽然，三角型镇定定理 2.5.1 适用于该系统，这是因为由前两个方程组成的子系统可由下式全

局渐近镇定

$$x_3 = v_0(x_1, x_2) = -x_1 - x_2$$

它的 Lyapunov 函数为

$$V_0 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} P_0 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

且 P_0 是下式的解

$$A_0^{\mathrm{T}} P_0 + P_0 A_0 = -I$$

其中

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

□

例 2.5.3 定理 2.5.1 不适用于系统

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 - x_2^3 \\ \dot{x}_2 &= u \end{aligned}$$

这是因为对于一阶系统 $\dot{\xi} = \xi - x_2^3$，不存在光滑镇定反馈 $x_2 = v_0(\xi)$。 □

将定理 2.5.1 应用于线性系统可以得出如下结论。

推论 2.5.1 对于给定的具有 Brunovsky 控制器标准型的线性系统

$$\begin{aligned} \dot{z}_i &= z_{i+1}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n-1 \\ \dot{z}_n &= v \end{aligned}$$

存在一个三角型线性坐标变换

$$\tilde{z} = Tz = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & 1 \end{bmatrix} z$$

和一个镇定状态反馈控制

$$v = kz$$

使得在 $\tilde{z}$ 坐标下的闭环系统为

$$\dot{\tilde{z}} = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & -\lambda_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\lambda_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & -\lambda_n \end{bmatrix} \tilde{z} = \Lambda \tilde{z}$$

其中 $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ 是任意正实数。 □

在 $\tilde{z}$ 坐标下，Lyapunov 函数

$$V = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\tilde{z}_i^2$$

对时间的导数为

$$\dot{V} = -\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\tilde{z}_i^2$$

使得

$$\|\tilde{z}(t)\| \leqslant \exp\left(-\min_{1\leqslant i\leqslant n}\{\lambda_i\}t\right)\|\tilde{z}(0)\|$$

2.6 全局反馈线性化

这一节讨论线性化定理2.2.1、定理2.3.1、定理2.4.2和定理2.4.3的全局情形：限定定义2.2.2、定义2.3.2、定义2.4.1和定义2.4.2中的局部微分同胚为全局的，且将状态反馈定义在整个 $\mathbb{R}^n$ 上。

定理 2.6.1 **全局状态线性化(Global State Linearization)** 单输入系统(2.1)是全局可状态线性化的，即在 $\mathbb{R}^n$ 上可由一个全局微分同胚

$$z = T(x), \qquad T(0)=0, \quad z\in\mathbb{R}^n$$

变换为一个线性可控系统

$$\begin{aligned}\dot{z} &= \frac{dT}{dx}f\circ T^{-1}(z)+\left(\frac{dT}{dx}g\circ T^{-1}(z)\right)u\\ &= \begin{bmatrix}-\alpha_{n-1} & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ -\alpha_1 & 0 & \cdots & 1\\ -\alpha_0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}z+\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u\end{aligned}$$

当且仅当在 $\mathbb{R}^n$ 上满足：

(i) $\mathrm{span}\{g,\cdots,ad_f^{n-1}g\}=\mathbb{R}^n$；

(ii) $\left[ad_f^i g, ad_f^j g\right]=0,\ 0\leqslant i,j\leqslant n$；

(iii) 向量场 $ad_f^i g, 0\leqslant i\leqslant n-1$ 是完备的。

□

简要证明：证明过程类似定理2.3.1的证明。由定理A.4.5可知，条件(iii)保证存在一个全局微分同胚能够同时平整向量场 $g, ad_{(-f)}g,\cdots,ad_{(-f)}^{n-1}g$。□

定理 2.6.2 **全局反馈线性化(Global Feedback Linearization)** 单输入系统(2.1)是全局可反馈线性化的，即在 $\mathbb{R}^n$ 上通过一个状态反馈

$$u = k(x)+\beta(x)v, \qquad k(0)=0, \quad \beta(x)\neq 0, \quad \forall x\in\mathbb{R}^n$$

和一个全局微分同胚

$$z = T(x), \qquad T(0) = 0$$

可将该系统全局变换成具有 Brunovsky 控制器标准型 (2.15) 的线性系统，当且仅当在$\mathbb{R}^n$上满足

(i) $\text{span}\{g, \cdots, ad_f^{n-1}g\} = \mathbb{R}^n$;

(ii) 存在一个光滑函数$\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\varphi(0) = 0$，使得

(a) $d\varphi$处处不为零，且$\langle d\varphi, ad_f^i g\rangle = 0$, $0 \leqslant i \leqslant n-2$, $\langle d\varphi, ad_f^{n-1}g\rangle \neq 0$,

(b) 向量场$ad_{\tilde{f}}^i\tilde{g}$, $0 \leqslant i \leqslant n-1$是完备的，其中

$$\tilde{f} = f - \frac{L_f^n\varphi}{L_gL_f^{n-1}\varphi}g, \qquad \tilde{g} = \frac{1}{L_gL_f^{n-1}\varphi}g$$

□

简要证明: 根据定理 2.2.1 的证明，状态反馈

$$u = -\frac{L_f^n\varphi}{L_gL_f^{n-1}\varphi} + \frac{1}{L_gL_f^{n-1}\varphi}v$$

将系统 (2.1) 变换为局部可状态线性化的系统

$$\dot{x} = \tilde{f}(x) + \tilde{g}(x)v$$

由于$\text{span}\{\tilde{g}, \cdots, ad_{\tilde{f}}^{n-1}\tilde{g}\} = \mathbb{R}^n, \forall x \in \mathbb{R}^n$，且 (ii) (b) 成立，再由定理 2.6.1 可知，该系统为全局可状态线性化的。 □

评注 2.6.1 如例 2.2.2 所示，线性变换并不是惟一的，这是因为

$$\begin{aligned}\langle d\varphi, ad_f^i g\rangle &= 0, \qquad 0 \leqslant i \leqslant n-2 \\ \langle d\varphi, ad_f^{n-1}g\rangle &\neq 0\end{aligned}$$

的解函数φ不惟一。条件 (ii) 要求存在具有这种性质且满足完备性假设 (ii) (b) 的函数。 □

定理 2.6.3 全局部分线性化(Global Partial Linearization) 单输入系统 (2.1) 是具有指数r的全局可部分反馈线性化的，其中$1 \leqslant r \leqslant n$，若在$\mathbb{R}^n$上满足:

(i) 分布$\bar{\mathcal{G}}_{r-2} = \text{inv.cl.}\{g, \cdots, ad_f^{r-2}g\}$有常数秩，且$ad_f^{r-1}g(x) \notin \bar{\mathcal{G}}_{r-2}$;

(ii) 存在一个光滑函数$\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，使得

(a) $d\varphi$处处不为零，且$\langle d\varphi, \bar{\mathcal{G}}_{r-2}\rangle = 0$, $\langle d\varphi, ad_f^{r-1}g\rangle \neq 0$,

(b) 向量场$ad_{\tilde{f}}^i\tilde{g}$, $0 \leqslant i \leqslant r-1$是完备的，其中

$$\tilde{f} = f - \frac{L_f^r\varphi}{L_gL_f^{r-1}\varphi}g, \qquad \tilde{g} = \frac{1}{L_gL_f^{r-1}\varphi}g$$

□

定理 2.6.4 全局三角型部分线性化(Global Partial Linearization in Triangular Form) 单输入系统(2.1)是具有指数 r 的三角型全局可部分线性化的，其中 $1 \leqslant r \leqslant n$，若在 $\mathbb{R}^n$ 上满足：

(i) 分布 $\mathcal{G}_i = \operatorname{span}\{g, \cdots, ad_f^i g\}$ 是对合的，且具有常数秩 $i+1$，$i = 0, \cdots, r-1$；

(ii) 存在一个光滑函数 $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，使得

(a) $d\varphi$ 处处不为零，且 $\langle d\varphi, \mathcal{G}_{r-2}\rangle = 0$, $\langle d\varphi, ad_f^{r-1} g\rangle \neq 0$,

(b) 向量场 $ad_{\tilde{f}}^i \tilde{g}$, $0 \leqslant i \leqslant r-1$ 是完备的，其中

$$\tilde{f} = f - \frac{L_f^r \varphi}{L_g L_f^{r-1}\varphi} g, \qquad \tilde{g} = \frac{1}{L_g L_f^{r-1}\varphi} g$$

□

评注 2.6.2 只有定理2.6.1的陈述是令人满意的，这是因为其所依赖的条件是可检验的。而定理2.6.2、定理2.6.3和定理2.6.4的陈述却不令人满意，这是因为它们需要基于一个特定函数 φ 的存在性。 □

例 2.6.1 考虑系统

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1^3 + \arctan x_2 \\ \dot{x}_2 &= u \end{aligned}$$

记

$$f = (x_1^3 + \arctan x_2)\frac{\partial}{\partial x_1}, \qquad g = \frac{\partial}{\partial x_2}$$

计算

$$ad_f g = -\frac{1}{1+x_2^2}\frac{\partial}{\partial x_1}$$

由此可得 $\operatorname{span}\{g, ad_f g\} = \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}^2$。令 $\varphi(x_1, x_2)$ 是满足 $\varphi(0,0) = 0$，且

$$-\frac{1}{1+x_2^2}\frac{\partial\varphi(x_1,x_2)}{\partial x_1} \neq 0, \qquad \frac{\partial\varphi(x_1,x_2)}{\partial x_2} = 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^2$$

的一个函数，即 $\varphi(x_1, x_2) = \psi(x_1)$，其中 $\psi(0) = 0$ 且 $d\psi(x_1)/dx_1 \neq 0, \forall x_1 \in \mathbb{R}$，从而 $d\psi$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上处处不为零。对于满足 $d\psi(x_1)/dx_1 \neq 0, \forall x_1 \in \mathbb{R}$ 的任意函数 $\psi(x_1)$，向量场

$$\tilde{g} = \frac{1}{L_g L_f \psi} g = (1+x_2^2)\frac{d\psi(x_1)}{dx_1}\frac{\partial}{\partial x_2}$$

不是完备的。根据定理2.6.2，该系统不是全局可反馈线性化的。 □

2.7 多输入系统的推广

考虑一个多输入非线性系统

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^{m} g_i(x) u_i \triangleq f(x) + G(x)u, \qquad x \in \mathbb{R}^n \tag{2.61}$$

其中$f, g_1, \cdots, g_m$是$\mathbb{R}^n$上的光滑向量场，$f(0)=0$，$n\times m$维矩阵$G(x)$在原点处有最大秩，也即$\operatorname{rank} G(0)=m$，$u=[u_1,\cdots,u_m]^{\mathrm{T}}$是$m$维输入向量。

本章给出的所有结论，即极点配置、反馈线性化、状态线性化、部分反馈线性化和三角型部分反馈线性化均可推广到多输入系统(2.61)。本节只阐述主要的定义和结论。

通过引入可控性指数的概念，定理2.1.2可推广到如下多输入线性系统：

$$\dot{x} = Fx+\sum_{i=1}^{m} g_i u_i = Fx+Gu \tag{2.62}$$

其中$\operatorname{rank} G=m$。

定义 2.7.1 对于任意给定的**可控**(**controllable**)系统(2.62)，与其对应的**可控性指数**(**controllability indices**) $\{k_1,\cdots,k_m\}$是惟一的，即当

$$\operatorname{rank}\left[G, FG, \cdots, F^{n-1}G\right] = n$$

时，k_i由下式

$$k_i = \operatorname{card}\{m_j \geqslant i : j\geqslant 0\}, \qquad 1\leqslant i\leqslant m$$

惟一确定，其中

$$\begin{aligned}
m_0 &= \operatorname{rank} G\\
m_1 &= \operatorname{rank}[G, FG]-\operatorname{rank} G\\
&\vdots\\
m_k &= \operatorname{rank}\left[G,\cdots,F^kG\right]-\operatorname{rank}\left[G,\cdots,F^{k-1}G\right]\\
&\vdots\\
m_{n-1} &= \operatorname{rank}\left[G,\cdots,F^{n-1}G\right]-\operatorname{rank}\left[G,\cdots,F^{n-2}G\right]
\end{aligned}$$

根据定义有$k_1\geqslant k_2\geqslant\cdots\geqslant k_m$，且由于系统是可控的，从而有$\sum_{i=1}^m k_i=n$。 □

在线性状态空间坐标变换

$$z = Tx, \qquad z\in\mathbb{R}^n \tag{2.63}$$

和非奇异状态反馈变换

$$u = Kx+\beta v, \qquad v\in\mathbb{R}^m \tag{2.64}$$

下，系统的可控性指数是不变的，其中T非奇异，β为一个非奇异的$m\times m$维矩阵，K为一个$m\times n$维矩阵。

定理2.1.2可推广如下。

定理 2.7.1 对任意可控性指数为$\{k_1,\cdots,k_m\}$的可控系统(2.62)，存在一个线性状态空间坐标变换(2.63)和一个非奇异状态反馈(2.64)，将(F,G)变换为

$$(T(F+GK)T^{-1}, TG\beta) = (A_{\mathrm{c}}, B_{\mathrm{c}})$$

其中$(A_{\mathrm{c}}, B_{\mathrm{c}})$为**Brunovsky 控制器标准型**(**Brunovsky controller form**)：

$$\begin{aligned}
A_c &= \text{block diag}\,[A_1,\cdots,A_m]\\
B_c &= \text{block diag}\,[B_1,\cdots,B_m]
\end{aligned} \tag{2.65}$$

其中，对于 $1 \leqslant i \leqslant m$ 有

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{k_i \times k_i}, \qquad B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{1 \times k_i}$$

□

注意，尽管对于单输入系统 $\beta = 1$ 并不失一般性，但对于多输入系统，矩阵 β 一般不是单位阵。

定理 2.7.2 **多输入反馈线性化(Multi-Input Feedback Linearization)** 非线性系统(2.61)是局部可反馈线性化的，即在包含于 U_0 中的原点的一个邻域 V_0 内，可通过

(a) **非奇异状态反馈(nonsingular state feedback)**

$$u = K(x) + \beta(x)v, \qquad K(0) = 0 \tag{2.66}$$

其中 $K(x)$ 是从 V_0 到 $\mathbb{R}^n$ 上的一个光滑函数，$\beta(x)$ 是一个 $m \times m$ 维矩阵，其具有光滑的输入，且在 V_0 中非奇异，

(b) 在 V_0 上的一个局部微分同胚

$$z = T(x), \qquad T(0) = 0 \tag{2.67}$$

局部变换为一个具有 Brunovsky 控制器标准型的线性可控系统，当且仅当在 U_0 上满足:

(i) $\mathcal{G}_\ell = \mathrm{span}\{ad_f^j g_i : 1 \leqslant i \leqslant m, 0 \leqslant j \leqslant \ell\}, 0 \leqslant \ell \leqslant n-2$ 是对合的，且具有常数秩;

(ii) $\mathrm{rank}\ \mathcal{G}_{n-1} = n$。

□

与满足定理2.7.2条件的系统(2.61)相关的**可控性指数(controllability indices)** $\{k_1, \cdots, k_m\}$ 定义如下

$$k_i = \mathrm{card}\{m_j \geqslant i : j \geqslant 0\}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant m$$

其中

$$\begin{aligned} m_0 &= \mathrm{rank}\ \mathcal{G}_0 \\ m_1 &= \mathrm{rank}\ \mathcal{G}_1 - \mathrm{rank}\ \mathcal{G}_0 \\ &\vdots \\ m_{n-1} &= \mathrm{rank}\ \mathcal{G}_{n-1} - \mathrm{rank}\ \mathcal{G}_{n-2} \end{aligned}$$

如此定义的可控性指数在反馈变换下是不变的。定理 2.7.2 也可以叙述如下。

定理 2.7.3 非线性系统(2.61)在原点的一个邻域内，通过**非奇异状态反馈变换(nonsingular state feedback transformation)**，其包括一个非奇异状态反馈(2.66)和一个微分同胚(2.67)，可局部变换为具有可控性指数 $k_1 \geqslant \cdots \geqslant k_m$ 的 Brunovsky 控制器标准型的线性可控系统，当且仅当在原点的一个邻域 U_0 内满足:

(i) 分布 $\mathcal{G}_{k_i-2}$, $1 \leqslant i \leqslant m$ 是对合的且有常数秩;

(ii) rank $\mathcal{G}_{k_1-1} = n$。

□

条件 (i) 和条件 (ii) 保证存在 m 个光滑函数 $\phi_1(x), \cdots, \phi_m(x)$，使得

$$\langle d\phi_i, \mathcal{G}_{k_j-2}\rangle = 0, \qquad j \geqslant i$$

且矩阵

$$\begin{bmatrix} \langle d\phi_1, ad_f^{k_1-1}g_1\rangle & \cdots & \langle d\phi_1, ad_f^{k_1-1}g_m\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle d\phi_m, ad_f^{k_m-1}g_1\rangle & \cdots & \langle d\phi_m, ad_f^{k_m-1}g_m\rangle \end{bmatrix}$$

在 V_0 上是非奇异的。线性化非奇异状态反馈变换和微分同胚分别为

$$v = \begin{bmatrix} L_f^{k_1}\phi_1 \\ \vdots \\ L_f^{k_m}\phi_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{g_1}L_f^{k_1-1}\phi_1 & \cdots & L_{g_m}L_f^{k_1-1}\phi_1 \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ L_{g_1}L_f^{k_m-1}\phi_m & \cdots & L_{g_m}L_f^{k_m-1}\phi_m \end{bmatrix} u$$

和

$$z = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ L_f^{k_1-1}\phi_1 \\ \vdots \\ \phi_m \\ \vdots \\ L_f^{k_m-1}\phi_m \end{bmatrix}$$

注意，可控性指数可以用关于原点的线性近似来计算。

状态线性化定理 2.3.1 可如下推广到多输入系统。

定理 2.7.4 多输入状态线性化(Multi-Input State Linearization) *在原点的一个邻域内，存在一个局部微分同胚，可将非线性系统 (2.61) 变换为一个线性可控系统，当且仅当在原点的一个邻域 U_0 内满足:*

(i) $\mathrm{rank}\{\mathrm{span}\{ad_f^j g_i : 0 \leqslant j \leqslant n-1,\ 1 \leqslant i \leqslant m\}\} = n$;

(ii) $\left[ad_f^\ell g_i, ad_f^k g_j\right] = 0,\ 0 \leqslant \ell, k \leqslant n, 1 \leqslant i, j \leqslant m$。

□

部分反馈线性化的结论也可推广到多输入系统。

定义 2.7.2 *系统 (2.61) 称为是具有指数 $\{k_1, \cdots, k_m\}$ 的局部可部分状态反馈线性化的，当存在非奇异状态反馈变换 (2.66) 和局部微分同胚 (2.67)，将式 (2.61) 变换为*

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \varphi(\xi, z), \qquad \xi \in \mathbb{R}^{n-r} \\ \dot{z} &= A_c z + B_c v, \qquad z \in \mathbb{R}^r \end{aligned}$$

其中，(A_c, B_c) 为具有指数 $\{k_1, \cdots, k_m\}$ 的 Brunovsky 控制器标准型 (2.65)，满足 $\sum_{i=1}^{m} k_i = r < n$。 □

定义分布

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_0 &= \text{span}\{g_1, \cdots, g_m\} \\
\mathcal{G}_j &= \text{span}\{\mathcal{G}_{j-1}, [f+g, \mathcal{G}_{j-1}] : \forall g \in \mathcal{G}_0\} \\
\mathcal{Q}_0 &= \mathcal{G}_0 \\
\mathcal{Q}_j &= \text{span}\{ad_f^j \mathcal{G}_0, \bar{\mathcal{G}}_{j-1}\}
\end{aligned}$$

假设所有分布 $\mathcal{G}_j$ 和 $\mathcal{Q}_j$ 以及 $\mathcal{G}_j$ 的对合闭包 $\bar{\mathcal{G}}_j, j \geqslant 0$ 在 U_0 上有常数秩，可以定义

$$\begin{aligned}
m_0 &= \text{rank}\ \mathcal{G}_0 \\
m_1 &= \text{rank}\ \mathcal{Q}_1 - \text{rank}\ \bar{\mathcal{G}}_0 \\
&\ \vdots \\
m_i &= \text{rank}\ \mathcal{Q}_i - \text{rank}\ \bar{\mathcal{G}}_{i-1}
\end{aligned}$$

和

$$k_i^* = \text{card}\{m_j \geqslant i : j \geqslant 0\}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant m$$

由定义，有

$$k_1^* \geqslant k_2^* \geqslant \cdots \geqslant k_m^*$$

这说明在非奇异状态反馈和局部微分同胚变换下指数 $\{k_1^*, \cdots, k_m^*\}$ 是不变的。

定理 2.7.5　多输入部分反馈线性化(Multi-Input Partial Feedback Linearization) 系统 (2.61) 是具有指数 $\{k_1^*, \cdots, k_m^*\}$ 的局部可部分状态反馈线性化的。 □

2.8　实例

例 2.8.1　(对应问题 1.10.8)考虑在垂直平面内旋转的单连杆**柔性关节机器人(robot with flexible joint)**。选择状态变量

$$x_1 = q_1, \quad x_2 = \dot{q}_1, \quad x_3 = q_2, \quad x_4 = \dot{q}_2$$

则其状态空间模型可重写为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -(F_l/J_l)x_2 - (Mgl/J_l)\sin x_1 - (k/J_l)(x_1 - x_3) \\ x_4 \\ -(F_m/J_m)x_4 + (k/J_m)(x_1 - x_3) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ (1/J_m) \end{bmatrix} u \triangleq f(x) + g(x)u$$

应用反馈线性化定理 2.2.1。定义 $h=x_1$，线性化微分同胚给出如下：

$$z = T(x) = \left[h, L_f h, L_f^2 h, L_f^3 h\right]^{\mathrm{T}} = [z_1, z_2, z_3, z_4]^{\mathrm{T}}$$

其中

$$\begin{aligned}
z_1 &= x_1 \\
z_2 &= x_2 \\
z_3 &= -\frac{F_1}{J_1}x_2 - \frac{Mgl}{J_1}\sin x_1 - \frac{k}{J_1}(x_1 - x_3) \\
z_4 &= -\left(\frac{Mgl}{J_1}\cos x_1 + \frac{k}{J_1}\right)x_2 + \frac{F_1}{J_1}\left[\frac{F_1}{J_1}x_2 + \frac{Mgl}{J_1}\sin x_1 + \frac{k}{J_1}(x_1 - x_3)\right] \\
&\quad + \frac{k}{J_1}x_4
\end{aligned}$$

假定所有状态均可通过测量得到，且所有参数精确已知，则线性化状态反馈为

$$u = -\frac{L_f^4 h}{L_g L_f^3 h} + \frac{1}{L_g L_f^3 h}v$$

其中

$$\begin{aligned}
L_f^4 h &= \left(\frac{Mgl}{J_1}\sin x_1 + \frac{F_1 Mgl}{J_1^2}\cos x_1 + \frac{kF_1}{J_1^2}\right)x_2 \\
&\quad + \left(\frac{Mgl}{J_1}\cos x_1 + \frac{k}{J_1} - \frac{F_1^2}{J_1^2}\right)\left[\frac{F_1}{J_1}x_2 + \frac{Mgl}{J_1}\sin x_1 + \frac{k}{J_1}(x_1 - x_3)\right] \\
&\quad - \frac{kF_1}{J_1^2}x_4 + \frac{k}{J_1}\left[\frac{k}{J_{\mathrm{m}}}(x_1 - x_3) - \frac{F_{\mathrm{m}}}{J_{\mathrm{m}}}x_4\right] \\
L_g L_f^3 h &= \frac{k}{J_1 J_{\mathrm{m}}}
\end{aligned}$$

取新的控制 v 为

$$v = -k_1(z_1 - q_{\mathrm{r}1}) - k_2 z_2 - k_3 z_3 - k_4 z_4$$

其中 $s^4 + k_4 s^3 + k_3 s^2 + k_2 s + k_1$ 为 Hurwitz 多项式，常数 $q_{\mathrm{r}1}$ 是连杆位置的期望值，则新的控制律保证平衡点 $z_1 = q_{\mathrm{r}1}, z_2 = z_3 = z_4 = 0$ 的全局渐近稳定性。 □

例 2.8.2 (对应问题 1.10.9)考虑一个与无穷大母线相连的**同步发电机(synchronous generator)**的降阶模型。记向量场 f, g 为($v_{\mathrm{f}} = u + v_{\mathrm{fe}}$)

$$\begin{aligned}
f &= (\omega - \omega_{\mathrm{s}})\frac{\partial}{\partial\delta} + (\theta_1 - \theta_2\omega\psi_{\mathrm{f}}\sin\delta + \theta_3\sin\delta\cos\delta)\frac{\partial}{\partial\omega} \\
&\quad + (v_{\mathrm{fe}} - \theta_4\omega\psi_{\mathrm{f}} + \theta_5\cos\delta)\frac{\partial}{\partial\psi_{\mathrm{f}}} \\
g &= \frac{\partial}{\partial\psi_{\mathrm{f}}}
\end{aligned}$$

其中，为了简化起见，令 $\theta_i' = \theta_i$，计算可得

$$ad_f g = \theta_2\omega\sin\delta\frac{\partial}{\partial\omega} + \theta_4\omega\frac{\partial}{\partial\psi_{\mathrm{f}}}$$

并验证可知 $\mathcal{G}_1 = \mathrm{span}\{g, ad_f g\}$ 是稳定运行点$(\delta_{\mathrm{e}}, \omega_{\mathrm{s}}, \psi_{\mathrm{fe}})$的邻域内秩为2的一个对合分布，且

该运行点是代数方程

$$\begin{aligned}\theta_1-\theta_2\omega_{\mathrm{s}}\psi_{\mathrm{fe}}\sin\delta_{\mathrm{e}}+\theta_3\sin\delta_{\mathrm{e}}\cos\delta_{\mathrm{e}} &= 0\\ v_{\mathrm{fe}}-\theta_4\omega_{\mathrm{s}}\psi_{\mathrm{fe}}+\theta_5\cos\delta_{\mathrm{e}} &= 0\end{aligned}$$

的一个解。进一步，$\mathcal{G}_2=\mathrm{span}\{g,ad_fg,ad_f^2g\}$ 在 $(\delta_{\mathrm{e}},\omega_{\mathrm{s}},\psi_{\mathrm{fe}})$ 的邻域内秩为3，则线性化反馈变换给定如下：

$$\begin{aligned}z_1 &= \delta\\ z_2 &= \omega-\omega_{\mathrm{s}}\\ z_3 &= \theta_1-\theta_2\omega\psi_{\mathrm{f}}\sin\delta+\theta_3\sin\delta\cos\delta\\ v &= (-\theta_2\omega\sin\delta)u+[-\theta_2\omega\psi_{\mathrm{f}}\cos\delta+\theta_3(\cos^2\delta-\sin^2\delta)](\omega-\omega_{\mathrm{s}})\\ &\quad -\theta_2\sin\delta(\theta_1\psi_{\mathrm{f}}-\theta_2\omega\psi_{\mathrm{f}}^2\sin\delta+\theta_3\psi_{\mathrm{f}}\sin\delta\cos\delta\\ &\quad +v_{\mathrm{fe}}\omega-\theta_4\omega^2\psi_{\mathrm{f}}+\theta_5\omega\cos\delta)\end{aligned}$$

$\omega=0$ 和 $\delta=0,\delta=\pi$ 是物理上的奇异点。可以验证，以 c_{m} 和 v_{f} 为输入的全阶模型是具有可控性指数3和2的局部可反馈线性化的，并且可根据多输入反馈线性化定理2.7.2来计算线性化反馈变换。这两个问题留给读者。 □

例 2.8.3 (对应问题1.10.10)考虑一个永磁同步电机(**synchronous motor**)的模型。为简化起见，取极对数 $p=1$：这是一个以 (u_a,u_b) 为控制的多变量非线性问题。多输入反馈线性化定理2.7.2可应用于可控性指数为 $\{3,1\}$ 的情形。实际上，在全局定义的新状态空间坐标

$$\begin{aligned}z_1 &= \delta\\ z_2 &= \omega\\ z_3 &= -\frac{K_{\mathrm{m}}}{J}i_a\sin\delta+\frac{K_{\mathrm{m}}}{J}i_b\cos\delta-\frac{F}{J}\omega-\frac{T_{\mathrm{L}}}{J}\\ z_4 &= K_{\mathrm{m}}i_a\cos\delta+K_{\mathrm{m}}i_b\sin\delta\end{aligned}\tag{2.68}$$

下，电机模型变为

$$\begin{aligned}\dot z_1 &= z_2\\ \dot z_2 &= z_3\\ \dot z_3 &= -\frac{K_{\mathrm{m}}}{JL}\sin\delta(-Ri_a+K_{\mathrm{m}}\omega\sin\delta+u_a)-\frac{K_{\mathrm{m}}}{J}i_a\omega\cos\delta\\ &\quad +\frac{K_{\mathrm{m}}}{JL}\cos\delta(-Ri_b-K_{\mathrm{m}}\omega\cos\delta+u_b)-\frac{K_{\mathrm{m}}}{J}i_b\omega\sin\delta-\frac{F}{J}z_3\\ \dot z_4 &= \frac{K_{\mathrm{m}}}{L}\cos\delta(-Ri_a+K_{\mathrm{m}}\omega\sin\delta+u_a)-K_{\mathrm{m}}i_a\omega\sin\delta\\ &\quad +\frac{K_{\mathrm{m}}}{L}\sin\delta(-Ri_b-K_{\mathrm{m}}\omega\cos\delta+u_b)+K_{\mathrm{m}}i_b\omega\cos\delta\end{aligned}\tag{2.69}$$

引入新的控制变量 u_1 和 u_2，定义为

$$\frac{K_{\mathrm{m}}}{L}\begin{bmatrix}-\dfrac{\sin\delta}{J} & \dfrac{\cos\delta}{J}\\ \cos\delta & \sin\delta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_a\\ u_b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\phi_a\\ \phi_b\end{bmatrix}\tag{2.70}$$

其中

$$\phi_a=\frac{K_{\mathrm{m}}}{JL}\sin\delta(-Ri_a+K_{\mathrm{m}}\omega\sin\delta)+\frac{K_{\mathrm{m}}}{J}i_a\omega\cos\delta$$

$$
\begin{aligned}
& -\frac{K_{\mathrm{m}}}{JL}\cos\delta(-Ri_b - K_{\mathrm{m}}\omega\cos\delta) + \frac{K_{\mathrm{m}}}{J}i_b\omega\sin\delta + \frac{F}{J}z_3 \\
\phi_b \quad = \quad & -\frac{K_{\mathrm{m}}}{L}\cos\delta(-Ri_a + K_{\mathrm{m}}\omega\sin\delta) + K_{\mathrm{m}}i_a\omega\sin\delta \\
& -\frac{K_{\mathrm{m}}}{L}\sin\delta(-Ri_b - K_{\mathrm{m}}\omega\cos\delta) - K_{\mathrm{m}}i_b\omega\cos\delta
\end{aligned}
$$

注意式 (2.70) 是一个非奇异状态反馈，这是因为矩阵

$$
\begin{bmatrix} -\dfrac{\sin\delta}{J} & \dfrac{\cos\delta}{J} \\ \cos\delta & \sin\delta \end{bmatrix}
$$

对于任意的 δ 是非奇异的。将式 (2.70) 代入式 (2.69)，可以得到具有可控性指数为 $\{3,1\}$ 的 Brunovsky 控制器标准型的多变量线性可控系统

$$
\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= z_2 \\
\dot{z}_2 &= z_3 \\
\dot{z}_3 &= u_1 \\
\dot{z}_4 &= u_2
\end{aligned}
$$

这里，控制 u_1 用来驱动系统跟踪一个期望位置参考 $y_{\mathrm{r}}(t)$，而控制 u_2 用来驱动 z_4 为零，以保证能量效率最大。 □

例 2.8.4 (对应问题1.10.5)考虑一个运动小车上的**倒立摆(inverted pendulum)**模型，其中 $u_2 = 0$，即惟一的控制为作用于运动小车上的力。现在说明该系统不是可反馈线性化的。在状态空间中，$u_2 = 0$ 和 $u_1 = u$ 的模型表示如下：

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= v_x \\
\dot{v}_x &= \frac{ml\omega^2\sin\varphi - mg\sin\varphi\cos\varphi + u}{M + m\sin^2\varphi} \\
\dot{\varphi} &= \omega \\
\dot{\omega} &= \frac{-ml\omega^2\sin\varphi\cos\varphi + (M+m)g\sin\varphi - u\cos\varphi}{Ml + ml\sin^2\varphi}
\end{aligned}
$$

由于在状态反馈下，可反馈线性化这一性质是不变的，为简化计算，在上述方程中引入状态反馈

$$
u = -ml\omega^2\sin\varphi + mg\sin\varphi\cos\varphi + v(M + m\sin^2\varphi)
$$

则变为

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= v_x \\
\dot{v}_x &= v \\
\dot{\varphi} &= \omega \\
\dot{\omega} &= \frac{g\sin\varphi}{l} - \frac{\cos\varphi}{l}v
\end{aligned}
$$

其关于原点 $(x, v_x, \varphi, \omega) = 0$ 的线性近似是可控的。记

$$
f = v_x\frac{\partial}{\partial x} + \omega\frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{g\sin\varphi}{l}\frac{\partial}{\partial\omega}
$$

$$
g = \frac{\partial}{\partial v_x} - \frac{\cos\varphi}{l}\frac{\partial}{\partial \omega}
$$

计算得

$$
\begin{aligned}
ad_f g &= -\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\cos\varphi}{l}\frac{\partial}{\partial \varphi} + \omega\frac{\sin\varphi}{l}\frac{\partial}{\partial \omega} \\
[g, ad_f g] &= -2\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{l^2}\frac{\partial}{\partial \omega}
\end{aligned}
$$

由于$[g, ad_f g]$不属于分布$\mathcal{G}_1 = \mathrm{span}\{g, ad_f g\}$，分布$\mathcal{G}_1$不是对合的，因此根据定理2.2.1，该系统不是可反馈线性化的。另一方面，若可利用两个控制量$(u_1 \neq 0, u_2 \neq 0)$，则运动小车的倒立摆模型是具有可控性指数$\{2,2\}$的可反馈线性化的系统，由定理2.7.2可知，实际上不需要状态空间坐标变换。 □

例 2.8.5 (对应问题1.10.3)忽略**刚体(rigid body)**模型中ω的动态方程，假设$(\omega_x, \omega_y, \omega_z, \rho)$是由模型的前3个方程和后6个方程构成的9阶系统。若设$\dot{\rho} = \delta$，则输入为$(\omega_x, \omega_y, \omega_z, \delta)$的增广系统是具有指数$\{3,3,3,1\}$的可反馈线性化的，即为动态可状态反馈线性化的。 □

例 2.8.6 (对应问题1.10.1)考虑一个**感应电机(induction motor)**的5阶模型，其中(u_a, u_b)是控制。由于分布$\mathcal{G}_1$不是对合的，所以根据定理2.7.2，该系统不是可反馈线性化的。 □

例 2.8.7 (对应问题1.10.6)考虑在$(r, v, \varphi, \omega) = 0$的一个邻域内的**球棒(ball and beam)**系统，其关于原点的线性近似是可控的，但在原点的任意邻域内系统不是局部可反馈线性化的。这一结论可在进行状态反馈

$$
-\frac{2mrv\omega}{J+mr^2} - \frac{mgr\cos\varphi}{J+mr^2} + \tau = u
$$

后很容易地得到。闭环系统为

$$
\begin{aligned}
\dot{r} &= v \\
\dot{v} &= -g\sin\varphi + r\omega^2 \\
\dot{\varphi} &= \omega \\
\dot{\omega} &= u
\end{aligned}
$$

记

$$
\begin{aligned}
f &= v\frac{\partial}{\partial r} + (-g\sin\varphi + r\omega^2)\frac{\partial}{\partial v} + \omega\frac{\partial}{\partial \varphi} \\
g &= \frac{\partial}{\partial \omega}
\end{aligned}
$$

计算

$$
\begin{aligned}
ad_f g &= -2r\omega\frac{\partial}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial \varphi} \\
[g, ad_f g] &= -2r\frac{\partial}{\partial v}
\end{aligned}
$$

可知分布$\mathrm{span}\{g, ad_f g\}$不是对合的，这是因为它不包含向量场$[g, ad_f g]$。由于不满足定理2.2.1的条件(iii)，因此系统不是可反馈线性化的。 □

例 2.8.8 (对应问题1.10.7)在不包含点 $r = 0$，即系统本身奇异点的任意开集内，一个**点质量卫星(point mass satellite)**的多变量模型是可状态反馈线性化的，其可控性指数为 $\{k_1 = 2, k_2 = 2\}$。另一方面，$u_1 = 0$(仅有切向推力)时的单输入模型不是可反馈线性化的。实际上，记

$$\begin{aligned} f &= v\frac{\partial}{\partial r} + (r\omega^2 - \frac{k}{mr^2})\frac{\partial}{\partial v} + \omega\frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{2v\omega}{r}\frac{\partial}{\partial \omega} \\ g &= \frac{1}{mr}\frac{\partial}{\partial \omega} \end{aligned}$$

计算

$$\begin{aligned} ad_f g &= -\frac{2\omega}{m}\frac{\partial}{\partial v} + \frac{v}{mr^2}\frac{\partial}{\partial \omega} - \frac{1}{mr}\frac{\partial}{\partial \varphi} \\ [g, ad_f g] &= -\frac{2}{m^2 r}\frac{\partial}{\partial v} \end{aligned}$$

由于 $[g, ad_f g] \notin \mathcal{G}_1 = \mathrm{span}\{g, ad_f g\}$，$\mathcal{G}_1$ 不是一个对合分布，因此根据定理2.2.1，该系统不是可反馈线性化的。又由于 $ad_f^2 g \notin \bar{\mathcal{G}}_1$，且 $\mathcal{G}_1$ 有常数秩3，由定理2.4.2和定义2.4.1可知，该系统是可部分反馈线性化的，其指数 r 为3。实际上，选择新坐标 $(r, v, \alpha = r\omega^2 - k/(mr^2), \varphi)$，则有

$$\begin{aligned} \dot{r} &= v \\ \dot{v} &= \alpha \\ \dot{\alpha} &= -3v\omega^2 + 2\frac{kv}{mr^3} + 2\frac{\omega}{m}u_2 \triangleq v \\ \dot{\varphi} &= \pm\sqrt{\frac{\alpha}{r} + \frac{k}{mr^3}} \end{aligned}$$

新的控制为

$$v = -k_1(r - r_r) - k_2 v - k_3 \alpha$$

其中 r_r 是常值参考，选择合适的 k_i 值，则此控制律可保证

$$\lim_{t\to\infty}(r(t) - r_r) = 0$$

□

2.9 结论

本章的主要结果是反馈线性化定理2.2.1和状态线性化定理2.3.1，它们分别是将极点配置定理2.1.1(或定理2.1.2) 和定理2.1.3推广到非线性系统中得到的。状态线性化定理2.3.1给出了将一个非线性系统变换为控制器标准型的非线性坐标变换存在的充要条件，而反馈线性化定理2.2.1给出了将一个非线性系统变换为一个Brunovsky控制器标准型的非线性状态反馈变换存在的充要条件。2.6节给出了全局情形下的条件，而2.7节将其推广到了多输入系统。这些结果是构造性的，并且构成了基本的设计工具，如例2.8.1、例2.8.2和例2.8.3所示，在这些例子中分别设计了柔性关节机器人、同步发电机和同步电动机的状态反馈控制。这些条件可通过计算Lie括号来检验：倒立摆(见例2.8.4)、球棒(见例2.8.7) 以及点质量卫星(见例2.8.8)不是可反馈线性化的物理系统。对于不是可反馈线性化的系统，通过定理2.4.2和定理2.4.3给出的构造性设计可以实现部分反馈线性化，而这种部分反馈线性化则与第4章研究

的输入–输出反馈线性化相关。三角型镇定定理 2.5.1 引入了一个迭代的反馈设计，在后续章节中设计鲁棒和自适应控制算法时将会多次用到这种设计方法。

2.10 习题

2.1 考虑系统

a) $\dot{x}_1 = x_2 + \mathrm{e}^{-x_2}x_3$
$\dot{x}_2 = x_3$
$\dot{x}_3 = u$

b) $\dot{x}_1 = x_2 - x_3^2 + 3x_2^2x_3 - 6x_2x_3^3 + 3x_3^5$
$\dot{x}_2 = x_3 + 2x_3u$
$\dot{x}_3 = u$

试说明它们均为可状态线性化的，并确定相应的线性化变换。

2.2 试说明系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + \mathrm{e}^{-x_3}x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= u\end{aligned}$$

不是可反馈线性化的。

2.3 确定系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 - 3x_1x_2^2 + 3x_2^5 + 3x_2^2u \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + x_2^3 + u\end{aligned}$$

是否是可状态线性化的或是可反馈线性化的，并计算相应的线性化变换。

2.4 设计状态反馈，使系统

a) $\dot{x}_1 = x_1x_2^2$
$\dot{x}_2 = u$

b) $\dot{x}_1 = x_1x_2^2$
$\dot{x}_2 = x_2^2 + x_3$
$\dot{x}_3 = x_2\sin x_1 + u$

的原点是全局渐近稳定的。

2.5 试说明系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 - x_1^2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 + 2x_1x_2 - 2x_1^3 + 2x_3u \\ \dot{x}_3 &= u\end{aligned}$$

不是可反馈线性化的。

2.6 考虑系统 $\dot{x} = f(x) + g(x)u$, $f(0) = 0$, $g(0) \neq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$，令 s 为整数，使得在原点的一个邻域 U_0 内满足：

(i) $\mathrm{rank}\{g, \cdots, ad_f^{s-1}g\} = s$；

(ii) $[ad_f^i g, ad_f^j g] = 0$, $0 \leqslant i, j \leqslant s-1$；

(iii) $[ad_f^{s-1}g, ad_f^s g] \neq 0$。

证明如下命题：存在局部坐标变换 $z = \phi(x)$, $\phi(0) = 0$, $z \in \mathbb{R}^n$，使得系统在 z 坐标系下可表示为：

$$\begin{aligned}
\dot{z}_i &= z_{i+1}, \quad 1 \leqslant i \leqslant s-1 \\
\dot{z}_s &= \alpha_0(z_{s+1}, \cdots, z_n) + \alpha_1(z_{s+1}, \cdots, z_n)z_1 \\
&\quad + \cdots + \alpha_s(z_{s+1}, \cdots, z_n)z_s + u \\
\dot{z}_j &= \psi_j(z_1, z_{s+1}, \cdots, z_n), \quad s+1 \leqslant j \leqslant n
\end{aligned}$$

2.7 考虑系统

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -x_1 + x_1^2 x_2, \qquad x_1(0) = x_{10}, x_2(0) = x_{20} \\
\dot{x}_2 &= u
\end{aligned}$$

试说明状态反馈

$$u = -kx_2, \qquad k > 0$$

使得原点在吸引域 $S = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 x_2 < k+1\}$ 内是渐近稳定的。说明当 $k = 1$ 和 $x_{10}x_{20} > 2$ 时，$x_1(t)$ 在有限时间内会发散到无穷。根据定理 2.5.1，设计一个全局镇定控制。

2.8 试判别系统

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 + x_1 x_2 \\
\dot{x}_2 &= u
\end{aligned}$$

是否是局部可反馈线性化的，是否是全局可反馈线性化的。试证明不存在状态反馈(α 是一个光滑函数)

$$u = \alpha(x_1, x_2), \qquad \alpha(0,0) = 0$$

使原点是全局渐近稳定的。

2.9 考虑系统(θ 为实数)

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 + \theta x_1^2 \\
\dot{x}_2 &= u
\end{aligned}$$

试证明不存在线性状态反馈控制

$$u = k_1 x_1 + k_2 x_2$$

使得原点是全局渐近稳定的。

提示：较难的一步是分析出在 $k_2 = 0$ 的情形下

$$\phi(x_1, x_2) = \exp\left(\frac{-2\theta x_2}{k_1}\right)\left(\frac{k_1 x_1^2}{2} + \frac{k_1^2}{4\theta^2} + \frac{k_1 x_2}{2\theta}\right)$$

是首次积分。

2.10 考虑系统($\theta = [\theta_1, \cdots, \theta_p]^{\mathrm{T}}$ 是定常参数向量)

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^{p} \theta_i q_i(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, p \leqslant n, f(0) = 0$$

证明如下命题：若在原点的一个邻域 $U_0 \subset \mathbb{R}^n$ 内

(i) $\mathrm{rank}\{q_1(x), \cdots, q_p(x)\} = p$,

(ii) $[q_i, q_j] = 0, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant p$,

则存在一个局部坐标变换 $z = \phi(x)$, $\phi(0) = 0$，使得系统变为

$$\begin{aligned}\dot{z}_i &= \theta_i + L_f \phi_i, \qquad 1 \leqslant i \leqslant p \\ \dot{z}_j &= L_f \phi_j + \sum_{i=1}^{p} \theta_i L_{q_i} \phi_j, \qquad p+1 \leqslant j \leqslant n\end{aligned}$$

2.11 考虑系统 ($\theta = [\theta_1, \cdots, \theta_p]^{\mathrm{T}}$ 是定常参数向量)

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^{p} \theta_i q_i(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n, p < n, f(0) = 0$$

证明如下命题：在原点的一个邻域 U_0 内，若存在一个对合分布 $\mathcal{D}$ 具有常数秩 $n - p$，且在 U_0 内满足

(i) $\mathrm{span}\{\mathcal{D}(x), q_1(x), \cdots, q_p(x)\} = n$,

(ii) $[q_j, X] \in \mathcal{D}, \forall X \in \mathcal{D}, 1 \leqslant j \leqslant p$,

(iii) $[q_i, q_j] \in \mathcal{D}, 1 \leqslant i, j \leqslant p$,

则存在一个局部坐标变换 $z = \phi(x), \phi(0) = 0$，使得系统变为

$$\begin{aligned}\dot{z}_i &= \theta_i + L_f \phi_i, \qquad 1 \leqslant i \leqslant p \\ \dot{z}_j &= L_f \phi_j, \qquad p+1 \leqslant j \leqslant n\end{aligned}$$

2.12 考虑系统

a) $\dot{x}_1 = x_2 - x_2^3$
$\dot{x}_2 = u$

b) $\dot{x}_1 = x_1 - x_2^2 u$
$\dot{x}_2 = u$

c) $\dot{x}_1 = -x_1^5 + x_2^4$
$\dot{x}_2 = x_1^2 + u$

确定它们是否为可状态线性化的或可反馈线性化的。如果可能，寻找一个光滑的状态反馈，使得原点是全局渐近稳定的。

2.13 试说明系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + \theta_1[\exp(x_1 + 2x_2 + x_3) - 1]\\ \dot{x}_2 &= x_3\\ \dot{x}_3 &= \theta_2 u\end{aligned}$$

对于任意正参数 θ_1 和 θ_2 不是可反馈线性化的。

2.14 试说明系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + \theta_1[\exp(x_1) - 1] + u\\ \dot{x}_2 &= \theta_2 x_1^3 + 2u\end{aligned}$$

对于任意参数 θ_1 和 θ_2 是可反馈线性化的，并计算以 θ_1 和 θ_2 为参数的线性化变换。

2.15 试说明系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 - x_1^2 u\\ \dot{x}_2 &= u\end{aligned}$$

是可反馈线性化的，并计算线性化变换。考虑系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + \gamma(x_1, x_2)u\\ \dot{x}_2 &= u\end{aligned}$$

试判别对于任意一个在原点为零的光滑函数 γ，系统是否都是可反馈线性化的？如果是，计算线性化变换。

2.16 考虑系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1^5 - x_2^3\\ \dot{x}_2 &= x_2 + u\end{aligned}$$

试说明

a) 该系统不是可反馈线性化的；

b) 由一个光滑状态反馈控制可使原点是全局渐近稳定的，并设计该控制。

2.17 考虑系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + x_1^2 x_2\\ \dot{x}_2 &= u\end{aligned}$$

a) 设计一个全局镇定状态反馈(一个解为: $u=-x_1^3-x_2$);

b) 说明无论对于多大的正数 $k>0$，$u=-kx_2$ 都不能使原点是全局渐近稳定的。

2.18 设计如下系统的全局镇定控制

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1^3+x_1x_2\\ \dot{x}_2 &= u\end{aligned}$$

2.19 考虑系统

$$\dot{x} = f(x)+h(x)q(x)+g(x)u, \qquad x\in\mathbb{R}^n$$

其中 $f(0)=0, g(x)\neq 0, \forall x\in\mathbb{R}^n$，假设存在一个径向无界的光滑正定函数 $V(x)$ 具有如下性质:

(i) $\langle dV, f\rangle$ 是在 $\mathbb{R}^n$ 上的负定函数，

(ii) $\langle dV, g\rangle = h(x)$，

试说明

$$u = -\langle dV, q\rangle$$

是一个全局镇定反馈。

2.20 考虑系统 $(f(0)=0, g(0)\neq 0)$

$$\dot{x} = f(x)+g(x)u, \qquad x\in\mathbb{R}^n$$

假设存在一个正定光滑函数 $V(x)$ 在原点的一个邻域内具有如下性质:

(i) $\langle dV, f\rangle$ 是一个负半定的函数，

(ii) $\langle dV, g\rangle = h(x)$，

(iii) $\operatorname{rank}\{dh, d(L_fh),\cdots,d(L_f^{n-1}h)\}=n$，

试说明 $u=-h(x)$ 是一个局部镇定反馈。

2.21 试说明系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2+1-\cos x_2+u\\ \dot{x}_2 &= -x_1-x_2+x_3-1+\mathrm{e}^{x_4}\\ \dot{x}_3 &= 1-\mathrm{e}^{x_4}\\ \dot{x}_4 &= \mathrm{e}^{-(x_3+x_4)}-\mathrm{e}^{-x_4}\cos x_2+\mathrm{e}^{-x_4}u\end{aligned}$$

不是可反馈线性化的。

2.22 试说明系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1^2 + (1 + x_1)x_2 \\ \dot{x}_2 &= u\end{aligned}$$

不是全局可反馈线性化的。设计一个全局镇定控制。

2.23 试说明系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1^3 + \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{-x_2}} - \frac{1}{2} \\ \dot{x}_2 &= u\end{aligned}$$

不是全局可反馈线性化的。

2.24 试说明多输入系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u_1 \\ \dot{x}_3 &= u_2 \\ \dot{x}_4 &= x_3 - x_3 u_1\end{aligned}$$

关于原点不是局部可反馈线性化的。

2.25 说明多输入系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_4 \cos x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_4 \sin x_3 \\ \dot{x}_3 &= u_1 \\ \dot{x}_4 &= u_2\end{aligned}$$

关于原点不是局部可反馈线性化的。并且设计一个状态反馈线性化控制，从任意初始条件 $x(0)$ 出发，其中 $x_4(0) > 0$，跟踪 $x_{\mathrm{r}1}(t) = \lambda t, x_{\mathrm{r}2}(t) = \lambda t, \lambda > 0$。

2.26 考虑系统($\theta_1 > 0, \theta_2 > 0$)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{\theta_1}{x_1^2} + x_1 x_4^2 + \theta_2 \cos u \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= -\frac{2x_2 x_4}{x_1} + \frac{\theta_2}{x_1} \sin u\end{aligned}$$

说明反馈线性化定理 2.2.1 不能应用于增广系统。
提示：回顾前述评注 2.2.6。

第 3 章　自适应反馈线性化

在这一章中，考虑单输入**不确定(uncertain)**系统

$$\dot{x} \;=\; f(x)+q(x,\theta(t))+g(x)u \triangleq \bar{f}(x,\theta(t))+g(x)u \tag{3.1}$$

其中 $x\in\mathbb{R}^n, u\in\mathbb{R}, \theta\in\Omega\subset\mathbb{R}^p$，并设 f 和 g 为已知的光滑向量场，$g(0)\neq 0$，$\theta(t)$ 为未知、时变且分段连续的干扰向量，属于 $\mathbb{R}^p$ 的紧子集 Ω。$f(x)$ 为标称向量场

$$f(x) \;=\; \bar{f}(x,\bar{\theta})$$

其中 $\bar{\theta}$ 为一个已知标称常向量。除非另外说明，我们假设存在一个不受 $\theta(t)$ 影响的孤立平衡点(不失一般性地取为原点 $x=0$)，即

$$f(0) \;=\; 0, \qquad q(0,\theta)=0, \qquad \forall\theta\in\Omega$$

假设函数

$$q(x,\theta) \;=\; \bar{f}(x,\theta)-\bar{f}(x,\bar{\theta})$$

是关于 x 和 θ 光滑的，且包含所有的不确定性。它可能包含参数已知时可精确建模的非线性、只有泛函边界已知的不确定非线性以及时变未知的干扰。由于第 2 章研究的方法要求系统没有干扰，并且精确已知参数和非线性，因此该方法在上述情形下不再适用。在第 1 章中，我们已看到了与一个未知参数 θ 相关或者含有不确定非线性的可反馈线性化系统的几个例子，这些系统的状态反馈镇定控制设计并不容易。

本章主要研究不确定系统的状态反馈控制设计问题。主要的目标是确定能够保证这种控制存在的几类不确定系统，并给出构造性的设计步骤。假设标称系统 (f,g) 是可局部状态反馈线性化的，我们研究在何种不确定性 $q(x,\theta(t))$ 的假设条件下能够设计状态反馈控制。3.1 节可允许不确定项应满足的条件，这个被称为三角型结构的条件是与坐标无关的。针对满足该条件的不确定系统，在 3.2 节中提出并解决了鲁棒镇定问题，其中允许干扰和/或不确定参数以非线性的形式加入系统，但要求其界已知。在 3.3 节中，设计了当干扰线性加入时的自校正调节器，它不要求不确定性的界已知。在 3.4 节中，针对干扰是常值参数的特殊情形，设计了模型参考自适应控制和自适应反馈线性化控制。3.5 节给出了在多输入系统中的推广。

3.1　匹配和三角型条件

本节在标称系统是可反馈线性化的假设下，给出了不确定性应满足的结构性条件，这些与状态坐标选择无关的条件刻画了本章所研究的一类不确定非线性系统。

定理 3.1.1　三角型不确定性(Triangular Uncertainties)　*如果系统 (3.1) 满足:*

(i) 标称系统 (f,g) 是局部(全局)可反馈线性化的，

(ii) 在原点的一个邻域 U_0 ($\mathbb{R}^n$ 中)内具有**严格三角型(strict triangularity)**结构

$$ad_q\mathcal{G}_i \subset \mathcal{G}_i, \qquad 0 \leqslant i \leqslant n-2 \tag{3.2}$$

则该系统局部(全局)反馈等价于

$$\begin{aligned} \dot{z}_j &= z_{j+1} + \phi_j(z_1, \cdots, z_j, \theta(t)), \qquad 1 \leqslant j \leqslant n-1 \\ \dot{z}_n &= v + \phi_n(z_1, \cdots, z_n, \theta(t)) \end{aligned} \tag{3.3}$$

□

证明: 由于标称系统 (f,g) 是局部(全局)可反馈线性化的，根据反馈线性化定理 2.2.1 (或其全局性定理 2.6.2)有：

(a) 分布 $\mathcal{G}_i = \mathrm{span}\{g, \cdots, ad_f^i g\}, 0 \leqslant i \leqslant n-1$是对合的，且在原点的一个邻域 U_0 (在 $\mathbb{R}^n$ 中)内具有常数秩 $i+1$；

(b) 存在函数 $h(x)$，使得在原点的一个邻域内(在 $\mathbb{R}^n$ 中)满足

$$\begin{aligned} \langle dh, ad_f^{n-1} g\rangle &\neq 0 \\ \langle dh, \mathcal{G}_{n-2}\rangle &= 0 \end{aligned}$$

且

$$z = (h(x), \cdots, L_f^{n-1}h(x)) = T(x) \tag{3.4}$$

是一个局部(全局)坐标变换，通过该坐标变换标称系统 (f,g) 变为

$$\begin{aligned} \dot{z}_j &= z_{j+1}, \qquad 1 \leqslant j \leqslant n-1 \\ \dot{z}_n &= L_f^n h + (L_g L_f^{n-1} h)u \triangleq v \end{aligned}$$

其中

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{n-1} h}(-L_f^n h + v)$$

(c) 在 z 坐标系下

$$\mathcal{G}_i = \mathrm{span}\left\{\frac{\partial}{\partial z_n}, \cdots, \frac{\partial}{\partial z_{n-i}}\right\}, \qquad 0 \leqslant i \leqslant n-1$$

因此，在 z 坐标系下闭环系统描述如下：

$$\begin{aligned} \dot{z}_j &= z_{j+1} + L_q L_f^{j-1} h, \qquad 1 \leqslant j \leqslant n-1 \\ \dot{z}_n &= v + L_q L_f^{n-1} h \end{aligned}$$

其中 q 可表示为

$$q = \sum_{j=1}^{n} L_q L_f^{j-1} h \frac{\partial}{\partial z_j} \triangleq \sum_{j=1}^{n} \phi_j \frac{\partial}{\partial z_j}$$

同时，在 z 坐标系下，严格三角型假设 (ii) 变为

$$\left[\sum_{j=1}^{n} \phi_j \frac{\partial}{\partial z_j}, \frac{\partial}{\partial z_k}\right] \in \mathrm{span}\left\{\frac{\partial}{\partial z_n}, \cdots, \frac{\partial}{\partial z_{n-i}}\right\}, \qquad n-i \leqslant k \leqslant n$$

$$0 \leqslant i \leqslant n-2$$

即

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial z_k}\phi_j\right)\frac{\partial}{\partial z_j} \in \operatorname{span}\left\{\frac{\partial}{\partial z_n},\cdots,\frac{\partial}{\partial z_{n-i}}\right\}, \qquad n-i \leqslant k \leqslant n$$

$$0 \leqslant i \leqslant n-2$$

这意味着

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z_k}\phi_j = 0, \qquad 1 &\leqslant j \leqslant n-i-1, \quad n-i \leqslant k \leqslant n \\ 0 &\leqslant i \leqslant n-2\end{aligned}$$

即

$$\frac{\partial}{\partial z_k}\phi_j = 0, \qquad j+1 \leqslant k \leqslant n, \quad 1 \leqslant j \leqslant n-1$$

由此可得

$$\phi_j = \phi_j(z_1,\cdots,z_j,\theta), \qquad 1 \leqslant j \leqslant n$$

综上所述，在 z 坐标系下闭环系统由式 (3.3) 给出。 □

评注 3.1.1　注意时变系统 (3.3) 是三角型的，通过将推论 2.2.3 直接推广到时变系统可知，它对于任何已知光滑的干扰 $\theta(t)$ 是可反馈线性化的。所得线性化坐标变换可能是时变的。 □

评注 3.1.2　在定理 3.1.1 中，若严格三角型假设的条件放宽到只要求在 U_0 内(在 $\mathbb{R}^n$ 中) 满足弱**三角型(triangularity)**假设

$$ad_q\mathcal{G}_i \subset \mathcal{G}_{i+1}, \qquad 0 \leqslant i \leqslant n-3 \tag{3.5}$$

则系统 (3.1) 局部 (全局) 反馈等价于

$$\begin{aligned}\dot{z}_j &= z_{j+1} + \phi_j(z_1,\cdots,z_{j+1},\theta(t)), \qquad 1 \leqslant j \leqslant n-1 \\ \dot{z}_n &= v + \phi_n(z_1,\cdots,z_n,\theta(t))\end{aligned}$$

上述结论可通过对定理 3.1.1 证明结果稍微修改得出。 □

例 3.1.1　系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + u \\ \dot{x}_2 &= x_3 + \theta x_1^2 + u \\ \dot{x}_3 &= u\end{aligned}$$

不满足严格三角型假设。事实上，记

$$\begin{aligned}g &= \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \\ f &= x_2\frac{\partial}{\partial x_1} + x_3\frac{\partial}{\partial x_2} \\ q &= x_1^2\frac{\partial}{\partial x_2}\end{aligned}$$

计算可得

$$ad_{(-f)}g = \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}$$

$$
\begin{aligned}
ad_{(-f)}^2 g &= \frac{\partial}{\partial x_1} \\
ad_q g &= -2x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}
\end{aligned}
$$

因此 $ad_q g$ 不属于 $\mathrm{span}\{g\}$。由于 $ad_q g$ 不属于 $\mathcal{G}_1 = \mathrm{span}\{g,\ ad_{(-f)}g\}$，三角型条件也不成立。应该注意 $\theta \neq 0$ 时系统不是可反馈线性化的。 □

评注 3.1.3 三角型假设意味着对于任意的局部坐标变换 (3.4)，均有

$$
q = \sum_{j=1}^{n} \phi_j(z_1, \cdots, z_{j+1}, \theta) \frac{\partial}{\partial z_j}
$$

在 $q \in \mathcal{G}_0$ 的特殊情形下有

$$
q = \phi_n(z, \theta) \frac{\partial}{\partial z_n}
$$

我们称之为**匹配条件(matching conditions)**。当 $q \in \mathcal{G}_1$ 时，即

$$
q = \phi_{n-1}(z, \theta) \frac{\partial}{\partial z_{n-1}} + \phi_n(z, \theta) \frac{\partial}{\partial z_n}
$$

我们称之为**推广匹配条件(extended matching conditions)**。匹配条件和推广匹配条件蕴涵着三角型条件。匹配条件也蕴涵着严格三角型条件。 □

例 3.1.2 考虑系统

$$
\dot{x} = Ax + bu + q(x, \theta(t))
$$

其中 (A, b) 是一个可控对。在这种情形下，匹配条件可表示为

$$
q(x, \theta) \in \mathrm{span}\{b\}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \theta \in \Omega
$$

而推广匹配条件可表示为

$$
q(x, \theta) \in \mathrm{span}\{b, Ab\}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \theta \in \Omega
$$

□

推论 3.1.1 **(匹配不确定性(Matching Uncertainties))** 若系统 (3.1) 在原点的一个邻域 U_0 (在 $\mathbb{R}^n$ 中)满足:

(i) 标称系统 (f, g) 是局部(全局)可反馈线性化的，

(ii) 匹配条件

$$
q \in \mathcal{G}_0, \qquad \forall \theta \in \Omega
$$

则该系统局部(全局)反馈等价于

$$
\begin{aligned}
\dot{z}_j &= z_{j+1}, \qquad 1 \leqslant j \leqslant n-1 \\
\dot{z}_n &= v + \phi_n(z_1, \cdots, z_n, \theta(t))
\end{aligned}
$$

□

推论 3.1.2 **推广匹配不确定性(Extended Matching Uncertainties)** 若系统 (3.1) 在原点的一个邻域 U_0 (在 $\mathbb{R}^n$ 中)内满足:

(i) 标称系统 (f,g) 是局部(全局)可反馈线性化的，

(ii) 推广匹配条件

$$q \in \mathcal{G}_1, \qquad \forall \theta \in \Omega$$

则该系统局部(全局)反馈等价于

$$\begin{aligned}
\dot{z}_j &= z_{j+1}, \qquad 1 \leqslant j \leqslant n-2 \\
\dot{z}_{n-1} &= z_n + \phi_{n-1}(z_1, \cdots, z_n, \theta(t)) \\
\dot{z}_n &= v + \phi_n(z_1, \cdots, z_n, \theta(t))
\end{aligned}$$

□

对于标称系统 (f,g) 是局部可部分状态反馈线性化为 r 阶三角型的情形，定理 3.1.1 可推广如下。

定理 3.1.2 若系统(3.1)在原点的一个邻域 U_0 内满足：

(i) 标称系统 (f,g) 是局部可部分状态反馈线性化为 r 阶三角型的，

(ii) $q \in \mathcal{G}_{r-1}$，

(iii) 严格三角型假设

$$ad_q\mathcal{G}_i \subset \mathcal{G}_i, \qquad 0 \leqslant i \leqslant r-2$$

则该系统局部反馈等价于

$$\begin{aligned}
\dot{\xi} &= \varphi(\xi, z_1), \qquad \xi \in \mathbb{R}^{n-r} \\
\dot{z}_j &= z_{j+1} + \phi_j(\xi, z_1, \cdots, z_j, \theta(t)), \qquad 1 \leqslant j \leqslant r-1 \\
\dot{z}_r &= v + \phi_r(\xi, z_1, \cdots, z_r, \theta(t))
\end{aligned}$$

□

证明: 根据定理 2.4.3，分布

$$\mathcal{G}_i = \text{span}\left\{g, \cdots, ad_f^i g\right\}$$

是对合的，在 U_0 内对于 $i = 0, \cdots, r-1$ 有常数秩 $i+1$，且可用部分线性化坐标 (ξ, z) 表示为

$$\mathcal{G}_i = \text{span}\left\{\frac{\partial}{\partial z_r}, \cdots, \frac{\partial}{\partial z_{r-i}}\right\}, \qquad 0 \leqslant i \leqslant r-1$$

由于 $q \in \mathcal{G}_{r-1}$，在(ξ, z)坐标系下有

$$q = \sum_{j=1}^{r} L_q L_f^{j-1} h \frac{\partial}{\partial z_j} \triangleq \sum_{j=1}^{r} \phi_j \frac{\partial}{\partial z_j}$$

在(ξ, z)坐标系下，严格三角型假设(iii)可表示为

$$\left[\sum_{j=1}^{r} \phi_j \frac{\partial}{\partial z_j}, \frac{\partial}{\partial z_k}\right] \in \text{span}\left\{\frac{\partial}{\partial z_r}, \cdots, \frac{\partial}{\partial z_{r-i}}\right\},$$

$$r-i \leqslant k \leqslant r, \quad 0 \leqslant i \leqslant r-2$$

即

$$\sum_{j=1}^{r}\left(\frac{\partial}{\partial z_k}\phi_j\right)\frac{\partial}{\partial z_j} \in \operatorname{span}\left\{\frac{\partial}{\partial z_r},\cdots,\frac{\partial}{\partial z_{r-i}}\right\},$$
$$r-i \leqslant k \leqslant r, \qquad 0 \leqslant i \leqslant r-2$$

这意味着

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z_k}\phi_j = 0, \qquad 1 &\leqslant j \leqslant r-i-1, \quad r-i \leqslant k \leqslant r \\ 0 &\leqslant i \leqslant r-2\end{aligned}$$

即

$$\frac{\partial}{\partial z_k}\phi_j = 0, \qquad 1 \leqslant j \leqslant r-1, \quad j+1 \leqslant k \leqslant r$$

或等价地

$$\phi_j = \phi_j(\xi, z_1, \cdots, z_j, \theta(t)), \qquad 1 \leqslant j \leqslant r$$

□

评注 3.1.4 如果不满足条件 $q \in \mathcal{G}_{r-1}$，但是满足引理 3.1.2 的其余两个条件，则系统 (3.1) 局部反馈等价于

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= \varphi_1(\xi, z_1) + \varphi_2(\xi, z_1, \theta(t)), \qquad \xi \in \mathbb{R}^{n-r} \\ \dot{z}_j &= z_{j+1} + \phi_j(\xi, z_1, \cdots, z_j, \theta(t)), \qquad 1 \leqslant j \leqslant r-1 \\ \dot{z}_r &= v + \phi_r(\xi, z_1, \cdots, z_j, \theta(t))\end{aligned}$$

定理 3.1.2 的条件 (ii) 保证 ξ 的动态不受干扰 $\theta(t)$ 影响。不过，当 $q \in \mathcal{G}_0$ 或 $q \in \mathcal{G}_1$ 时，仍分别称为匹配条件和推广匹配条件。 □

3.2 鲁棒镇定

这一节针对不确定时变干扰(或参数)属于一个已知紧集的一类非线性系统，讨论状态反馈镇定问题。这里将给出全局结果，只要要求的坐标变换是局部的，则相应的结果也将是局部性的结论。

定义 3.2.1 称一个静态状态反馈

$$u = k(x) \tag{3.6}$$

为系统 (3.1) 的一个局部**鲁棒状态反馈镇定控制 (robust state feedback stabilizing control)**，当其对应的闭环系统

$$\dot{x} = f(x) + g(x)k(x) + q(x, \theta(t))$$

的原点 $x = 0$ 对于任意 $\theta \in \Omega' \subset \Omega$ 是局部一致渐近稳定的，其中 k 是一个光滑函数映射 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，且 $k(0) = 0$，Ω' 是 Ω 的一个合适的紧子集。若对于任意的 $\theta \in \Omega$，原点是全局一致渐近稳定的，则称 u 为一个全局镇定鲁棒控制。 □

定理 3.2.1 鲁棒状态反馈镇定(Robust State Feedback Stabilization) 假设系统(3.1)满足:

(i) 标称系统(f,g)是全局可状态反馈线性化的;

(ii) $ad_q\mathcal{G}_i \subset \mathcal{G}_i, \quad 0 \leqslant i \leqslant n-2, \forall x \in \mathbb{R}^n$;

(iii) Ω是$\mathbb{R}^p$中一个已知紧集;

则存在全局静态状态反馈镇定控制。 □

证明: 由于假设标称系统(f,g)是全局可状态反馈线性化的，并且严格三角型假设(ii)成立，三角型不确定性定理3.1.1适用，因此一定存在一个全局坐标变换和一个状态反馈变换，将系统变为

$$\begin{aligned}\dot{z}_j &= z_{j+1} + \phi_j(z_1,\cdots,z_j,\theta(t)), \qquad 1 \leqslant j \leqslant n-1\\ \dot{z}_n &= v + \phi_n(z_1,\cdots,z_n,\theta(t))\end{aligned} \tag{3.7}$$

首先证明当$n=1$时，即对于系统

$$\dot{z}_1 = v + \phi_1(z_1,\theta(t))$$

定理成立。由于$\phi_1(z_1,\theta)$是一个光滑函数且$\phi_1(0,\theta)=0, \forall\theta\in\Omega$，可将其写为

$$\phi_1(z_1,\theta(t)) = z_1\psi_1(z_1,\theta(t))$$

其中ψ_1是一个光滑函数。由假设(iii)可知，Ω是一个已知的紧集，因此存在一个光滑函数$\alpha_1(z_1)$，使得

$$\psi_1(z_1,\theta) \leqslant \alpha_1(z_1), \qquad \forall\theta\in\Omega \tag{3.8}$$

定义控制

$$v = -k_1z_1 - z_1\alpha_1(z_1) \tag{3.9}$$

其中$k_1>0$，并考虑函数

$$V_1 = \frac{1}{2}z_1^2$$

及其对时间的导数

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 &= z_1\left[-k_1z_1 - z_1\alpha_1(z_1) + z_1\psi_1(z_1,\theta(t))\right]\\ &= -k_1z_1^2 - z_1^2\left[\alpha_1(z_1) - \psi_1(z_1,\theta(t))\right]\\ &\leqslant -k_1z_1^2\end{aligned}$$

这证明原点$z_1=0$是全局指数稳定的，根据定理B.1.6，$x_1=0$是全局一致渐近稳定的。现在，使用归纳法证明如下命题。

命题 如果存在$i-1$个光滑函数

$$v_1(z_1),\cdots,v_{i-1}(z_1,\cdots,z_{i-1})$$

和一个光滑状态反馈镇定控制

$$v = v_i(z_1,\cdots,z_i)$$

其中

$$v_j(0,\cdots,0) = 0, \qquad 1 \leqslant j \leqslant i$$

使得对于系统

$$\begin{aligned}\dot{z}_j &= z_{j+1} + \phi_j(z_1,\cdots,z_j,\theta(t)), \qquad 1 \leqslant j \leqslant i-1 \\ \dot{z}_i &= v + \phi_i(z_1,\cdots,z_i,\theta(t))\end{aligned}$$

函数

$$V_i = \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{i}[z_j - v_{j-1}(z_1,\cdots,z_{j-1})]^2 + \frac{1}{2}z_1^2$$

及其对时间的导数($k_1 > 0$, $k_j > i$, $2 \leqslant j \leqslant i$)满足

$$\dot{V} \leqslant -k_1 z_1^2 - \sum_{j=2}^{i}(k_j - i + 1)\left[z_j - v_{j-1}(z_1,\cdots,z_{j-1})\right]^2$$

则存在光滑状态反馈镇定控制

$$v = v_{i+1}(z_1,\cdots,z_{i+1})$$

其中 $v_{i+1}(0,\cdots,0) = 0$，使得对于系统

$$\begin{aligned}\dot{z}_j &= z_{j+1} + \phi_j(z_1,\cdots,z_j,\theta(t)), \qquad 1 \leqslant j \leqslant i \\ \dot{z}_{i+1} &= v + \phi_{i+1}(z_1,\cdots,z_{i+1},\theta(t))\end{aligned} \tag{3.10}$$

函数

$$V_{i+1} = \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{i+1}[z_j - v_{j-1}(z_1,\cdots,z_{j-1})]^2 + \frac{1}{2}z_1^2$$

对时间的导数有 ($k_{i+1} > i$)满足

$$\dot{V}_{i+1} \leqslant -k_1 z_1^2 - \sum_{j=2}^{i+1}(k_j - i)\left[z_j - v_{j-1}(z_1,\cdots,z_{j-1})\right]^2$$

命题的证明: 对于系统 (3.10) 进行全局坐标变换

$$\tilde{z}_1 = z_1, \tilde{z}_j = z_j - v_{j-1}(z_1,\cdots,z_{j-1}), \qquad 2 \leqslant j \leqslant i+1$$

计算

$$V_{i+1} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{i+1}\tilde{z}_j^2$$

对时间的导数可知如下不等式成立：

$$\dot{V}_{i+1} \leqslant -k_1\tilde{z}_1^2 - \sum_{j=2}^{i}(k_j - i + 1)\tilde{z}_j^2 + \tilde{z}_i\tilde{z}_{i+1} + \tilde{z}_{i+1}\dot{\tilde{z}}_{i+1} \tag{3.11}$$

其中

$$\dot{\tilde{z}}_{i+1} = v + \phi_{i+1} - \sum_{j=1}^{i}\frac{\partial v_i}{\partial z_j}\dot{z}_j$$

$$
\begin{aligned}
&= v+\phi_{i+1}(z_1,\cdots,z_{i+1},\theta(t))-\sum_{j=1}^{i}\frac{\partial v_i}{\partial z_j}(z_{j+1}+\phi_j(z_1,\cdots,z_j,\theta(t)))\\
&\triangleq v+\bar{\phi}_{i+1}(Z_{i+1},\theta(t)) \qquad (3.12)
\end{aligned}
$$

且 $Z_{i+1}=[z_1,\cdots,z_{i+1}]^{\mathrm{T}}$。由于 $\bar{\phi}_{i+1}(Z_{i+1},\theta)$ 是一个光滑函数，且 $\bar{\phi}_{i+1}(0,\theta)=0,\forall\theta\in\Omega$，可以将其表示为

$$
\bar{\phi}_{i+1}(Z_{i+1},\theta) = \sum_{j=1}^{i+1} z_j\psi_j(Z_{i+1},\theta)
$$

其中 $\psi_j,\ 1\leqslant j\leqslant i+1$ 是光滑函数。又由于 $\theta\in\Omega$，Ω 是一个已知的紧集，因此存在一个光滑函数 $\alpha_{i+1}(Z_{i+1})$，使得

$$
|\psi_j(Z_{i+1},\theta(t))|\leqslant\frac{\alpha_{i+1}(Z_{i+1})}{i+1},\qquad \forall\theta\in\Omega,\quad 1\leqslant j\leqslant i+1 \qquad (3.13)
$$

将式 (3.12) 代入式 (3.11) 中，并考虑式 (3.13)，可得

$$
\begin{aligned}
\dot{V}_{i+1} &\leqslant -k_1\tilde{z}_1^2-\sum_{j=2}^{i}(k_j-i+1)\tilde{z}_j^2+\tilde{z}_{i+1}(\tilde{z}_i+v)\\
&\quad+|\tilde{z}_{i+1}|\sum_{j=1}^{i+1}|z_j|\,|\psi_j(Z_{i+1},\theta)|\\
&\leqslant -k_1\tilde{z}_1^2-\sum_{j=2}^{i}(k_j-i+1)\tilde{z}_j^2+\tilde{z}_{i+1}(\tilde{z}_i+v)\\
&\quad+|\tilde{z}_{i+1}|\,\|Z_{i+1}\|\,\alpha_{i+1}(Z_{i+1}) \qquad (3.14)
\end{aligned}
$$

定义状态反馈控制

$$
\begin{aligned}
v &= v_{i+1}(z_1,\cdots,z_{i+1})\\
&= -\tilde{z}_i-(k_{i+1}-i+1)\tilde{z}_{i+1}-\frac{1}{4}\tilde{z}_{i+1}\alpha_{i+1}^2(Z_{i+1}) \qquad (3.15)
\end{aligned}
$$

将式 (3.15) 代入式 (3.14)，得到

$$
\begin{aligned}
\dot{V}_{i+1} &\leqslant -k_1\tilde{z}_1^2-\sum_{j=2}^{i+1}(k_j-i+1)\tilde{z}_j^2\\
&\quad+|\tilde{z}_{i+1}|\,\|Z_{i+1}\|\,\alpha_{i+1}(Z_{i+1})-\frac{1}{4}\tilde{z}_{i+1}^2\alpha_{i+1}^2(Z_{i+1})\\
&\leqslant -k_1\tilde{z}_1^2-\sum_{j=2}^{i+1}(k_j-i)\tilde{z}_j^2-\left(\|Z_{i+1}\|-\frac{1}{2}\alpha_{i+1}\,|\tilde{z}_{i+1}|\right)^2\\
&\leqslant -k_1\tilde{z}_1^2-\sum_{j=2}^{i+1}(k_j-i)\tilde{z}_j^2
\end{aligned}
$$

命题证毕。

应用该命题 $n-1$ 次，则可迭代地建立一个光滑状态反馈控制，使得对于闭环系统，正定径向无界函数

$$
V_n = \frac{1}{2}\tilde{z}_1^2+\frac{1}{2}\sum_{j=2}^{n}[z_j-v_{j-1}(z_1,\cdots,z_{j-1})]^2
$$

具有负定的时间导数(对于合适的 k_j)，即

$$\dot{V}_n \leqslant -k_1 z_1^2 - \sum_{j=2}^{n}(k_j - n + 1)\left[z_j - v_{j-1}(z_1, \cdots, z_{j-1})\right]^2 \tag{3.16}$$

因此，根据定理B.1.6，平衡点 $(z_1, \tilde{z}_2, \cdots .\tilde{z}_n) = 0$ 是全局指数稳定的，这表明 $x = 0$ 是全局一致渐近稳定的。 □

例 3.2.1 考虑系统

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + x_1^\theta, \qquad 1 \leqslant \theta \leqslant 2 \\ \dot{x}_2 &= u \end{aligned}$$

虽然，满足定理3.2.1的条件。由式(3.9)，定义

$$v_1(x_1) = -k_1 x_1 - \alpha_1(x_1)x_1$$

其中，参见式(3.8)，

$$\alpha_1(x_1) = \sqrt{1 + x_1^2} \geqslant \frac{x_1^\theta}{x_1} = \psi_1(x_1, \theta), \qquad \forall \theta \in [1, 2]$$

且坐标变换为

$$\tilde{x}_2 = x_2 - v_1(x_1)$$

则 $\tilde{x}_2$ 的动态为

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_2 &= \dot{x}_2 - \dot{v}_1 = u + k_1(x_2 + x_1^\theta) + \sqrt{1 + x_1^2}(x_2 + x_1^\theta) \\ &\quad + x_1 \frac{x_1(x_2 + x_1^\theta)}{\sqrt{1 + x_1^2}} \\ &= u + k_1 x_2 + \sqrt{1 + x_1^2}x_2 + \frac{x_1^2 x_2}{\sqrt{1 + x_1^2}} + k_1 x_1^\theta \\ &\quad + \sqrt{1 + x_1^2}x_1^\theta + \frac{x_1^2}{\sqrt{1 + x_1^2}}x_1^\theta \\ &= u + x_2\left(k_1 + \sqrt{1 + x_1^2} + \frac{x_1^2}{\sqrt{1 + x_1^2}}\right) \\ &\quad + x_1\left(k_1 + \sqrt{1 + x_1^2} + \frac{x_1^2}{\sqrt{1 + x_1^2}}\right)x_1^{\theta - 1} \end{aligned}$$

根据式(3.15)，最终的控制 u 给定如下：

$$u = -x_1 - k_2\tilde{x}_2 - \frac{1}{4}\tilde{x}_2\alpha_2^2(x_1, x_2)$$

回想式(3.13)，其中

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_2(x_1, x_2)}{2} &= \left(k_1 + \sqrt{1 + x_1^2} + \frac{x_1^2}{\sqrt{1 + x_1^2}}\right)\sqrt{1 + x_1^2} \\ &= 1 + 2x_1^2 + k_1\sqrt{1 + x_1^2} \end{aligned}$$

□

定理 3.2.2 考虑系统

$$\dot{z} = Az + bu + \begin{bmatrix} \phi_1(z,\theta(t)) \\ \vdots \\ \phi_n(z,\theta(t)) \end{bmatrix}, \qquad z \in \mathbb{R}^n$$

其中 (A, b) 具有控制器标准型 (2.12)。若

$$|\phi_i(z,\theta)| \leqslant \mu_i \left\| [z_1, \cdots, z_i]^{\mathrm{T}} \right\|, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n, \forall \theta \in \Omega$$

其中μ_i为已知的 Lipschitz 常数，则存在一个静态线性的全局鲁棒状态反馈镇定控制器。 □

证明: 系统本身不一定满足严格三角型假设，但是其界函数满足该假设。因此，由于满足式 (3.8) 和式 (3.13) 的函数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 可选为常数，以使相应的控制是线性的，故证明可直接参照定理 3.2.1。 □

例 3.2.2 考虑系统

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + x_1 \sin t^2 \\ \dot{x}_2 &= u \end{aligned}$$

由于 $\left|x_1 \sin t^2\right| \leqslant |x_1|$，定理 3.2.2 适用，其中 $\mu_1 = 1, \mu_2 = 0$，因此能够设计一个线性镇定控制器。参照定理 3.2.1 的证明，见式 (3.9)，定义

$$v_1(x_1) = -k_1 x_1 - x_1$$

根据式 (3.15)，选择控制 u 为

$$u = -x_1 - k_2(x_2 - v_1) - \frac{1}{4}(x_2 - v_1)\alpha_2^2$$

其中由式 (3.13) 有 $\alpha_2 = 2(k_1 + 1)$。如果假设干扰 $\sin t^2$ 精确已知，也可以采用状态反馈线性化方法，得到非线性时变控制算法

$$u = -k_1 x_1 - k_2(x_2 + x_1 \sin t^2) - (x_2 + x_1 \sin t^2) \sin t^2 - 2x_1 t \cos t^2$$

□

3.3 自校正调节器

本节不再像 3.2 节那样假设干扰取值的紧集 Ω 是已知的，而要求系统关于干扰是线性的。上一节的鲁棒控制算法是基于最劣情形设计的，关键是要求集合 Ω 为已知。本节所设计的控制器不要求集合 Ω 已知，而是调整其自身的参数。这也是我们将该控制器称为自校正调节器的原因。

定义 3.3.1 **一个动态状态反馈控制(dynamic state feedback control)**

$$\begin{aligned} \dot{k}_i &= \mu_i(x, k_1, \cdots, k_s), \qquad 1 \leqslant i \leqslant s \\ u &= u(x, k_1, \cdots, k_s) \end{aligned} \tag{3.17}$$

称为是系统 (3.1) 的一个局部**动态状态反馈调节器(dynamic state feedback regulator)**，其中 μ_i 和 u 是 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$ 上的光滑函数映射，且满足 $\mu_i(0, k_1, \cdots, k_s) = 0$, $\mu(0, k_1, \cdots, k_s) = 0$，若对于任意 $\theta \in \Omega' \subset \Omega$，$\Omega'$ 是 Ω 的一个合适的紧子集，闭环系统满足:

(i) 对于 $\forall t \geqslant 0, \|x(t)\|$ 和 $k_i(t), 1 \leqslant i \leqslant s$ 是有界的，

(ii) $\lim_{t\to\infty} \|x(t)\| = 0$。

若对于任何 $\theta \in \Omega$，条件 (i) 和条件 (ii) 全局成立，则称控制式(3.17)为一个全局动态状态反馈调节器。 □

在给出主要结果之前，我们给出一个技术性的定义。

定义 3.3.2 **滤波变换(Filtered Transformation)** 一个滤波变换可定义为一个时变状态空间坐标变换

$$z = T(x,\xi), \qquad z \in \mathbb{R}^n$$

这里 $T(x,\xi) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^n$ 是 x, ξ 的一个光滑函数，且 $\xi(t)$ 是一个由**滤波器(filter)**

$$\dot{\xi} = \lambda(\xi, x), \qquad \xi \in \mathbb{R}^s$$

产生的信号，从而存在一个光滑函数 $S(z,\xi) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^n$ 满足

$$z = T(S(z,\xi),\xi), \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^s$$

□

定理 3.3.1 **自校正状态反馈调节器(Self-Tuning State Feedback Regulator)** 假设系统(3.1)满足如下条件：

(i) 标称系统 (f,g) 是全局可状态反馈线性化的；

(ii) 不确定性是线性参数化的，即

$$q(x,\theta(t)) = \sum_{i=1}^{p} q_i(x)\theta_i(t)$$

(iii) 严格三角型假设

$$ad_{q_j}\mathcal{G}_i \subset \mathcal{G}_i, \qquad 1 \leqslant i \leqslant p, 0 \leqslant j \leqslant n-2, \forall x \in \mathbb{R}^n$$

则存在一个最大阶数为 n 的全局动态状态反馈调节器。 □

评注 3.3.1 与定理 3.2.1 相比，定理 3.3.1 要求更严格的线性参数化条件。但另一方面，它对紧集 Ω 不做任何假设要求，而定理 3.2.1 要求 Ω 是一个已知的紧集。 □

定理 3.3.1 **的证明**: 由全局反馈线性化和严格三角型假设，定理 3.1.1 保证存在一个全局状态反馈变换，将系统变为

$$\begin{aligned}
\dot{z}_j &= z_{j+1} + \sum_{i=1}^{p} \phi_{ji}(z_1, \cdots, z_j)\theta_i, \qquad 1 \leqslant j \leqslant n-1 \\
\dot{z}_n &= v + \sum_{i=1}^{p} \phi_{ni}(z_1, \cdots, z_n)\theta_i
\end{aligned} \tag{3.18}$$

首先，证明当$n=1$时，对于系统(3.18)，

$$\dot{z}_1 = v+\sum_{i=1}^{p}\phi_{1i}(z_i)\theta_i$$

定理成立。因为$\phi_{1i}(z_1), 1\leqslant i\leqslant p$是光滑函数，且满足$\phi_{1i}(0)=0$，因此有

$$\phi_{1i}(z_1) = z_1\psi_{1i}(z_1), \qquad 1\leqslant i\leqslant p$$

其中$\psi_{1i}(z_1)$是光滑函数。又由于Ω是一个(可能未知的)紧集，因此能够确定一个光滑函数$\alpha_1(z_1)$，使得

$$\left|\sum_{i=1}^{p}\psi_{1i}(z_1)\theta_i(t)\right| \leqslant \mu_1\alpha_1(z_1) \tag{3.19}$$

其中μ_1是一个合适的未知正常数。考虑动态控制

$$v = v_1(z_1,\hat{\mu}_1)=-k_1z_1-\hat{\mu}\alpha_1(z_1)z_1 \tag{3.20}$$

$$\dot{\hat{\mu}}_1 = z_1^2\alpha_1(z_1) \tag{3.21}$$

其中未知常数μ_1的可调估计值为$\hat{\mu}_1$，及函数

$$V_1 = \frac{1}{2}(z_1^2+\tilde{\mu}_1^2)$$

其中$\tilde{\mu}_1=\mu_1-\hat{\mu}_1$。沿闭环系统的时间导数为

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1 &= -k_1z_1^2+z_1^2\left[\sum_{i=1}^{p}\psi_{1i}(z_1)\theta_i-\hat{\mu}_1\alpha_1(z_1)\right]-\tilde{\mu}_1z_1^2\alpha_1(z_1)\\
&= -k_1z_1^2+z_1^2\left[\sum_{i=1}^{p}\psi_{1i}(z_1)\theta_i-\mu_1\alpha_1(z_1)\right]+\tilde{\mu}_1\left[z_1^2\alpha_1(z_1)-z_1^2\alpha_1(z_1)\right]\\
&\leqslant -k_1z_1^2
\end{aligned}$$

这证明z_1和$\hat{\mu}_1$是有界的，相应地$\dot{z}_1$也有界。另一方面

$$\lim_{t\to\infty}k_1\int_0^t z_1^2(\tau)d\tau\leqslant\lim_{t\to\infty}-\int_0^t\dot{V}_1(\tau)d\tau = V_1(0)-\lim_{t\to\infty}V_1(t)<\infty$$

因此，将推论B.2.1应用到$z_1(t)$，可得

$$\lim_{t\to\infty}z_1(t) = 0$$

下面使用归纳法进行证明。

命题 假设存在一个滤波变换

$$\begin{aligned}
\tilde{z}_1 &= z_1\\
\tilde{z}_j &= z_j-v_{j-1}(Z_{j-1},\hat{\mu}_1,\cdots,\hat{\mu}_{j-1}), \qquad 2\leqslant j\leqslant i\\
\dot{\hat{\mu}}_j &= \eta_j(Z_j,\hat{\mu}_1,\cdots,\hat{\mu}_{j-1}), \qquad 1\leqslant j\leqslant i-1
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
v_{j-1}(0,\hat{\mu}_1,\cdots,\hat{\mu}_{j-1}) &= 0\\
\eta_j(0,\hat{\mu}_1,\cdots,\hat{\mu}_{j-1}) &= 0\\
Z_j &= [z_1,\cdots,z_j]^{\mathrm{T}}
\end{aligned}$$

以及一个动态控制

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\mu}}_i &= \eta_i(Z_i, \hat{\mu}_1, \cdots, \hat{\mu}_{i-1})\\ v &= v_i(Z_i, \hat{\mu}_1, \cdots, \hat{\mu}_i)\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\eta_i(0, \hat{\mu}_1, \cdots, \hat{\mu}_{i-1}) &= 0\\ v_i(0, \hat{\mu}_1, \cdots, \hat{\mu}_i) &= 0\end{aligned}$$

使得对于 $n = i$ 时的闭环系统 (3.18)，函数

$$V_i = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{i}(\tilde{z}_j^2 + \tilde{\mu}_j^2) \tag{3.22}$$

对时间的导数满足不等式

$$\dot{V}_i \leqslant -\sum_{j=1}^{i}(k_j - i + 1)\tilde{z}_j^2 \tag{3.23}$$

其中 $\tilde{\mu}_j = \mu_j - \hat{\mu}_j$，$\mu_j$ 是一个合适的常数，$k_j > i, 1 \leqslant j \leqslant i$，则存在一个动态控制

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\mu}}_{i+1} &= \eta_{i+1}(Z_{i+1}, \hat{\mu}_1, \cdots, \hat{\mu}_i)\\ v &= v_{i+1}(Z_{i+1}, \hat{\mu}_1, \cdots, \hat{\mu}_{i+1})\end{aligned} \tag{3.24}$$

其中

$$\begin{aligned}\eta_{i+1}(0, \hat{\mu}_1, \cdots, \hat{\mu}_i) &= 0\\ v_{i+1}(0, \hat{\mu}_1, \cdots, \hat{\mu}_{i+1}) &= 0\end{aligned} \tag{3.25}$$

以及一个滤波变换

$$\begin{aligned}\tilde{z}_1 &= z_1\\ \tilde{z}_j &= z_j - v_{j-1}(Z_{j-1}, \hat{\mu}_1, \cdots, \hat{\mu}_{j-1}), \qquad 2 \leqslant j \leqslant i+1\\ \dot{\hat{\mu}}_j &= \eta_j(Z_j, \hat{\mu}_1, \cdots, \hat{\mu}_{j-1}), \qquad 1 \leqslant j \leqslant i\end{aligned}$$

使得对于 $n = i + 1$ 时的闭环系统 (3.18)，函数

$$V_{i+1} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{i+1}(\tilde{z}_j^2 + \tilde{\mu}_j^2) = V_i + \frac{1}{2}(\tilde{z}_{i+1}^2 + \tilde{\mu}_{i+1}^2)$$

对时间的导数满足

$$\dot{V}_{i+1} \leqslant -\sum_{j=1}^{i+1}(k_j - i)\tilde{z}_j^2$$

其中 $\tilde{\mu}_{i+1} = \mu_{i+1} - \hat{\mu}_{i+1}$，$\mu_{i+1}$ 是一个合适的常数，$k_{i+1} > i$。

命题的证明: 对于 $n = i + 1$ 时的系统 (3.18)，在 $\tilde{z}$ 坐标下，考虑函数

$$\bar{V}_{i+1} = V_i + \frac{1}{2}\tilde{z}_{i+1}^2$$

则由式 (3.23) 的假设有

$$\dot{\bar{V}}_{i+1} \leqslant -\sum_{j=1}^{i}(k_j - i + 1)\tilde{z}_j^2 + \tilde{z}_{i+1}(\tilde{z}_i + \dot{\tilde{z}}_{i+1}) \tag{3.26}$$

其中

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{z}}_{i+1} &= v + \sum_{\ell=1}^{p}\phi_{i+1,\ell}(Z_{i+1})\theta_\ell - \sum_{j=1}^{i}\left[\frac{\partial v_i}{\partial z_j}\left(z_{j+1} + \sum_{\ell=1}^{p}\phi_{j\ell}(Z_j)\theta_\ell\right)\right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial v_i}{\partial \hat{\mu}_j}\eta_j(Z_j, \hat{\mu}_1, \cdots, \hat{\mu}_{j-1})\right] \end{aligned} \tag{3.27}$$

因为可以表示为

$$\sum_{\ell=1}^{p}\left[\phi_{i+1,\ell}(Z_{i+1}) - \sum_{j=1}^{i}\frac{\partial v_i}{\partial z_j}\phi_{j\ell}(Z_j)\right]\theta_\ell \triangleq \sum_{\ell=1}^{p}\sum_{j=1}^{i+1} z_j\psi_{\ell j}(Z_{i+1}, \hat{\mu}_1, \cdots, \hat{\mu}_i)\theta_\ell$$

且 Ω 是一个紧集，因此可以确定一个光滑函数 α_{i+1}，使得对于 $1 \leqslant j \leqslant i+1$ 和一个合适的正常数 μ_{i+1}，有

$$\left|\sum_{\ell=1}^{p}\psi_{\ell j}(Z_{i+1}, \hat{\mu}_1, \cdots, \hat{\mu}_i)\theta_\ell\right| \leqslant 2\frac{\sqrt{\mu_{i+1}}}{i+1}\left|\alpha_{i+1}(Z_{i+1}, \hat{\mu}_1, \cdots, \hat{\mu}_i)\right| \tag{3.28}$$

又因为未假设紧集 Ω 已知，因而 μ_{i+1} 也是未知的。定义动态控制

$$\begin{aligned} v &= v_{i+1}(Z_i, \hat{\mu}_1, \cdots, \hat{\mu}_i) = -\tilde{z}_i - (k_{i+1} - i + 1)\tilde{z}_{i+1} \\ &\quad + \sum_{j=1}^{i}\left[\frac{\partial v_i}{\partial \hat{\mu}_j}\eta_j(Z_j, \hat{\mu}_1, \cdots, \hat{\mu}_{j-1}) + \frac{\partial v_i}{\partial z_j}z_{j+1}\right] - \hat{\mu}_{i+1}\tilde{z}_{i+1}\alpha_{i+1}^2 \\ \dot{\hat{\mu}}_{i+1} &= \tilde{z}_{i+1}^2\alpha_{i+1}^2 \end{aligned} \tag{3.29}$$

从而由式 (3.26)~式 (3.29)，得

$$\begin{aligned} \dot{\bar{V}}_{i+1} &\leqslant -\sum_{j=1}^{i+1}(k_j - i)\tilde{z}_j^2 + 2\left|\tilde{z}_{i+1}\right|\left\|\tilde{Z}_{i+1}\right\|\left|\alpha_{i+1}\right|\sqrt{\mu_{i+1}} \\ &\quad -\hat{\mu}_{i+1}\tilde{z}_{i+1}^2\alpha_{i+1}^2 - \left\|\tilde{Z}_{i+1}\right\|^2 \end{aligned}$$

其中 $\tilde{Z}_i = [\tilde{z}_1, \cdots, \tilde{z}_i]^{\mathrm{T}}$。令 $\tilde{\mu}_{i+1} = \mu_{i+1} - \hat{\mu}_{i+1}$，且考虑

$$V_{i+1} = \bar{V}_{i+1} + \frac{1}{2}\tilde{\mu}_{i+1}^2$$

从而有

$$\begin{aligned} \dot{V}_{i+1} &\leqslant -\sum_{j=1}^{i+1}(k_j - i)\tilde{z}_j^2 - (\sqrt{\mu_{i+1}}\|\tilde{Z}_{i+1}\|\left|\alpha_{i+1}\right| - \|\tilde{Z}_{i+1}\|)^2 \\ &\leqslant -\sum_{j=1}^{i+1}(k_j - i)\tilde{z}_j^2 \end{aligned}$$

命题证毕。

应用该命题 $n-1$ 次，能够构建一个动态状态反馈控制

$$v = v_{n+1}(z, \hat{\mu}_1, \cdots, \hat{\mu}_n) \tag{3.30}$$

$$\dot{\hat{\mu}}_i = \eta_i(z_1, \cdots, z_i, \hat{\mu}_1, \cdots, \hat{\mu}_{i-1}), \qquad 1 \leqslant i \leqslant n \tag{3.31}$$

使得对于相应的闭环系统，函数

$$V_n = \frac{1}{2}(\tilde{z}^{\mathrm{T}}\tilde{z} + \tilde{\mu}^{\mathrm{T}}\tilde{\mu}) \tag{3.32}$$

对时间的导数满足不等式

$$\dot{V}_n \leqslant -\sum_{i=1}^{n}(k_i - n + 1)\tilde{z}_i^2 \tag{3.33}$$

其中 $\tilde{z} = [\tilde{z}_1, \cdots, \tilde{z}_n]^{\mathrm{T}}$，$\tilde{\mu} = [\tilde{\mu}_1, \cdots, \tilde{\mu}_n]^{\mathrm{T}}$，$k_i$ 可以任意选择。从式(3.32)和式(3.33)可知，$\|\tilde{z}(t)\|$ 和 $\|\tilde{\mu}(t)\|$ 是有界的(对于合适的 k_i)，并且由式(3.31)知，$v(t)$ 也是有界的。方程(3.18)表明 $\|\dot{z}(t)\|$ 是有界的，相应地 $\|\dot{\tilde{z}}(t)\|$ 是有界的。进而由式(3.32)和式(3.33)有

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t \tilde{z}^{\mathrm{T}}(\tau)\tilde{z}(\tau)d\tau < \infty$$

根据推论 B.2.1，上式说明

$$\lim_{t\to\infty}\|\tilde{z}(t)\| = 0$$

相应地

$$\lim_{t\to\infty}\|x(t)\| = 0$$

□

评注 3.3.2 定理3.3.1中的自校正动态调节器的阶数最多是 n，因此与向量 θ 的维数是无关的。在式(3.19)和式(3.28)中，参数 θ 的线性特性对于引入未知常数 μ_i 是至关重要的。μ_i 的估计值 $\hat{\mu}_i$ 在动态调节器中在线修正，也是将该调节器称为自校正的原因。如果紧集 Ω 是已知的，则不需要估计值 $\hat{\mu}_i$，且自校正调节器和3.2节中设计的鲁棒镇定控制是一致的。 □

例 3.3.1 考虑系统

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + \theta_1(t)x_1^2 + \theta_2(t)x_1^3 \\ \dot{x}_2 &= u \end{aligned} \tag{3.34}$$

其中 $\theta_1(t)$ 和 $\theta_2(t)$ 是有界干扰。虽然，系统(3.34)满足定理3.3.1的条件。参照定理3.3.1的证明，根据式(3.20)，定义

$$v_1(x_1, \hat{\mu}_1) = -k_1x_1 - \hat{\mu}_1x_1\alpha_1(x_1)$$

其中 $k_1 > 1$，并且根据式(3.19)，$\alpha_1(x_1)$ 可选为

$$\alpha_1(x_1) = 1 + x_1^2$$

根据式(3.21)，$\hat{\mu}_1$ 的动态为

$$\dot{\hat{\mu}}_1 = x_1^2\alpha_1(x_1)$$

定义

$$\tilde{x}_2 = x_2 - v_1(x_1, \hat{\mu}_1)$$

由式(3.29)，最终的控制 u 给定如下：

$$u = v_2 = -x_1 - k_2\tilde{x}_2 - \hat{\mu}_2\tilde{x}_2\alpha_2^2(x_1, \hat{\mu}_1) - \dot{\hat{\mu}}_1x_1\alpha_1(x_1) - \frac{\partial v_1}{\partial x_1}x_2$$

其中 $k_2 > 0$，且有

$$\dot{\hat{\mu}}_2 = \tilde{x}_2^2 \alpha_2^2(x_1, \hat{\mu}_1)$$

对于 μ_2 的某些未知值，函数 α_2 必须满足不等式 (3.28)，而对于系统 (3.34)，该不等式变为

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial v_1}{\partial x_1}(\theta_1(t)x_1 + \theta_2(t)x_1^2)\right| &= \left|k_1 + \hat{\mu}_1(1+3x_1^2)\right| \left|\theta_1(t)x_1 + \theta_2(t)x_1^2\right| \\ &\leqslant \sqrt{\mu_2}\,|\alpha_2(x_1, \hat{\mu}_1)|\end{aligned}$$

α_2 的一个可能选择是

$$\alpha_2(x_1, \hat{\mu}_1) = [k_1 + \hat{\mu}_1(1+3x_1^2)](1+2x_1^2)$$

□

利用定理 3.3.1 的证明，可以将定理 3.2.2 进行推广，以确定一族线性系统的自校正调节器，这一族线性系统具有控制器标准型，同时存在全局 Lipschitz 非线性摄动，并且该非线性摄动具有非线性化参数和未知 Lipschitz 常数。

定理 3.3.2 *考虑系统*

$$\dot{z} = Az + bu + \begin{bmatrix} \phi_1(z, \theta(t)) \\ \vdots \\ \phi_n(z, \theta(t)) \end{bmatrix}, \qquad z \in \mathbb{R}^n$$

其中 (A, b) 具有控制器标准型 (2.12)。如果

$$|\phi_i(z, \theta)| \leqslant \mu_i \left\|[z_1, \cdots, z_i]^{\mathrm{T}}\right\|, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n, \forall \theta \in \Omega \tag{3.35}$$

其中 μ_i 为未知 Lipschitz 常数，则存在一个 n 阶的全局状态反馈动态调节器。 □

证明: 虽然该系统不满足严格的三角型和线性参数化假设，但式 (3.35) 中的界函数满足该假设条件，因此可以参照定理 3.3.1 中用到的论据。 □

例 3.3.2 考虑系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + \theta(t)x_1 \sin x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= u\end{aligned}$$

其中 $\theta(t)$ 属于未知区间 $[\theta_{\mathrm{m}}, \theta_{\mathrm{M}}]$。因为

$$|\theta(t)x_1 \sin x_3| \leqslant \max\{|\theta_{\mathrm{m}}|, |\theta_{\mathrm{M}}|\}\,|x_1|$$

故定理 3.3.2 适用。注意，这里三角型假设不成立。 □

到目前为止，只讨论了将 $\|x(t)\|$ 驱动到零的控制问题。但是，如果初始条件 $x(0)$ 远离原点，所提出的控制算法可能会导致执行器饱和。为了避免该问题，通常的做法是引入参考模型，以提供一个从初始条件到原点的光滑的状态空间参考轨迹。这正是下一节讨论的主题。

3.4 自适应反馈线性化

在本章的后续部分将去掉存在与θ无关的孤立平衡点的假设，例如允许附加的常值干扰。但是，保留线性参数化的假设，并且进一步假设θ是定常的，即考虑系统

$$\dot{x} \;=\; f(x) + \sum_{i=1}^{p} q_i(x)\theta_i + g(x)u, \qquad x \in \mathbb{R}^n \tag{3.36}$$

其中$\theta = [\theta_1, \cdots, \theta_p]^{\mathrm{T}}$是一个定常参数向量。注意，不要求$q_i(0) = 0,\ 1 \leqslant i \leqslant p$。在本节中，系统不允许时变干扰存在，惟一的不确定性就是未知定常参数向量θ。本节引入了一个与θ无关的参考模型，其目的是设计一个状态反馈控制，使得系统状态和参考模型状态之间的跟踪误差渐近趋近于零，且与未知向量θ的取值无关。

定义 3.4.1 **模型参考自适应控制(Model Reference Adaptive Control)** 给定一个参考模型(reference model)

$$\dot{z}_{\mathrm{r}} \;=\; A_{\mathrm{r}} z_{\mathrm{r}} + b_{\mathrm{r}} v_{\mathrm{r}}, \qquad z_{\mathrm{r}} \in \mathbb{R}^n,\ z_{\mathrm{r}}(0) = z_{\mathrm{r}0}$$

其中A_{r}是任意的Hurwitz矩阵，且$(A_{\mathrm{r}}, b_{\mathrm{r}})$是可控对。称动态状态反馈

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\theta}} &= \mu(x, z_{\mathrm{r}}, v_{\mathrm{r}}, \hat{\theta}), \qquad \hat{\theta} \in \mathbb{R}^s,\ \hat{\theta}(0) = \hat{\theta}_0 \\ u &= u(x, z_{\mathrm{r}}, v_{\mathrm{r}}, \hat{\theta}) \end{aligned}$$

是系统(3.36)的一个模型参考自适应控制(MRAC)，当对于任意的初始条件$x_0, \hat{\theta}_0, z_{\mathrm{r}0}$，任意的$\theta \in \Omega$以及任意有界的$v_{\mathrm{r}}(t)$，有：

(i) 对任意$t \geqslant 0$，$\|x(t)\|$和$\left\|\hat{\theta}(t)\right\|$是有界的；

(ii) 存在一个全局状态空间微分同胚$x = T(z)$，使得

$$\lim_{t\to\infty} \|x(t) - T(z_{\mathrm{r}}(t))\| \;=\; 0$$

□

定义 3.4.2 **自适应反馈线性化(Adaptive Feedback Linearization)**给定一个参考模型

$$\dot{z}_{\mathrm{r}} \;=\; A_{\mathrm{r}} z_{\mathrm{r}} + b_{\mathrm{r}} v_{\mathrm{r}}, \qquad z_{\mathrm{r}} \in \mathbb{R}^n,\ z_{\mathrm{r}}(0) = z_{\mathrm{r}0}$$

其中A_{r}是任意的Hurwitz矩阵，且$(A_{\mathrm{r}}, b_{\mathrm{r}})$是可控对。称动态状态反馈

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\theta}} &= \mu(x, z_{\mathrm{r}}, v_{\mathrm{r}}, \hat{\theta}), \qquad \hat{\theta} \in \mathbb{R}^s,\ \hat{\theta}(0) = \hat{\theta}_0 \\ u &= u(x, z_{\mathrm{r}}, v_{\mathrm{r}}, \hat{\theta}) \end{aligned}$$

是系统(3.36)的一个**自适应反馈线性化控制(adaptive feedback linearizing control)**，当对于任意初始条件$x_0, \hat{\theta}_0, z_{\mathrm{r}0}$，任意的$\theta \in \Omega$以及任意有界的$v_{\mathrm{r}}(t)$有：

(i) 对于任意的$t \geqslant 0$，$\|x(t)\|$和$\left\|\hat{\theta}(t)\right\|$是有界的；

(ii) 存在一个滤波变换

$$x \;=\; T(z, z_{\mathrm{r}}(t), \hat{\theta}(t))$$

使得

$$\lim_{t\to\infty}\|x(t)-T(z_{\rm r}(t),z_{\rm r}(t),\hat{\theta}(t))\| \;=\; 0$$

□

评注 3.4.1 注意，模型参考自适应控制和自适应反馈线性化控制之间的差别是：前者 $x_{\rm r}=T(z_{\rm r})$ (解释为参考模型的输出)与 $\hat{\theta}$ 无关，而后者 $x_{\rm r}=T(z_{\rm r},z_{\rm r},\hat{\theta}(t))$ 与动态控制的状态 $\hat{\theta}$ 相关。 □

定理 3.4.1 模型参考自适应控制(Model Reference Adaptive Control) 假设对于系统(3.36)有：

(i) 标称系统 (f,g) 是全局可状态反馈线性化的；

(ii) 匹配条件 $q_j\in\mathcal{G}_0, 1\leqslant j\leqslant p, \forall x\in\mathbb{R}^n$ 成立。

则存在一个模型参考自适应控制。 □

证明: 根据推论3.1.1可知，存在一个与 θ 无关的全局的状态空间微分同胚 $z=T(x)$ 和一个状态反馈

$$u \;=\; k(x)+\beta(x)v$$

将系统(3.36)变为

$$\begin{aligned}
\dot{z}_j &= z_{j+1}, \qquad 1\leqslant j\leqslant n-1\\
\dot{z}_n &= \sum_{i=1}^{p}\theta_i\phi_{in}(z)+v\triangleq\phi_n^{\rm T}(z)\theta+v
\end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned}
\dot{z}_{{\rm r}j} &= z_{{\rm r},j+1}, \qquad 1\leqslant j\leqslant n-1\\
\dot{z}_{{\rm r}n} &= -\sum_{i=1}^{n}a_{i-1}z_{{\rm r}i}+v_{\rm r}
\end{aligned}$$

为参考模型($s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_0$ 是一个任意的Hurwitz多项式)，它可以表示为矩阵形式

$$\dot{z}_{\rm r} \;=\; A_{\rm r}z_{\rm r}+b_{\rm r}v$$

其中

$$A_{\rm r} \;=\; \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1}\end{bmatrix}, \qquad b_{\rm r}=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$

令 $e=z-z_{\rm r}$，且定义

$$v \;=\; -\sum_{i=1}^{n}a_{i-1}z_i-\phi_n^{\rm T}(z)\hat{\theta}+v_{\rm r}$$

从而($\tilde{\theta}=\theta-\hat{\theta}$)

$$\dot{e} \;=\; A_{\rm r}e+b_{\rm r}\phi_n^{\rm T}(e+z_{\rm r})\tilde{\theta} \tag{3.37}$$

根据定理B.2.1，取

$$\dot{\tilde{\theta}} = -\dot{\hat{\theta}} = -\phi_n(e+z_{\rm r})b_{\rm r}^{\rm T}Pe \tag{3.38}$$

其中 P 是如下 Lyapunov 矩阵方程的解

$$A_{\rm r}^{\rm T}P + PA_{\rm r} = -Q$$

Q 为任意的正定对称矩阵。将定理B.2.1应用于式(3.37)和式(3.38)，可知 $\|e(t)\|$ 和 $\|\tilde{\theta}(t)\|$ 有界且有

$$\lim_{t\to\infty}\|e(t)\| = 0$$

这意味着

$$\lim_{t\to\infty}\left\|x(t) - T^{-1}(z_{\rm r}(t))\right\| = 0$$

□

评注 3.4.2 除满足条件(i)和条件(ii)之外，若 $v_{\rm r}(t)$ 还满足

$$\tilde{\theta}^{\rm T}\phi_n(z_{\rm r}(t))\phi_n^{\rm T}(z_{\rm r}(t))\tilde{\theta} \geqslant \alpha(\|\tilde{\theta}\|), \qquad \forall t\geqslant 0, \forall\tilde{\theta}\in\mathbb{R}^p$$

其中 α 为合适的 K 类函数，则根据定理B.2.1，$(e,\tilde{\theta})=0$ 是系统(3.37)和系统(3.38)的全局一致渐近稳定平衡点。 □

推论 3.4.1 线性模型参考自适应控制(Linear Model Reference Adaptive Control) 若对于线性系统

$$\dot{x} = Ax + bu + Qx, \qquad x\in\mathbb{R}^n \tag{3.39}$$

其中 Q 是一个 $n\times n$ 的未知定常参数矩阵，有：

(i) (A,b) 是可控的，

(ii) $\mathrm{Im}\,Q\subset\mathrm{Im}\,b$(匹配条件)，

则存在一个线性模型参考自适应控制。 □

定理 3.4.2 自适应反馈线性化(Adaptive Feedback Linearization) 假设对于系统(3.36)，有：

(i) 标称系统 (f,g) 是全局可状态反馈线性化的，

(ii) 严格三角型条件成立

$$ad_{q_j}\mathcal{G}_i\subset\mathcal{G}_i, \qquad 1\leqslant j\leqslant p, 0\leqslant i\leqslant n-2, \forall x\in\mathbb{R}^n$$

则存在一个自适应反馈线性化控制。 □

证明: 由于标称系统是全局可反馈线性化的，且满足严格三角型条件，因此根据定理3.1.1，不确定系统(3.36)全局反馈等价于

$$\dot{z}_j = z_{j+1} + \sum_{i=1}^{p}\phi_{ji}(z_1,\cdots,z_j)\theta_i, \qquad 1\leqslant j\leqslant n-1$$

$$\dot{z}_n = v + \sum_{i=1}^{p} \phi_{ni}(z_1, \ldots, z_n)\theta_i \tag{3.40}$$

考虑当 $n = 1$ 时的系统 (3.40)

$$\dot{z}_1 = v + \sum_{i=1}^{p} \phi_{1i}(z_1)\theta_i \triangleq v + \phi_1^{\mathrm{T}}(z_1)\theta$$

以及参考模型(λ_1 是正实数)

$$\dot{z}_{\mathrm{r}1} = -\lambda_1 z_{\mathrm{r}1} + v_{\mathrm{r}}$$

在这种情形下，定理3.4.1 适用，且定理当 $n = 1$ 时亦成立。

下面证明定理当 $n = 2$ 时成立，对于系统

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 + \sum_{i=1}^{p} \phi_{1i}(z_1)\theta_i \\ \dot{z}_2 &= v + \sum_{i=1}^{p} \phi_{2i}(z_1, z_2)\theta_i \end{aligned} \tag{3.41}$$

以及参考模型($s^2 + a_1 s + a_0$ 是一个任意的 Hurwitz 多项式)

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{z}_{\mathrm{r}1} \\ \dot{z}_{\mathrm{r}2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{\mathrm{r}1} \\ z_{\mathrm{r}2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v_{\mathrm{r}} \\ &\triangleq A_{\mathrm{r}} \begin{bmatrix} z_{\mathrm{r}1} \\ z_{\mathrm{r}2} \end{bmatrix} + b_{\mathrm{r}} v_{\mathrm{r}} \end{aligned} \tag{3.42}$$

定义滤波变换

$$\begin{aligned} \tilde{z}_1 &= z_1 \\ \tilde{z}_2 &= z_2 + \sum_{i=1}^{p} \phi_{1i}(z_1)\hat{\theta}_i = z_2 + \phi_1^{\mathrm{T}}(z_1)\hat{\theta} \\ \dot{\hat{\theta}} &= \mu(z, z_{\mathrm{r}}, \hat{\theta}) \end{aligned} \tag{3.43}$$

其中 $\hat{\theta}$ 的动态，即函数 μ 仍待定义。从式 (3.41) 和式 (3.43) 可得 ($\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$)

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{z}}_1 &= \tilde{z}_2 + \phi_1^{\mathrm{T}}(z_1)\tilde{\theta} \\ \dot{\tilde{z}}_2 &= v + \phi_2^{\mathrm{T}}(z_1, z_2)\theta + \frac{\partial \phi_1^{\mathrm{T}}}{\partial z_1}\hat{\theta}(z_2 + \phi_1^{\mathrm{T}}(z_1)\theta) + \phi_1^{\mathrm{T}}(z_1)\mu(z, z_{\mathrm{r}}, \hat{\theta}) \\ &= v + \phi_1^{\mathrm{T}}(z_1)\mu(z, z_{\mathrm{r}}, \hat{\theta}) + \frac{\partial \phi_1^{\mathrm{T}}}{\partial z_1}\hat{\theta} z_2 + [\phi_2^{\mathrm{T}}(z_1, z_2) + \frac{\partial \phi_1^{\mathrm{T}}}{\partial z_1}\hat{\theta}\phi_1^{\mathrm{T}}(z_1)]\theta \\ &\triangleq v + \chi(z, z_{\mathrm{r}}, \hat{\theta}) + \psi^{\mathrm{T}}(z, \hat{\theta})\theta \end{aligned}$$

取

$$v = v_2(z, z_{\mathrm{r}}, \hat{\theta}) = -\chi(z, z_{\mathrm{r}}, \hat{\theta}) - a_0\tilde{z}_1 - a_1\tilde{z}_2 - \psi^{\mathrm{T}}(z, \hat{\theta})\hat{\theta} + v_{\mathrm{r}}$$

参考误差动态 ($e = \tilde{z} - z_{\mathrm{r}}$) 为

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \end{bmatrix} &= A_{\mathrm{r}} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \phi_1^{\mathrm{T}}(z_1) \\ \psi^{\mathrm{T}}(z, \hat{\theta}) \end{bmatrix} \tilde{\theta} \\ \dot{\tilde{\theta}} &= -\mu(z, z_{\mathrm{r}}, \hat{\theta}) \end{aligned}$$

令 P 为如下 Lyapunov 方程的正定解

$$A_{\mathrm{r}}^{\mathrm{T}}P + PA_{\mathrm{r}} = -I$$

考虑函数

$$V = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} + \tilde{\theta}^{\mathrm{T}}\tilde{\theta}$$

对时间的导数为

$$\dot{V} = -e_1^2 - e_2^2 + 2\begin{bmatrix} e_1 & e_2 \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} \phi_1^{\mathrm{T}} \\ \psi^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \tilde{\theta} + 2\dot{\tilde{\theta}}^{\mathrm{T}}\tilde{\theta}$$

定义

$$\dot{\hat{\theta}} = -\dot{\tilde{\theta}} = \begin{bmatrix} \phi_1 & \psi \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} \triangleq \mu(z, z_{\mathrm{r}}, \hat{\theta})$$

可得

$$\dot{V} = -e_1^2 - e_2^2$$

则定理 B.2.1 适用。下面利用归纳法进行证明。

命题 给定一个线性参考模型

$$\dot{Z}_{\mathrm{r},2i} = A_{\mathrm{r}i}Z_{\mathrm{r},2i} + b_{\mathrm{r}i}v_{\mathrm{r}}$$

其中 $Z_{\mathrm{r},2i} = [z_{\mathrm{r}1}, \cdots, z_{\mathrm{r},2i}]^{\mathrm{T}}$，$A_{\mathrm{r}i}$ 是一个 $2i \times 2i$ 矩阵，$b_{\mathrm{r}i}$ 是一个 $2i \times 1$ 向量，由下式给出

$$A_{\mathrm{r}i} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a_0[1] & -a_1[1] & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_0[2] & -a_1[2] & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_0[i] & -a_1[i] \end{bmatrix}$$

$$b_{\mathrm{r}i} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

其中 $s^2 + a_1[j]s + a_0[j],\ 1 \leqslant j \leqslant i$ 是任意的 Hurwitz 多项式。假设对于系统

$$\begin{aligned} \dot{z}_j &= z_{j+1} + \phi_j^{\mathrm{T}}(z_1, \cdots, z_j)\theta, \qquad 1 \leqslant j \leqslant 2i-1 \\ \dot{z}_{2i} &= v + \phi_{2i}^{\mathrm{T}}(z_1, \cdots, z_i)\theta \end{aligned}$$

存在一个滤波变换 ($Z_{2i} = [z_1, \cdots, z_{2i}]^{\mathrm{T}}$, $\tilde{Z}_{2i} = [\tilde{z}_1, \cdots, \tilde{z}_{2i}]^{\mathrm{T}}$)

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_{2i} &= T_i(Z_{2i}, Z_{\mathrm{r},2i}, \hat{\theta}[1], \cdots, \hat{\theta}[i]) \\ \dot{\hat{\theta}}[j] &= \mu_j(Z_{2j}, Z_{\mathrm{r},2j}, \hat{\theta}[1], \cdots, \hat{\theta}[j]), \qquad 1 \leqslant j \leqslant i, \hat{\theta}[j] \in \mathbb{R}^p \end{aligned}$$

以及一个动态状态反馈

$$v = v_i(Z_{2i}, Z_{\mathrm{r},2i}, \hat{\theta}[1], \cdots, \hat{\theta}[i], v_{\mathrm{r}})$$

使得函数 ($e_j = [\tilde{z}_{2j-1} - z_{\mathrm{r},2j-1}, \tilde{z}_{2j} - z_{\mathrm{r},2j}]^{\mathrm{T}}$, $\tilde{\theta}[j] = \theta - \hat{\theta}[j]$, $\gamma_j > 0$)

$$V_i = \sum_{j=1}^{i} \gamma_j (e_j^{\mathrm{T}} P_j e_j + \tilde{\theta}^{\mathrm{T}}[j]\tilde{\theta}[j])$$

对时间的导数 ($\varepsilon_i > 0$) 满足

$$\dot{V}_i \leqslant -\varepsilon_i \sum_{j=1}^{i} \|e_j\|^2 \tag{3.44}$$

其中 P_j 是如下方程的对称正定解:

$$\begin{bmatrix} 1 & -a_0[j] \\ 0 & -a_1[j] \end{bmatrix} P_j + P_j \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0[j] & -a_1[j] \end{bmatrix} = -I, \qquad 1 \leqslant j \leqslant i$$

则对于系统

$$\begin{aligned} \dot{z}_j &= z_{j+1} + \phi_j^{\mathrm{T}}(z_1, \cdots, z_j)\theta, \qquad 1 \leqslant j \leqslant 2i+1 \\ \dot{z}_{2i+2} &= v + \phi_{2i+2}^{\mathrm{T}}(z_1, \cdots, z_{2i+2})\theta \end{aligned}$$

其中参考模型为($s^2 + a_1[i+1]s + a_0[i+1]$ 是一个任意的 Hurwitz 多项式)

$$\dot{Z}_{\mathrm{r},2i+2} = A_{\mathrm{r},i+1} Z_{\mathrm{r},2i+2} + b_{\mathrm{r},i+1} v_{\mathrm{r}} \tag{3.45}$$

存在一个滤波变换

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_{2i+2} &= T_{i+1}(Z_{2i+2}, Z_{\mathrm{r},2i+2}, \hat{\theta}[1], \cdots, \hat{\theta}[i+1]) \\ \dot{\hat{\theta}}[j] &= \mu_j(Z_{2j}, Z_{\mathrm{r},2j}, \hat{\theta}[1], \cdots, \hat{\theta}[j]), \qquad \hat{\theta}[j] \in \mathbb{R}^p,\ 1 \leqslant j \leqslant i+1 \end{aligned}$$

以及一个动态状态反馈

$$v = v_{i+1}(Z_{2i+2}, Z_{\mathrm{r},2i+2}, \hat{\theta}[1], \cdots, \hat{\theta}[i+1], v_{\mathrm{r}})$$

使得对于一个合适的 $\gamma_{i+1} > 0$，函数

$$V_{i+1} = \sum_{j=1}^{i+1} \gamma_j (e_j^{\mathrm{T}} P_j e_j + \tilde{\theta}^{\mathrm{T}}[j]\tilde{\theta}[j])$$

对时间的导数 ($\varepsilon_{i+1} > 0$) 满足

$$\dot{V}_{i+1} \leqslant -\varepsilon_{i+1} \sum_{j=1}^{i+1} \|e_j\|^2$$

其中 P_{i+1} 是方程

$$\begin{bmatrix} 1 & -a_0[i+1] \\ 0 & -a_1[i+1] \end{bmatrix} P_{i+1} + P_{i+1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0[i+1] & -a_1[i+1] \end{bmatrix} = -I \tag{3.46}$$

的解。

命题的证明: 定义

$$\tilde{z}_{2i+1} = z_{2i+1} - v_i(Z_{2i}, Z_{\mathrm{r},2i}, \hat{\theta}[1], \cdots, \hat{\theta}[i], z_{\mathrm{r},2i+1})$$

此时，信号 $Z_{\mathrm{r},2i+1}$ 由参考模型 (3.45) 给出，从而

$$
\begin{aligned}
\dot{\tilde{z}}_{2i+1} &= z_{2i+2}+\phi_{2i+1}^{\mathrm{T}}(z_1,\ldots,z_{2i+1})\theta-\sum_{j=1}^{2i}\frac{\partial v_i}{\partial z_j}(z_{j+1}+\phi_j^{\mathrm{T}}(z_1,\ldots,z_j)\theta)\\
&\quad -\sum_{j=1}^{i}\frac{\partial v_i}{\partial\hat{\theta}[j]}\mu_j(Z_{2j},Z_{\mathrm{r},2j},\hat{\theta}[1],\cdots,\hat{\theta}[j])-\sum_{j=1}^{2i+1}\frac{\partial v_i}{\partial z_{\mathrm{r}j}}\dot{z}_{\mathrm{r}j}\\
&\triangleq z_{2i+2}+\chi_{2i+1}(Z_{2i+1},Z_{\mathrm{r},2i+2},\hat{\theta}[1],\cdots,\hat{\theta}[i])\\
&\quad +\psi_{2i+1}^{\mathrm{T}}(Z_{2i+1},Z_{\mathrm{r},2i+1},\hat{\theta}[1],\cdots,\hat{\theta}[i])\theta
\end{aligned}
$$

定义

$$
\begin{aligned}
\tilde{z}_{2i+2} &= z_{2i+2}+\chi_{2i+1}(Z_{2i+1},Z_{\mathrm{r},2i+2},\hat{\theta}[1],\cdots,\hat{\theta}[i])\\
&\quad +\psi_{2i+1}^{\mathrm{T}}(Z_{2i+1},Z_{\mathrm{r},2i+1},\hat{\theta}[1],\cdots,\hat{\theta}[i])\hat{\theta}[i+1]
\end{aligned}
$$

则有 $(\tilde{\theta}[i+1]=\theta-\hat{\theta}[i+1])$

$$
\begin{aligned}
\dot{\tilde{z}}_{2i+1} &= \tilde{z}_{2i+1}+\psi_{2i+1}^{\mathrm{T}}(Z_{2i+1},Z_{\mathrm{r},2i+1},\hat{\theta}[1],\ldots,\hat{\theta}[i])\hat{\theta}[i+1]\\
\dot{\tilde{z}}_{2i+2} &= v+\phi_{2i+2}^{\mathrm{T}}\theta+\frac{\partial\chi_{2i+1}}{\partial Z_{2i+1}}\dot{Z}_{2i+1}+\frac{\partial\chi_{2i+1}}{\partial Z_{r,2i+2}}\dot{Z}_{r,2i+2}+\sum_{j=1}^{i}\frac{\partial\chi_{2i+1}}{\partial\hat{\theta}[j]}\dot{\hat{\theta}}[j]\\
&\quad +\left(\frac{\partial\psi_{2i+1}^{\mathrm{T}}}{\partial Z_{2i+1}}\dot{Z}_{2i+1}+\frac{\partial\psi_{2i+1}^{\mathrm{T}}}{\partial Z_{\mathrm{r},2i+1}}\dot{Z}_{\mathrm{r},2i+1}+\sum_{j=1}^{i}\frac{\partial\psi_{2i+1}^{\mathrm{T}}}{\partial\hat{\theta}[j]}\dot{\hat{\theta}}[j]\right)\hat{\theta}[i+1]\\
&\quad +\psi_{2i+1}^{\mathrm{T}}\dot{\hat{\theta}}[i+1]\\
&\triangleq v+\chi_{2i+2}(Z_{2i+2},Z_{\mathrm{r},2i+2},\hat{\theta}[1],\cdots,\hat{\theta}[i+1],\dot{\hat{\theta}}[i+1],v_{\mathrm{r}})\\
&\quad +\psi_{2i+2}^{\mathrm{T}}(Z_{2i+2},Z_{\mathrm{r},2i+2},\hat{\theta}[1],\cdots,\hat{\theta}[i+1])\theta
\end{aligned}
$$

令

$$
\begin{aligned}
v &= v_{i+1}(Z_{2i+2},Z_{\mathrm{r},2i+2},\hat{\theta}[1],\cdots,\hat{\theta}[i+1],\dot{\hat{\theta}}[i+1],v_{\mathrm{r}})\\
&= -a_0[i+1]\tilde{z}_{2i+1}-a_1[i+1]\tilde{z}_{2i+2}+v_{\mathrm{r}}-\chi_{2i+2}-\psi_{2i+2}^{\mathrm{T}}\hat{\theta}[i+1]
\end{aligned}
$$

得

$$
\begin{aligned}
\dot{\tilde{z}}_{2i+1} &= \tilde{z}_{2i+2}+\psi_{2i+1}^{\mathrm{T}}\tilde{\theta}[i+1]\\
\dot{\tilde{z}}_{2i+2} &= -a_0[i+1]\tilde{z}_{2i+1}-a_1[i+1]\tilde{z}_{2i+2}+\psi_{2i+2}^{\mathrm{T}}\tilde{\theta}[i+1]
\end{aligned}
$$

以及

$$
\dot{e}_{i+1}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -a_0[i+1] & -a_1[i+1]\end{bmatrix}e_i+\begin{bmatrix}\psi_{2i+1}^{\mathrm{T}}\\ \psi_{2i+2}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\tilde{\theta}[i+1] \tag{3.47}
$$

其中 $e_{i+1}=[\tilde{z}_{2i+1}-z_{\mathrm{r},2i+1},\tilde{z}_{2i+2}-z_{\mathrm{r},2i+2}]^{\mathrm{T}}$。考虑函数 $(\gamma_{i+1}>0)$

$$
V_{i+1}=V_i+\gamma_{i+1}(e_{i+1}^{\mathrm{T}}P_{i+1}e_{i+1}+\tilde{\theta}^{\mathrm{T}}[i+1]\tilde{\theta}[i+1])
$$

根据式 (3.44)、式(3.46) 和式 (3.47)，可得

$$
\dot{V}_{i+1}\leqslant-\varepsilon_i\sum_{j=1}^{i}\|e_j\|^2-\gamma_{i+1}\|e_{i+1}\|^2+2\gamma_i e_i^{\mathrm{T}}P_i\begin{bmatrix}0\\ e_{i+1,1}\end{bmatrix}
$$

$$+2\gamma_{i+1}\left(e_{i+1}^{\mathrm{T}}P_{i+1}\begin{bmatrix}\psi_{2i+1}^{\mathrm{T}}\\ \psi_{2i+2}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\tilde{\theta}[i+1]+\dot{\tilde{\theta}}^{\mathrm{T}}[i+1]\tilde{\theta}[i+1]\right)$$

因此，取

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\theta}}[i+1] &= \begin{bmatrix}\psi_{2i+1} & \psi_{2i+2}\end{bmatrix}P_{i+1}e_{i+1}\\ &\triangleq \mu_{i+1}(Z_{2i+2},Z_{\mathrm{r},2i+2},\hat{\theta}[1],\cdots,\hat{\theta}[i+1])\end{aligned}$$

对于充分大的 γ_{i+1}，可得

$$\dot{V}_{i+1} \leqslant -\varepsilon_{i+1}\sum_{j=1}^{i+1}\|e_j\|^2$$

其中 $\varepsilon_{i+1}>0$。命题证毕。

因为已证明当 $n=2$ 时命题的假设成立。当 n 是偶数时，可以重复应用命题，以获得一个滤波变换

$$\begin{aligned}\tilde{z} &= T_{n/2}(z,z_{\mathrm{r}},\hat{\theta}[1],\cdots,\hat{\theta}[n/2]),T_{n/2}(0,\hat{\theta}[1],\cdots,\hat{\theta}[n/2])=0\\ \dot{\hat{\theta}}[j] &= \mu_j(z,z_{\mathrm{r}},\hat{\theta}[1],\cdots,\hat{\theta}[j]),\qquad 1\leqslant j\leqslant n/2\end{aligned}$$

以及一个动态状态反馈

$$v = v_{n/2}(z,z_{\mathrm{r}},\hat{\theta}[1],\cdots,\hat{\theta}[n/2])$$

使得函数

$$V_{n/2} = \sum_{j=1}^{n/2}\gamma_j(e_j^{\mathrm{T}}P_je_j+\tilde{\theta}^{\mathrm{T}}[j]\tilde{\theta}[j])$$

对时间的导数满足不等式

$$\dot{V}_{n/2}\leqslant-\varepsilon_{n/2}\sum_{j=1}^{n/2}\|e_j\|^2$$

应用与定理3.3.1证明结尾部分相同的论据，可以得出 $\lim_{t\to\infty}\|e_j(t)\|=0, 1\leqslant j\leqslant n/2$。由于任意的可控对 $(A_{\mathrm{r}},b_{\mathrm{r}})$，其中 A_{r} 是一个任意的Hurwitz矩阵，可通过线性坐标变换变为 $(A_{\mathrm{r},n/2},b_{\mathrm{r},n/2})$，从而对于 n 为偶数的情形证毕。若 n 是奇数，则显然需要附加一个步骤。 □

评注 3.4.3 放宽关于向量 θ 是常数(即 $\dot{\theta}=0$)的假设，假设 $\theta(t)$ 由具有未知初始条件 $\theta(0)$ 的如下外部系统(exosystem)

$$\dot{\theta} = \Lambda(t,x)\theta+\lambda(t,x) \tag{3.48}$$

给出，且该模型具有如下性质：

(i) $\Lambda(t,x)+\Lambda^{\mathrm{T}}(t,x)$ 是负半定的，$\forall t\geqslant0, \forall x\in\mathbb{R}^n$，

(ii) 外部系统(3.48)是BIBS(Bounded Input Bounded State)稳定的，即当输入 x 有界时，状态 θ 亦有界。

□

在线性系统(3.39)的情形下，自适应反馈线性化定理3.4.2可陈述如下。

推论 3.4.2 若线性系统 (3.39) 满足：

(i) (A,b) 是可控的，

(ii) $QA^ib \subset \text{span}\{b, Ab, \cdots, A^ib\}, 0 \leqslant i \leqslant n-2$，

则存在自适应反馈线性化控制。

注意，上述条件 (ii) 比推论 3.4.1 的条件 (ii) 更具一般性。 □

例 3.4.1 考虑系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + \theta x_1 x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= u\end{aligned}$$

标称系统是线性且可控的，因此满足定理 3.4.2 的条件 (i)。由于

$$q(x) = x_1 x_3 \frac{\partial}{\partial x_1}$$

故可得

$$\left[q(x), \frac{\partial}{\partial x_3}\right] = -x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \notin \mathcal{G}_0$$

因此不满足条件(ii)，定理 3.4.2 不适用。又因为

$$\mathcal{G}_1 = \text{span}\{g, ad_f g\} = \text{span}\{\frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\}$$

可得 $ad_q\mathcal{G}_0 \notin \mathcal{G}_1$，且三角型条件不成立。参照例 2.2.6 中的计算，对于任意一个 θ，系统是可反馈线性化的。 □

例 3.4.2 对于系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + \theta\phi(x_1) \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= u\end{aligned} \tag{3.49}$$

说明如何设计针对每个未知参数只设置一个参数估计的自适应控制器。为简单起见，省略了参考模型，并考虑将状态 $x(t)$ 驱动到零的问题。定义滤波坐标 $\tilde{x}_1 = x_1, \tilde{x}_2 = x_2 - v_1(x_1, \hat{\theta})$，其中

$$v_1(x_1, \hat{\theta}) = -\lambda_1 x_1 - \hat{\theta}\phi(x_1)$$

从而式 (3.49) 变为 $(\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta})$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\lambda_1 x_1 + \tilde{x}_2 + \tilde{\theta}\phi(x_1) \\ \dot{\tilde{x}}_2 &= x_3 + \left(\lambda_1 + \hat{\theta}\frac{\partial\phi(x_1)}{\partial x_1}\right)[x_2 + \theta\phi(x_1)] + \dot{\hat{\theta}}\phi(x_1) \\ \dot{x}_3 &= u\end{aligned} \tag{3.50}$$

定义最后一个滤波坐标为 $\tilde{x}_3 = x_3 - v_2(x_1, x_2, \hat{\theta})$，这里

$$v_2 = -\lambda_2\tilde{x}_2 - \left(\lambda_1 + \hat{\theta}\frac{\partial\phi(x_1)}{\partial x_1}\right)(x_2 + \hat{\theta}\phi(x_1)) - \tau(x_1, x_2, \hat{\theta}) - x_1 \tag{3.51}$$

其中 τ 是任意的光滑函数，$\hat{\theta}$ 的动态尚待定义。将式 (3.51) 代入式 (3.50)，可得

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -\lambda_1 x_1 + \tilde{x}_2 + \tilde{\theta}\phi_(x_1) \\
\dot{\tilde{x}}_2 &= -\lambda_2 \tilde{x}_2 + \tilde{x}_3 + \left(\lambda_1 + \hat{\theta}\frac{\partial \phi(x_1)}{\partial x_1}\right)\tilde{\theta}\phi(x_1) + \dot{\hat{\theta}}\phi(x_1) - \tau(x_1, x_2, \hat{\theta}) - x_1 \\
\dot{\tilde{x}}_3 &= u - \dot{v}_2 \triangleq u + \gamma_0(x_1, x_2, x_3, \hat{\theta}, \dot{\hat{\theta}}) + \gamma_1(x_1, x_2, x_3, \hat{\theta})\theta
\end{aligned} \tag{3.52}$$

令

$$u = -\lambda_3 \tilde{x}_3 - \gamma_0 - \gamma_1 \hat{\theta} - \tilde{x}_2 + v(x_1, x_2, x_3, \hat{\theta}) \tag{3.53}$$

其中 v 是一个任意的光滑函数。由式 (3.52) 和式 (3.53)，可得

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -\lambda_1 x_1 + \tilde{x}_2 + \tilde{\theta}\phi(x_1) \\
\dot{\tilde{x}}_2 &= -\lambda_2 \tilde{x}_2 + \tilde{x}_3 - x_1 + \left(\lambda_1 + \hat{\theta}\frac{\partial \phi(x_1)}{\partial x_1}\right)\tilde{\theta}\phi(x_1) + \dot{\hat{\theta}}\phi(x_1) - \tau(x_1, x_2, \hat{\theta}) \\
\dot{\tilde{x}}_3 &= -\lambda_3 \tilde{x}_3 - \tilde{x}_2 + \gamma_1 \tilde{\theta} + v(x_1, x_2, x_3, \hat{\theta})
\end{aligned} \tag{3.54}$$

其中 $\hat{\theta}$，τ 和 v 是任意函数，可通过选择这些函数使得

$$V = \frac{1}{2}(x_1^2 + \tilde{x}_2^2 + \tilde{x}_3^2) + \frac{1}{2}(\theta - \hat{\theta})^2$$

对时间的导数

$$\begin{aligned}
\dot{V} = &-(\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 \tilde{x}_2^2 + \lambda_3 \tilde{x}_3^2) + x_1 \tilde{x}_2 + \tilde{x}_2 \tilde{x}_3 - \tilde{x}_2 x_1 - \tilde{x}_3 \tilde{x}_2 \\
&+\tilde{\theta}\left(\phi(x_1)x_1 + \left(\lambda_1 + \hat{\theta}\frac{\partial \phi(x_1)}{\partial x_1}\right)\phi(x_1)\tilde{x}_2 + \gamma_1 \tilde{x}_3 - \dot{\hat{\theta}}\right) \\
&+\tilde{x}_2(\dot{\hat{\theta}}\phi(x_1) - \tau) + \tilde{x}_3 v
\end{aligned}$$

为半负定的。因此选择

$$\dot{\hat{\theta}} = \phi(x_1)x_1 + \left(\lambda_1 + \hat{\theta}\frac{\partial \phi(x_1)}{\partial x_1}\right)\phi(x_1)\tilde{x}_2 + \gamma_1 \tilde{x}_3 \tag{3.55}$$

可得

$$\begin{aligned}
\dot{V} = &-(\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 \tilde{x}_2^2 + \lambda_3 \tilde{x}_3^2) \\
&+\tilde{x}_2\left[\phi(x_1)\left(x_1\phi(x_1) + \left(\lambda_1 + \hat{\theta}\frac{\partial \phi(x_1)}{\partial x_1}\right)\phi(x_1)\tilde{x}_2\right) - \tau\right] \\
&+\tilde{x}_2 \tilde{x}_3 \phi(x_1)\gamma_1 + \tilde{x}_3 v
\end{aligned} \tag{3.56}$$

令

$$\tau(x_1, x_2, \hat{\theta}) = \phi(x_1)\left[x_1\phi(x_1) + \left(\lambda_1 + \hat{\theta}\frac{\partial \phi(x_1)}{\partial x_1}\right)\phi(x_1)\tilde{x}_2\right] \tag{3.57}$$

将其代入式 (3.56)，有

$$\dot{V} = -(\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 \tilde{x}_2^2 + \lambda_3 \tilde{x}_3^2) + \tilde{x}_2 \phi(x_1)\gamma_1 \tilde{x}_3 + \tilde{x}_3 v$$

最后，取

$$v = -\tilde{x}_2 \phi(x_1)\gamma_1 \tag{3.58}$$

可得

$$\dot{V} = -(\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 \tilde{x}_2^2 + \lambda_3 \tilde{x}_3^2)$$

总之，分别依赖于式 (3.57) 和式 (3.58) 给出的函数 τ 和 v，自适应镇定控制 (3.53) 和 (3.55) 是阶数为 1 的动态控制，且对于参数 θ 仅有惟一的估计值 $\hat{\theta}$。注意，在此情形下，自适应反馈线性化定理 3.4.2 给出的解要求有 θ 的两个参数估计，而定理 3.3.1 在此情形下给出的自校正调节器阶数为 3。该例给出的设计步骤适用于每个满足三角型不确定性定理的系统 (3.36)(线性参数化)，从而得到一个 p 阶的动态自适应镇定控制，也即对于每个未知参数 θ_i 只含一个估计值 $\hat{\theta}_i$。 □

3.5 多输入系统的推广

考虑多输入系统

$$\dot{x} = f(x) + q(x,\theta(t)) + \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n \tag{3.59}$$

并假设 $\operatorname{rank}\{g_1(0), \cdots, g_m(0)\} = m$，且

$$q(x,0) = 0, \qquad \forall x \in U_0$$

其中 U_0 是原点的一个邻域，标称系统为

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(x)$$

三角型不确定性定理 3.1.1 可如下推广到多输入系统。

定理 3.5.1 **多输入三角型不确定性(Multi-Input Triangular Uncertainties)** 若对于系统 (3.59) 有：

(i) 对于指数 $k_1 \geqslant k_2 \geqslant k_3 \geqslant \cdots \geqslant k_m$，标称系统 (f,g) 是局部(全局)可反馈线性化的；

(ii) 在原点的一个邻域 U_0 (在 $\mathbb{R}^n$ 里)内满足严格三角型假设

$$ad_q \mathcal{G}_i \subset \mathcal{G}_i, \qquad 0 \leqslant i \leqslant n-2$$

其中

$$\mathcal{G}_i = \operatorname{span}\{ad_f^j g_k : 0 \leqslant j \leqslant i,\, 1 \leqslant k \leqslant m\}$$

则系统 (3.59) 局部(全局)反馈等价于

$$\begin{aligned}
\dot{z}_{i1} &= z_{i2} + \phi_{i1}(Z_{1,k_1-k_i+1}, \cdots, Z_{m,k_m-k_i+1}, \theta(t)) \\
\dot{z}_{ij} &= z_{i,j+1} + \phi_{ij}(Z_{1,k_1-k_i+j}, \cdots, Z_{m,k_m-k_i+j}, \theta(t)), \qquad 2 \leqslant j \leqslant k_i - 1 \\
\dot{z}_{ik_i} &= v_i + \phi_{ik_i}(Z_{1k_1}, \cdots, Z_{mk_m}, \theta(t)), \qquad 1 \leqslant i \leqslant m
\end{aligned}$$

其中 $Z_{ij} = [z_{i1}, \cdots, z_{ij}]^{\mathrm{T}}$。 □

如果定理 3.5.1 的条件 (ii) 由更强的条件

$$q \in \mathcal{G}_0$$

代替，称之为匹配条件。如果条件 (ii) 由更弱的条件

$$ad_q \mathcal{G}_i \subset \mathcal{G}_{i+1}, \qquad 0 \leqslant i \leqslant n-2 \tag{3.60}$$

代替，则称之为三角型假设。如果条件 (ii) 由条件

$$q \in \mathcal{G}_1$$

代替，则称之为推广匹配条件，它比三角型假设强，但比匹配条件弱。

在定理 3.5.1 的基础上，鲁棒镇定、自校正调节器和自适应反馈线性化等定理可以容易地推广到多输入系统。我们将其留给读者作为练习。

3.6 实例

例 3.6.1 (问题 1.10.11(a))**未知点质量(unknown point mass)**模型可表示为如下状态空间形式：

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{m}(-k_{\mathrm{p}}x_1 - k_{\mathrm{v}}x_2 + d + u)\end{aligned}$$

由于未知参数 $1/m$ 与控制 u 相乘，因此 MRAC 定理 3.4.1 不适用。然而，由于 $1/m$ 的符号已知(正的)，我们用该例说明如何设计自适应控制。为简单起见不引入参考模型。

定义 $(k_1 > 0)$

$$\begin{aligned}\tilde{x}_1 &= x_1 - x_{\mathrm{r}1}(t)\\ \tilde{x}_2 &= x_2 + k_1\tilde{x}_1 - \dot{x}_{\mathrm{r}1}\end{aligned}$$

其中 $x_{\mathrm{r}1}$ 是 x_1 的一个有界参考信号，具有阶数到 2 的有界时间导数，从而有

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}_1 &= -k_1\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2\\ \dot{\tilde{x}}_2 &= \frac{1}{m}(-k_{\mathrm{p}}x_1 - k_{\mathrm{v}}x_2 + d + u) + k_1x_2 - k_1\dot{x}_{\mathrm{r}1} - \ddot{x}_{\mathrm{r}1}\end{aligned} \tag{3.61}$$

定义控制 $(k_1 > 0,\ k_2 > 0)$

$$u = \hat{k}_{\mathrm{p}}x_1 + \hat{k}_{\mathrm{v}}x_2 - \hat{d} + \hat{m}(-k_1x_2 + k_1\dot{x}_{\mathrm{r}1} + \ddot{x}_{\mathrm{r}1} - k_2\tilde{x}_2)$$

并将其代入式 (3.61)，有

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}_1 &= -k_1\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2\\ \dot{\tilde{x}}_2 &= -k_2\tilde{x}_2 - \frac{\tilde{k}_{\mathrm{p}}}{m}x_1 - \frac{\tilde{k}_{\mathrm{v}}}{m}x_2 + \frac{\tilde{d}}{m} - \frac{\tilde{m}}{m}(-k_1x_2 + k_1\dot{x}_{\mathrm{r}1} + \ddot{x}_{\mathrm{r}1} - k_2\tilde{x}_2)\end{aligned}$$

其中 $\tilde{k}_{\mathrm{p}} = k_{\mathrm{p}} - \hat{k}_{\mathrm{p}}, \tilde{k}_{\mathrm{v}} = k_{\mathrm{v}} - \hat{k}_{\mathrm{v}}, \tilde{d} = d - \hat{d}, \tilde{m} = m - \hat{m}$。考虑函数 $(k_3 > 0)$

$$V = \frac{1}{2}\left(\tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2 + \frac{\tilde{k}_{\mathrm{p}}^2}{m} + \frac{\tilde{k}_{\mathrm{v}}^2}{m} + \frac{\tilde{d}^2}{mk_3} + \frac{\tilde{m}^2}{m}\right)$$

其对时间的导数为

$$\begin{aligned}\dot{V} = &-k_1\tilde{x}_1^2 - k_2\tilde{x}_2^2 + \tilde{x}_1\tilde{x}_2 + \frac{\tilde{k}_{\mathrm{p}}}{m}(-x_1\tilde{x}_2 + \dot{\hat{k}}_{\mathrm{p}}) + \frac{\tilde{k}_{\mathrm{v}}}{m}(-x_2\tilde{x}_2 + \dot{\hat{k}}_{\mathrm{v}})\\ &+\frac{\tilde{d}}{m}\left(\tilde{x}_2 + \frac{\dot{\hat{d}}}{k_3}\right) + \frac{\tilde{m}}{m}[\tilde{x}_2(-k_1x_2 + k_1\dot{x}_{\mathrm{r}1} + \ddot{x}_{\mathrm{r}1} - k_2\tilde{x}_2) + \dot{\hat{m}}]\end{aligned}$$

自适应律为

$$\begin{aligned}\dot{\hat{k}}_{\mathrm{p}} &= -x_1\tilde{x}_2\\ \dot{\hat{k}}_{\mathrm{v}} &= -x_2\tilde{x}_2\end{aligned}$$

$$\dot{\hat{d}} = k_3\tilde{x}_2$$
$$\dot{\hat{m}} = -\tilde{x}_2(-k_1x_2 + k_1\dot{x}_{\rm r1} + \ddot{x}_{\rm r1} - k_2\tilde{x}_2)$$

从而有 $\dot{V} = -k_1\tilde{x}_1^2 - k_2\tilde{x}_2^2 + \tilde{x}_1\tilde{x}_2$，对于 $k_2 > k_1/4$，其是半负定的。因此，推论B.2.1保证 $\lim_{t\to\infty}\tilde{x}_1(t) = 0$ 且 $\lim_{t\to\infty}\tilde{x}_2(t) = 0$。在 $k_{\rm p}, k_{\rm v}, m$ 已知的特殊情形下，如 $k_{\rm p} = k_{\rm v} = 0, m = 1$ 且 $x_{\rm r1}$ 是常数，自适应控制变为

$$u = -(k_1 + k_2)x_2 - k_1k_2\tilde{x}_1 - \hat{d}$$
$$\dot{\hat{d}} = k_3(x_2 + k_1\tilde{x}_1), \qquad \hat{d}(0) = \hat{d}_0$$

即有

$$u = -(k_1k_2 + k_3)\tilde{x}_1 - (k_1 + k_2)x_2 - k_1k_3\int_0^t \tilde{x}_1(\tau)d\tau - \hat{d}_0 + k_3\tilde{x}_1(0)$$

选择 $\hat{d}_0 = k_3\tilde{x}_1(0)$，此时该控制是一个**PID控制(PID control)**，其控制增益分别为

$$K_{\rm P} = k_1k_2 + k_3$$
$$K_{\rm V} = k_1 + k_2$$
$$K_{\rm I} = k_1k_3$$

只要 $k_1 > 0, k_2 > k_1/4, k_3 > 0$，闭环系统即为渐近稳定的。对于系统

$$\ddot{x} = u + d$$

本章所研究的自适应方法给出了一个PID控制。 □

例 3.6.2 (问题1.10.9)重新考虑一个与无穷大母线相连的**同步发电机(synchronous generator)**的降阶模型。如例2.8.2所示，系统在运行点 $(\delta_{\rm e}, \omega_{\rm s}, \psi_{\rm fc})$ 的一个邻域内是可反馈线性化的。由于传输线的短路或者涡轮失效而影响参数 $c_{\rm m}$，参数 $c_{\rm m} = \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5$ (为简单起见，将角标去掉)会发生突然的变化。这些变化是未知的，控制算法的任务是防止发电机失去稳定的转速，也即保持 δ 尽可能接近稳定运行点 $\delta_{\rm e}$，且 $\omega = \omega_{\rm s}$。因为参数 θ_2 的标称值大于零，标称模型的干扰满足三角型假设(3.5)，但是不满足严格三角型假设(3.2)，所以本章给出的定理不适用。但是，通过对已用过的论据进行小的修正，我们说明了如何设计一个自适应控制。为简单起见，不引入参考模型。定义$(\lambda_1 > 0)$

$$\tilde{\delta} = \delta - \delta_{\rm e}$$
$$\tilde{\omega} = \omega - v_1$$

其中

$$v_1 = -\lambda_1(\delta - \delta_{\rm e}) + \omega_{\rm s}$$

因此，前两个方程

$$\dot{\delta} = \omega - \omega_{\rm s}$$
$$\dot{\omega} = \theta_1 - \theta_2\omega\psi_{\rm f}\sin\delta + \theta_3\sin\delta\cos\delta$$

可重新写为

$$\dot{\tilde{\delta}} = -\lambda_1\tilde{\delta} + \tilde{\omega}$$
$$\dot{\tilde{\omega}} = \theta_1 - \theta_2\omega\psi_{\rm f}\sin\delta + \theta_3\sin\delta\cos\delta + \lambda_1(\omega - \omega_{\rm s}) \tag{3.62}$$

引入新的参数(回想 $\theta_2>0$) $\theta_6=1/\theta_2$，参数估计值为 $\hat{\theta}_i$，误差为 $\tilde{\theta}_i=\theta_i-\hat{\theta}_i$。定义 ($\lambda_2>0$)

$$\begin{aligned} v_2 &= \frac{1}{\omega\sin\delta}\hat{\theta}_6(\lambda_2\tilde{\omega}+\hat{\theta}_1+\hat{\theta}_3\sin\delta\cos\delta+\lambda_1(\omega-\omega_{\mathrm{s}})) \\ \tilde{\psi}_{\mathrm{f}} &= \psi_{\mathrm{f}}-v_2 \end{aligned}$$

方程 (3.62) 可以重写为

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\delta}} &= -\lambda_1\tilde{\delta}+\tilde{\omega} \\ \dot{\tilde{\omega}} &= -\lambda_2\tilde{\omega}-\theta_2\omega\tilde{\psi}_{\mathrm{f}}\sin\delta+\tilde{\theta}_1+\tilde{\theta}_3\sin\delta\cos\delta \\ &\quad +\tilde{\theta}_6\theta_2(\lambda_2\tilde{\omega}+\hat{\theta}_1+\hat{\theta}_3\sin\delta\cos\delta+\lambda_1(\omega-\omega_{\mathrm{s}})) \\ &\triangleq -\lambda_2\tilde{\omega}-\theta_2\omega\tilde{\psi}_{\mathrm{f}}\sin\delta+\begin{bmatrix}\omega_{21} & \omega_{23} & \omega_{26}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{\theta}_1\\ \tilde{\theta}_3\\ \theta_2\tilde{\theta}_6\end{bmatrix} \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\psi}}_{\mathrm{f}} &= v_{\mathrm{f}}+\theta_4(-\omega\psi_{\mathrm{f}})+\theta_5\cos\delta \\ &\quad -\frac{\hat{\theta}_6}{\omega\sin\delta}\Bigg[\lambda_1\lambda_2(\omega-\omega_{\mathrm{s}})+\dot{\hat{\theta}}_1+\dot{\hat{\theta}}_3\sin\delta\cos\delta \\ &\quad +\hat{\theta}_3(\cos^2\delta-\sin^2\delta)(\omega-\omega_{\mathrm{s}})-(\lambda_2\tilde{\omega}+\hat{\theta}_1+\hat{\theta}_3\sin\delta\cos\delta \\ &\quad +\lambda_1(\omega-\omega_{\mathrm{s}}))\left(\frac{\dot{\hat{\theta}}_6}{\omega\sin\delta}-\frac{\hat{\theta}_6(\omega-\omega_{\mathrm{s}})\cos\delta}{\omega\sin^2\delta}\right)\Bigg] \\ &\quad +\theta_1\left[-\frac{(\lambda_1+\lambda_2)\hat{\theta}_6}{\omega\sin\delta}+\frac{\hat{\theta}_6}{\omega^2\sin\delta}(\lambda_2\tilde{\omega}+\hat{\theta}_1+\hat{\theta}_3\sin\delta\cos\delta+\lambda_1(\omega-\omega_{\mathrm{s}}))\right] \\ &\quad +\theta_2\left[\hat{\theta}_6(\lambda_1+\lambda_2)\psi_{\mathrm{f}}-\frac{\psi_{\mathrm{f}}\hat{\theta}_6}{\omega}(\lambda_2\tilde{\omega}+\hat{\theta}_1+\hat{\theta}_3\sin\delta\cos\delta+\lambda_1(\omega-\omega_{\mathrm{s}}))\right] \\ &\quad +\theta_3\left[-\frac{(\lambda_1+\lambda_2)\hat{\theta}_6\cos\delta}{\omega}+\frac{\hat{\theta}_6\cos\delta}{\omega^2}(\lambda_2\tilde{\omega}+\hat{\theta}_1+\hat{\theta}_3\sin\delta\cos\delta+\lambda_1(\omega-\omega_{\mathrm{s}}))\right] \\ &\triangleq v_{\mathrm{f}}+w_{30}+\sum_{i=1}^{5}w_{3i}\theta_i \end{aligned}$$

再定义 ($\lambda_3>0$)

$$v_{\mathrm{f}} = -\lambda_3\tilde{\psi}_{\mathrm{f}}+\hat{\theta}_2\tilde{\omega}\omega\sin\delta-w_{30}-\sum_{i=1}^{5}w_{3i}\hat{\theta}_i$$

从而有

$$\dot{\tilde{\psi}}_{\mathrm{f}} = -\lambda_3\tilde{\psi}_{\mathrm{f}}+\hat{\theta}_2\tilde{\omega}\omega\sin\delta+\sum_{i=1}^{5}w_{3i}\tilde{\theta}_i$$

考虑函数

$$V = \frac{1}{2}(\tilde{\delta}^2+\tilde{\omega}^2+\tilde{\psi}_{\mathrm{f}}^2)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{5}\tilde{\theta}_i^2+\frac{1}{2}\theta_2\tilde{\theta}_6^2$$

令自适应律

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\theta}}_1 &= w_{21}\tilde{\omega} + w_{31}\tilde{\psi}_{\mathrm{f}} \\ \dot{\hat{\theta}}_2 &= w_{32}\tilde{\psi}_{\mathrm{f}} - \omega\sin\delta\tilde{\omega}\tilde{\psi}_{\mathrm{f}} \\ \dot{\hat{\theta}}_3 &= w_{23}\tilde{\omega} + w_{33}\tilde{\psi}_{\mathrm{f}} \\ \dot{\hat{\theta}}_4 &= w_{34}\tilde{\psi}_{\mathrm{f}} \\ \dot{\hat{\theta}}_5 &= w_{35}\tilde{\psi}_{\mathrm{f}} \\ \dot{\hat{\theta}}_6 &= w_{26}\tilde{\omega}\end{aligned}$$

则可得

$$\dot{V} = -\lambda_1\tilde{\delta}^2 - \lambda_2\tilde{\omega}^2 - \lambda_3\tilde{\psi}_{\mathrm{f}}^2 + \tilde{\delta}\tilde{\omega}$$

□

例 3.6.3 (问题 1.10.10)重新考虑具有正弦磁通分布的永磁同步电机(synchronous motor)模型。如例 2.8.3 所见，它是可反馈线性化的。模型包含六个参数 $J, K_{\mathrm{m}}, F, T_{\mathrm{L}}, R$ 和 L，这些参数可能是未知或不确定的，除 T_{L} 外均为正值。特别地，机械参数 J, F 和 T_{L} 依赖于特定的应用背景，而 R 随温度的变化而变化，K_{m} 与永磁性有关；电气参数 R, L 和 K_{m} 随不同的电机而不同。现在采用本章介绍的方法设计一个自适应控制，以保证对光滑参考角轨迹 $\delta_{\mathrm{r}}(t)$ 的渐近跟踪，而这种跟踪效果与所有物理参数的未知值无关。首先，引入电流的新坐标 $(i_{\mathrm{d}}, i_{\mathrm{q}})$

$$\begin{bmatrix} i_{\mathrm{d}} \\ i_{\mathrm{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos p\delta & \sin p\delta \\ -\sin p\delta & \cos p\delta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_a \\ i_b \end{bmatrix}$$

和新的控制输入 $(u_{\mathrm{d}}, u_{\mathrm{q}})$

$$\begin{bmatrix} u_{\mathrm{d}} \\ u_{\mathrm{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos p\delta & \sin p\delta \\ -\sin p\delta & \cos p\delta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_a \\ u_b \end{bmatrix}$$

从而模型可以重写成更简单的形式

$$\begin{aligned}\frac{d\delta}{dt} &= \omega \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{K_{\mathrm{m}}}{J}i_{\mathrm{q}} - \frac{F}{J}\omega - \frac{T_{\mathrm{L}}}{J} \\ \frac{di_{\mathrm{d}}}{dt} &= -\frac{R}{L}i_{\mathrm{d}} + p\omega i_{\mathrm{q}} + \frac{u_{\mathrm{d}}}{L} \\ \frac{di_{\mathrm{q}}}{dt} &= -\frac{R}{L}i_{\mathrm{q}} - p\omega i_{\mathrm{d}} - \frac{K_{\mathrm{m}}\omega}{L} + \frac{u_{\mathrm{q}}}{L}\end{aligned} \tag{3.63}$$

标称模型的干扰不满足定理 3.5.1 的严格三角型条件 (ii)，而满足三角型条件 (3.60)。用一个未知参数 $1/L$ 乘以这两个控制，如例 3.6.1 和例 3.6.2 所示，我们说明了如何设计一个自适应控制。令 $\delta_{\mathrm{r}}(t)$ 为 δ 的参考信号，$i_{\mathrm{dr}}(t)$ 为 i_{d} 的参考信号。跟踪误差由 $\tilde{\delta} = \delta - \delta_{\mathrm{r}}$ 表示，由式 (3.63) 的第一个方程可得

$$\dot{\tilde{\delta}} = \omega - \dot{\delta}_{\mathrm{r}}$$

定义 ω 的参考为 $(k_1 > 0)$

$$\omega_{\mathrm{r}} = \dot{\delta}_{\mathrm{r}} - k_1\tilde{\delta}$$

用 $\tilde{\omega} = \omega - \omega_{\mathrm{r}}$ 表示速度误差，从而式 (3.63) 中的前两个方程可以重新写为

$$
\begin{aligned}
\dot{\tilde{\delta}} &= -k_1\tilde{\delta} + \tilde{\omega} \\
\dot{\tilde{\omega}} &= \frac{K_{\mathrm{m}}}{J}i_{\mathrm{q}} - \frac{F}{J}\omega - \frac{T_{\mathrm{L}}}{J} - \ddot{\delta}_{\mathrm{r}} + k_1(\omega - \dot{\delta}_{\mathrm{r}})
\end{aligned}
\tag{3.64}
$$

通过引入

$$
\theta_1 = \frac{J}{K_{\mathrm{m}}}, \qquad \theta_2 = \frac{F}{J}, \qquad \theta_3 = \frac{T_{\mathrm{L}}}{J}
$$

重新参数化上面的方程，令 $\hat{\theta}_i$ 表示参数的估计，令

$$
\tilde{\theta}_i = \theta_i - \hat{\theta}_i
$$

表示估计误差。定义 i_{q} 的参考量为 $(k_2 > 0)$

$$
i_{\mathrm{qr}} = \hat{\theta}_1(\hat{\theta}_2\omega + \hat{\theta}_3 + \ddot{\delta}_{\mathrm{r}} - k_1(\omega - \dot{\delta}_{\mathrm{r}}) - k_2\tilde{\omega})
$$

从而记为 $\tilde{i}_{\mathrm{q}} = i_{\mathrm{q}} - i_{\mathrm{qr}}$，将 $i_{\mathrm{q}} = i_{\mathrm{qr}} + \tilde{i}_{\mathrm{q}}$ 代入式 (3.64) 中，可得

$$
\begin{aligned}
\dot{\tilde{\delta}} &= -k_1\tilde{\delta} + \tilde{\omega} \\
\dot{\tilde{\omega}} &= -k_2\tilde{\omega} + \frac{K_{\mathrm{m}}}{J}\tilde{i}_q - \frac{1}{\theta_1}(\hat{\theta}_2\omega + \hat{\theta}_3 + \ddot{\delta}_{\mathrm{r}} - k_1(\omega - \dot{\delta}_{\mathrm{r}}) - k_2\tilde{\omega})\tilde{\theta}_1 \\
&\quad -\omega\tilde{\theta}_2 - \tilde{\theta}_3 \\
&\triangleq -k_2\tilde{\omega} + \frac{K_{\mathrm{m}}}{J}\tilde{i}_{\mathrm{q}} + \begin{bmatrix} w_{21} & w_{22} & w_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\theta}_1/\theta_1 \\ \tilde{\theta}_2 \\ \tilde{\theta}_3 \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{3.65}
$$

定义

$$
\theta_4 = \frac{R}{L}, \qquad \theta_5 = \frac{K_{\mathrm{m}}}{L}, \qquad \theta_6 = L, \qquad \theta_7 = \frac{K_{\mathrm{m}}}{J}
$$

$\tilde{i}_{\mathrm{q}}$ 和 $\tilde{i}_{\mathrm{d}} = i_{\mathrm{d}} - i_{\mathrm{dr}}$ 的动态如下式给出：

$$
\begin{aligned}
\dot{\tilde{i}}_{\mathrm{q}} &= -\theta_4 i_{\mathrm{q}} - p\omega i_{\mathrm{d}} - \theta_5\omega + \frac{1}{\theta_6}u_{\mathrm{q}} - \dot{\hat{\theta}}_1(\hat{\theta}_2\omega + \hat{\theta}_3 + \ddot{\delta}_{\mathrm{r}} - k_1(\omega - \dot{\delta}_{\mathrm{r}}) - k_2\tilde{\omega}) \\
&\quad -\hat{\theta}_1\left(\dot{\hat{\theta}}_2\omega + \dot{\hat{\theta}}_3 + \frac{d^3\delta_{\mathrm{r}}}{dt^3} + (k_1 + k_2)\ddot{\delta}_{\mathrm{r}} - k_1k_2\dot{\tilde{\delta}}\right) \\
&\quad +\hat{\theta}_1(\theta_7 i_{\mathrm{q}} - \theta_2\omega - \theta_3)(k_1 + k_2 - \hat{\theta}_2) \\
\dot{\tilde{i}}_{\mathrm{d}} &= -\theta_4 i_{\mathrm{d}} + p\omega i_{\mathrm{q}} + \frac{1}{\theta_6}u_{\mathrm{d}} - \frac{di_{\mathrm{dr}}}{dt}
\end{aligned}
\tag{3.66}
$$

令反馈控制 $(u_{\mathrm{d}}, u_{\mathrm{q}})(k_3 > 0, k_4 > 0)$ 为

$$
\begin{aligned}
u_{\mathrm{q}} &= \hat{\theta}_6\Big[\hat{\theta}_4 i_{\mathrm{q}} + p\omega i_{\mathrm{d}} + \hat{\theta}_5\omega + \dot{\hat{\theta}}_1(\hat{\theta}_2\omega + \hat{\theta}_3 + \ddot{\delta}_{\mathrm{r}} - k_1(\omega - \dot{\delta}_{\mathrm{r}}) - k_2\tilde{\omega}) \\
&\quad +\hat{\theta}_1\left(\dot{\hat{\theta}}_2\omega + \dot{\hat{\theta}}_3 + \frac{d^3\delta_{\mathrm{r}}}{dt^3} + (k_1 + k_2)\ddot{\delta}_{\mathrm{r}} - k_1k_2\dot{\tilde{\delta}}\right) \\
&\quad -\hat{\theta}_1(\hat{\theta}_7 i_{\mathrm{q}} - \hat{\theta}_2\omega - \hat{\theta}_3)(k_1 + k_2 - \hat{\theta}_2) - k_3\tilde{i}_{\mathrm{q}} - \hat{\theta}_7\tilde{\omega}\Big] \\
u_{\mathrm{d}} &= \hat{\theta}_6\left(\hat{\theta}_4 i_{\mathrm{d}} - p\omega i_{\mathrm{q}} - k_4\tilde{i}_{\mathrm{d}} + \frac{di_{\mathrm{dr}}}{dt}\right)
\end{aligned}
\tag{3.67}
$$

将其代入式 (3.66)，联立式 (3.65)，可得

$$
\dot{\tilde{\delta}} = -k_1\tilde{\delta} + \tilde{\omega}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{\tilde{\omega}} &= -k_2\tilde{\omega} + \theta_7\tilde{i}_{\rm q} + \begin{bmatrix} w_{21} & w_{22} & w_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\theta}_1/\theta_1 \\ \tilde{\theta}_2 \\ \tilde{\theta}_3 \end{bmatrix} \\
\dot{\tilde{i}}_{\rm q} &= -k_3\tilde{i}_{\rm q} - \theta_7\tilde{\omega} - \tilde{\theta}_4 i_{\rm q} - \tilde{\theta}_5\omega + \tilde{\theta}_7\tilde{\omega} \\
&\quad +(\tilde{\theta}_7 i_{\rm q} - \tilde{\theta}_2\omega - \tilde{\theta}_3)(k_1 + k_2 - \hat{\theta}_2)\hat{\theta}_1 \\
&\quad -\frac{\tilde{\theta}_6}{\theta_6}\Big[\hat{\theta}_4 i_{\rm q} + p\omega i_{\rm d} + \hat{\theta}_5\omega + \dot{\hat{\theta}}_1(\hat{\theta}_2\omega + \hat{\theta}_3 + \ddot{\delta}_{\rm r} - k_1(\omega - \dot{\delta}_{\rm r}) - k_2\tilde{\omega}) \\
&\quad +\hat{\theta}_1\left(\dot{\hat{\theta}}_2\omega + \dot{\hat{\theta}}_3 + \frac{d^3\delta_{\rm r}}{dt^3} + (k_1 + k_2)\ddot{\delta}_{\rm r} - k_1k_2\dot{\tilde{\delta}}\right) \\
&\quad -\hat{\theta}_1(\hat{\theta}_7 i_{\rm q} - \hat{\theta}_2\omega - \hat{\theta}_3)(k_1 + k_2 - \hat{\theta}_2) - k_3\tilde{i}_{\rm q} - \hat{\theta}_7\tilde{\omega}\Big] \\
&\triangleq -k_3\tilde{i}_q - \theta_7\tilde{\omega} + \begin{bmatrix} w_{32} & w_{33} & w_{34} & w_{35} & w_{36} & w_{37} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\theta}_2 \\ \tilde{\theta}_3 \\ \tilde{\theta}_4 \\ \tilde{\theta}_5 \\ \tilde{\theta}_6/\theta_6 \\ \tilde{\theta}_7 \end{bmatrix} \\
\dot{\tilde{i}}_{\rm d} &= -k_4\tilde{i}_{\rm d} - \tilde{\theta}_4 i_{\rm d} - \frac{\tilde{\theta}_6}{\theta_6}\left(\hat{\theta}_4 i_{\rm d} - p\omega i_{\rm q} - k_4\tilde{i}_{\rm d} + \frac{di_{\rm dr}}{dt}\right) \\
&\triangleq -k_4\tilde{i}_{\rm d} + \begin{bmatrix} w_{44} & w_{46} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\theta}_4 \\ \tilde{\theta}_6/\theta_6 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

写成矩阵形式为

$$
\begin{bmatrix} \dot{\tilde{\delta}} \\ \dot{\tilde{\omega}} \\ \dot{\tilde{i}}_{\rm q} \\ \dot{\tilde{i}}_{\rm d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & \theta_7 & 0 \\ 0 & -\theta_7 & -k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\delta} \\ \tilde{\omega} \\ \tilde{i}_{\rm q} \\ \tilde{i}_{\rm d} \end{bmatrix}
+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_{32} & w_{33} & w_{34} & w_{35} & w_{36} & w_{37} \\ 0 & 0 & 0 & w_{44} & 0 & w_{46} & 0 \end{bmatrix} D^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{\theta}_1 \\ \tilde{\theta}_2 \\ \tilde{\theta}_3 \\ \tilde{\theta}_4 \\ \tilde{\theta}_5 \\ \tilde{\theta}_6 \\ \tilde{\theta}_7 \end{bmatrix}
$$

其中 $D = \mathrm{diag}[\theta_1, 1, 1, 1, 1, \theta_6, 1]$，或以紧凑的形式表示为

$$
\dot{\tilde{x}} = \Lambda\tilde{x} + W^{\rm T}D^{-1}\tilde{\theta}
$$

其中

$$
\tilde{x} = \begin{bmatrix} \tilde{\delta} & \tilde{\omega} & \tilde{i}_{\rm q} & \tilde{i}_{\rm d} \end{bmatrix}^{\rm T}
$$

回顾θ_1和θ_6是未知的正的定常参数，考虑函数

$$V = \frac{1}{2}\tilde{x}^{\mathrm{T}}\tilde{x} + \tilde{\theta}^{\mathrm{T}}D^{-1}\tilde{\theta} = \frac{1}{2}\left(\tilde{x}^{\mathrm{T}}\tilde{x} + \frac{\tilde{\theta}_1^2}{\theta_1} + \tilde{\theta}_2^2 + \tilde{\theta}_3^2 + \tilde{\theta}_4^2 + \tilde{\theta}_5^2 + \frac{\tilde{\theta}_6^2}{\theta_6} + \tilde{\theta}_7^2\right)$$

并定义自适应律为

$$\dot{\hat{\theta}} = W\tilde{x}$$

从而有

$$\dot{V} = -k_1\tilde{\delta}^2 - k_2\tilde{\omega}^2 - k_3\tilde{i}_{\mathrm{q}}^2 - k_4\tilde{i}_{\mathrm{d}}^2 + \tilde{\delta}\tilde{\omega}$$

上式说明，如果$k_1k_2 > 1/4$，则对于合适的正的ε

$$\dot{V} \leqslant -\varepsilon\tilde{x}^{\mathrm{T}}\tilde{x}$$

根据推论 B.2.1，可得$\lim_{t\to\infty}\|x(t)\| = 0$。 □

例 3.6.4 (问题 1.10.7(a))重新考虑在一个平面内的**点质量卫星(point mass satellite)**模型，可以将其表示为

$$\begin{aligned}
\dot{r} &= v \\
\dot{v} &= r\omega^2 - \frac{\theta_1}{r^2} + \frac{u_1}{\theta_2} \\
\dot{\omega} &= -\frac{2v\omega}{r} + \frac{u_2}{\theta_2 r}
\end{aligned}$$

其中$\theta_1 = k/m$以及$\theta_2 = m$都是未知的正参数。由于问题 1.10.7(a)可采用得到的自适应控制算法解决，因此可将方程$\dot{\varphi} = \omega$省略。令$(k_1 > 0, k_2 > 0)$

$$\begin{aligned}
u_1 &= \hat{\theta}_2\left(-r\omega^2 + \frac{\hat{\theta}_1}{r^2} - k_1(r - r_{\mathrm{r}}) - k_2 v\right) \\
u_2 &= \hat{\theta}_2(2v\omega - rk_3(\omega - \omega_{\mathrm{r}}))
\end{aligned}$$

其中r_{r}和ω_{r}是r和ω的定常参考信号，从而闭环系统变为

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{r}} &= v \\
\dot{v} &= -k_1\tilde{r} - k_2 v - \frac{\tilde{\theta}_1}{r^2} - \frac{\tilde{\theta}_2}{\theta_2}\left(-r\omega^2 + \frac{\hat{\theta}_1}{r^2} - k_1\tilde{r} - k_2 v\right) \\
\dot{\tilde{\omega}} &= -k_3\tilde{\omega} - \frac{\tilde{\theta}_2}{\theta_2}\left(\frac{2v\omega}{r} - k_3\tilde{\omega}\right)
\end{aligned}$$

其中$\tilde{\theta}_i = \theta_i - \hat{\theta}_i$, $\tilde{r} = r - r_{\mathrm{r}}$, $\tilde{\omega} = \omega - \omega_{\mathrm{r}}$。令$P$为如下方程的解：

$$\begin{bmatrix} 0 & -k_1 \\ 1 & -k_2 \end{bmatrix} P + P \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix} = -I$$

考虑函数

$$V = \begin{bmatrix} \tilde{r} & v \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} \tilde{r} \\ v \end{bmatrix} + \left(\tilde{\omega}^2 + \tilde{\theta}_1^2 + \frac{\tilde{\theta}_2^2}{\theta_2}\right)$$

对时间的导数为

$$V = -\tilde{r}^2 - v^2 - k_3\tilde{\omega}^2 + 2\tilde{\theta}_1\left(\begin{bmatrix} \tilde{r} & v \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} 0 \\ -1/r^2 \end{bmatrix} + \dot{\tilde{\theta}}_1\right)$$

$$+2\frac{\tilde{\theta}_2}{\theta_2}\left(\begin{bmatrix}\tilde{r} & v\end{bmatrix}P\begin{bmatrix}0\\ r\omega^2-\hat{\theta}_1/r^2+k_1\tilde{r}+k_2v\end{bmatrix}-\tilde{\omega}\left(\frac{2v\omega}{r}-k_3\tilde{\omega}\right)+\dot{\hat{\theta}}_2\right)$$

自适应律为

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\theta}}_1 &= -\begin{bmatrix}\tilde{r} & v\end{bmatrix}P\begin{bmatrix}0\\ 1/r^2\end{bmatrix}\\ \dot{\hat{\theta}}_2 &= \begin{bmatrix}\tilde{r} & v\end{bmatrix}P\begin{bmatrix}0\\ r\omega^2-\hat{\theta}_1/r^2+k_1\tilde{r}+k_2v\end{bmatrix}-\tilde{\omega}\left(\frac{2v\omega}{r}-k_3\tilde{\omega}\right)\end{aligned}$$

□

例 3.6.5 (问题1.10.4)重写**欧拉方程(Euler equations)**，它构成**空间飞行器(spacecraft)** 模型的一部分。

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_x &= \frac{J_y-J_z}{J_x}\omega_y\omega_z+\frac{1}{J_x}\tau_x \triangleq \theta_1\omega_y\omega_z+\frac{1}{J_x}\tau_x\\ \dot{\omega}_y &= \frac{J_z-J_x}{J_y}\omega_x\omega_z+\frac{1}{J_y}\tau_y \triangleq \theta_2\omega_x\omega_z+\frac{1}{J_y}\tau_y\\ \dot{\omega}_z &= \frac{J_x-J_y}{J_z}\omega_x\omega_y+\frac{1}{J_z}\tau_z \triangleq \theta_3\omega_x\omega_y+\frac{1}{J_z}\tau_z\end{aligned}$$

其中 $\theta_1,\theta_2,\theta_3$ 为未知的定常参数，J_x,J_y,J_z 为未知的正参数。这三个方程具有相似的结构，因此这里只考虑第一个方程：

$$\dot{\omega}_x = \frac{J_y-J_z}{J_x}\omega_y\omega_z+\frac{1}{J_x}\tau_x$$

模型参考自适应控制为

$$\begin{aligned}\tau_x &= \hat{J}_x\left(-a_{\mathrm{r}}\omega_x+b_{\mathrm{r}}v_x-\hat{\theta}_1\omega_y\omega_z\right)\\ \dot{\hat{\theta}}_1 &= \omega_y\omega_z(\omega_x-\omega_{x\mathrm{r}})\\ \dot{\hat{J}}_x &= -(\omega_x-\omega_{x\mathrm{r}})(-a_{\mathrm{r}}\omega_x-\hat{\theta}_1\omega_y\omega_z+b_{\mathrm{r}}v_x)\\ \dot{\omega}_{x\mathrm{r}} &= -a_{\mathrm{r}}\omega_{x\mathrm{r}}+b_{\mathrm{r}}v_x\end{aligned}$$

□

3.7 结论

本章引入了不确定性，如干扰、未知参数和不确定非线性等。基于反馈线性化定理2.2.1，假设其对于确定(或标称) 的部分成立，定理3.1.1给出了不确定性的三角型条件，它刻画了本章所研究的不确定性系统。基于三角型镇定定理2.5.1，对于那些受非线性地进入系统的时变干扰影响的系统，定理3.2.1设计了鲁棒镇定控制，而当时变干扰线性地进入系统时，定理3.3.1给出了自校正调节器。根据定义3.3.1，自校正调节器通过调整其参数来完成调节并消除未知干扰。定义3.3.2给出了滤波变换的概念，在本书中具有重要的作用。在干扰线性地加入系统并且干扰为常数(即参数)的特殊情形下，定理3.4.1以及更一般的定理3.4.2阐述了如何设计自适应控制，使得闭环系统跟踪一个参考模型。它们给出了模型参考自适应控制(MRAC)的推广，如推论3.4.1所说明的，其最初是针对线性系统得到的。本章还通过几个实例进一步说明这些自适应方法，针对第2章所得到的同步发电机(例2.8.2)和同

步电机(例 2.8.3)的状态反馈控制，假设所有的参数未知，在例 3.6.2 和例 3.6.3 中分别进行了重新设计；例 3.6.1 讨论了一个未知点质量的控制，说明 PID 控制可以被视为一个自适应控制；例 3.6.4和例 3.6.5 给出了在飞行器控制中的应用，其中质量和惯量是不确定的参数。

3.8 习题

3.1 试设计如下系统的一个鲁棒镇定控制(θ 是一个属于 $[1,3]$ 的未知实数)：

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + (x_1 - x_2)^\theta + u \\ \dot{x}_2 &= u\end{aligned}$$

3.2 说明线性时变系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + \theta_1(t)x_1 \\ \dot{x}_2 &= u + \theta_2(t)x_1 + \theta_3(t)x_2\end{aligned}$$

存在一个鲁棒线性镇定控制，其中 $|\theta_i(t)| \leqslant \theta_{\mathrm{M}}, \forall t \geqslant 0,\ 1 \leqslant i \leqslant 3$，且 θ_{M} 是一个已知常数。若 θ_{M} 未知，能否设计一个全局自校正调节器？

3.3 试设计如下系统的一个自校正调节器：

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + \theta \sin x_1^2, \qquad |\theta| \leqslant \theta_{\mathrm{M}} \\ \dot{x}_2 &= u\end{aligned}$$

该系统是否需要已知 θ_{M}？
假设 θ 精确已知，采用反馈线性化定理 2.2.1 设计一个控制器，并与自校正调节器进行比较。

3.4 试说明控制 $u = -k_1x_1 - k_2x_2$ 是线性系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + \theta u, \qquad -\theta_{\mathrm{M}} \leqslant \theta \leqslant 0 \\ \dot{x}_2 &= u\end{aligned}$$

的鲁棒镇定控制，假设 $k_1 > 0$ 且 $k_2 > \theta_{\mathrm{M}}k_1$。
提示：选择 k_1 和 k_2，使闭环系统的特征值对于任意的 $|\theta| \leqslant \theta_{\mathrm{M}}$ 具有负实部。

3.5 试设计如下系统的一个鲁棒镇定控制：

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + \theta x_3, \qquad \theta_{\mathrm{m}} \leqslant \theta \leqslant \theta_{\mathrm{M}} \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= u\end{aligned}$$

提示：首先设计如下系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + \theta v, \qquad \theta_{\mathrm{m}} \leqslant \theta \leqslant \theta_{\mathrm{M}} \\ \dot{x}_2 &= v\end{aligned}$$

的一个镇定反馈 $v(x_1, x_2)$，然后引入新的坐标 $\tilde{x}_3 = x_3 - v(x_1, x_2)$。

3.6 试设计如下系统的一个鲁棒镇定控制：

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + x_1(x_1 + x_2 + x_3)\\ \dot{x}_2 &= x_3\\ \dot{x}_3 &= x_4 + x_3\sin(\theta x_1)\\ \dot{x}_4 &= u\end{aligned}$$

提示：引入坐标 $\tilde{x}_3 = x_3 + x_1 + x_2$。

3.7 试设计如下系统的一个模型参考自适应控制：

$$\dot{x} = u + \theta x^2$$

其中 θ 是一个未知参数。

3.8 试设计如下系统的一个自适应反馈线性化控制：

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + \theta_1(\mathrm{e}^{x_1} - 1) + u\\ \dot{x}_2 &= \theta_2 x_1^3 + 2u\end{aligned}$$

其中 $\theta = [\theta_1,\ \theta_2]^{\mathrm{T}}$ 是未知参数向量。

3.9 试设计如下系统的一个自适应反馈线性化控制：

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + \theta_1 x_1\\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_1^3 + \theta_1 x_2 + \theta_2 x_2 x_1^2 + u\end{aligned}$$

其中 $\theta = [\theta_1,\ \theta_2]^{\mathrm{T}}$ 是未知参数向量。

3.10 试设计如下系统的一个自适应反馈线性化控制：

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= \theta x_2^3 + u\end{aligned}$$

其中 θ 是一个未知参数。

3.11 试设计如下系统的一个自适应反馈线性化控制：

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + \theta x_1^3\\ \dot{x}_2 &= x_3\\ \dot{x}_3 &= u\end{aligned}$$

其中 θ 是一个未知参数。

3.12 试设计如下系统的一个自适应反馈线性化控制：

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + \theta_1 x_1^2\\ \dot{x}_2 &= (1 + \theta_2\sin x_2)u\end{aligned}$$

其中 θ_1 和 θ_2 是未知参数。

3.13 说明如下给出的系统不满足自适应反馈线性化定理 3.4.2 的假设：

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 + x_3 - x_3^3 + \theta(x_1 - x_2 + x_3^3)(x_2 - x_3^3)^2 \\
\dot{x}_2 &= x_3 + 3x_3^2 u \\
\dot{x}_3 &= u
\end{aligned}
$$

3.14 试设计如下线性系统的一个模型参考自适应控制：

$$y(s) = w(s)u(s)$$

其传递函数为

$$w(s) = \frac{b}{s+a}$$

其中 a 和 b 是未知定常参数，$b > 0$。

3.15 试设计如下系统的一个自适应反馈线性化控制：

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 + \theta_1 x_1^2 \\
\dot{x}_2 &= \theta_1 \phi(x_1, x_2) + \theta_2 u
\end{aligned}
$$

其中 ϕ 是一个已知函数，$\theta_2 > 0$ 且 θ_1 未知。

3.16 考虑系统

$$\dot{x} = f(x) + g(x)y + \theta q(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

其中 θ 是一个未知参数。假设

(i) 标称系统(其中 $\theta = 0$)是全局渐近稳定的，

(ii) $q \in \text{span}\{g(x)\}$，

说明对于任意未知的 θ 存在一个动态调节器。提示：利用 Lyapunov 逆定理。

3.17 试设计如下系统的一个自校正调节器：

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -x_1^3 + x_2 \\
\dot{x}_2 &= \theta x_1 x_2 + u
\end{aligned}
$$

其中 θ 是一个未知正常数。

3.18 考虑系统 ($f(0) = 0$, $g(x) \neq 0$)

$$\dot{x} = f(x) + h(x)q(x)\theta + g(x)u$$

其中 θ 是一个未知参数。假设存在一个 Lyapunov 函数 $V(x)$，具有如下性质：

(i) $\langle dV, f\rangle$ 是负定的，

(ii) $\langle dV, g\rangle = h(x)$，

说明

$$
\begin{aligned}
u &= -\langle dV, q\rangle\hat{\theta} \\
\dot{\hat{\theta}} &= \langle dV, q\rangle h(x)
\end{aligned}
$$

是一个动态调节器。

3.19 考虑系统

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_2 + u + \theta_1 x_1 x_3 \\ x_3 + u \\ u + \theta_2 x_1^2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} x_1 x_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \theta_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_1^2 \end{bmatrix} \theta_2 \\
&\triangleq A_c x + bu + x_1(q_1\theta_1 + q_2\theta_2)
\end{aligned}
$$

其中 (θ_1, θ_2) 是未知参数，且 $q_1 = x_3\partial/\partial x_1$, $q_2 = x_1\partial/\partial x_3$。试说明即使是严格三角型假设也不存在一个动态调节器。

提示：由于 (A_c, b) 是可控对，定义输出 $y = x_1 \triangleq c_c x$，并设计一个状态反馈控制 $u = kx+v$，使得

$$
c_c[sI - (A_c + bk)]^{-1}b = \frac{s^2+s+1}{(s+\lambda)(s^2+s+1)} = \frac{1}{s+\lambda}
$$

其中 λ 是一个正实数。根据 Meyer-Kalman-Yacubovich 引理B.2.2，存在一个对称正定矩阵 P，一个向量 q 以及一个正实数 ε，使得

$$
\begin{aligned}
(A_c + bk)^{\mathrm{T}} P + P(A_c + bk) &= -qq^{\mathrm{T}} - \varepsilon I \\
Pb &= c_c^{\mathrm{T}}
\end{aligned}
$$

则动态控制 v 可以采用如下函数得到：

$$
V = x^{\mathrm{T}} P x + \frac{1}{2}(\tilde{\theta}_1^2 + \tilde{\theta}_2^2)
$$

3.20 试设计如下系统 $(\theta_1 > 0,\ \theta_2 > 0)$ 的一个动态调节器：

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \theta_1 x_2 + x_1 \\
\dot{x}_2 &= \theta_2 u
\end{aligned}
$$

3.21 试设计如下系统(d 是一个未知正弦干扰)的一个动态调节器：

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= u + d \\
\ddot{d} &= -d
\end{aligned}
$$

其中 $d(0)$ 和 $\dot{d}(0)$ 是未知的初始条件。假设实际系统由

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + u + d
\end{aligned}
$$

给出，设计上述控制的一个修正控制，其中 θ_1 和 θ_2 是未知参数。

3.22 试设计如下系统的一个动态调节器：

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2+\theta x_1(x_1+x_2+x_3)\\ \dot{x}_2 &= x_3\\ \dot{x}_3 &= u\end{aligned}$$

提示：引入新变量 $\tilde{x}_3 = x_1+x_2+x_3$。

3.23 试设计如下系统的一个动态调节器：

$$\dot{x} = \theta x^2+(1-x^2)u$$

分别采用函数

$$\begin{aligned}V_1 &= \frac{1}{2}\left[x^2+\frac{1}{\gamma}(\theta-\hat{\theta})^2\right], \qquad \gamma>0\\ V_2 &= \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{(1-x^2)^2}+(\theta-\hat{\theta})^2\right]\end{aligned}$$

并比较结果。

3.24 试设计如下系统的一个动态调节器：

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1^3+x_3^3\\ \dot{x}_2 &= -x_2^3+\theta x_3\alpha(x)\\ \dot{x}_3 &= u+\theta\beta(x)\end{aligned}$$

其中 θ 是未知参数，α 和 β 是已知函数，使用函数 $V=\left[x_1^2+x_2^2+x_3^2+(\theta-\hat{\theta})^2\right]/2$。

3.25 考虑系统($f(x)$ 是一个已知函数)

$$\dot{x} = af(x)+bu, \qquad x\in\mathbb{R}$$

其中 a 和 b 是未知参数，且 b 的符号已知。对于如下给定的参考模型 $(a_{\mathrm{r}}>0)$，试设计一个模型参考自适应控制：

$$\dot{x}_{\mathrm{r}} = -a_{\mathrm{r}}x_{\mathrm{r}}+b_{\mathrm{r}}v_{\mathrm{r}}$$

3.26 假设 δ 和 $\dot{\delta}$ 是可测量得到的，试设计如下系统的一个模型参考自适应控制：

$$J\ddot{\delta} = u-d$$

其中 d 是一个未知定常干扰，J 是正的未知常数。

3.27 重新考虑柔性关节机器人(**robot with flexible joint**)(问题1.10.8)，其模型可重写为

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= -\theta_1x_2-\theta_2\sin x_1-\theta_3x_1+\theta_3x_3\\ \dot{x}_3 &= x_4\\ \dot{x}_4 &= -\theta_4x_4+\theta_5(x_1-x_3)+\frac{1}{\theta_6}u\end{aligned}$$

其中 $(\theta_1,\cdots,\theta_6)$ 是未知正参数。设计一个自适应状态反馈线性化控制，使得 $x_1(t)$ 跟踪一个给定光滑参考信号 $x_{\mathrm{r1}}(t)$。

第 4 章　输出跟踪

在本章中引入一个光滑的输出函数 $h(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，这个函数定义了一个单输出变量 y

$$y = h(x)$$

该输出可能是惟一可测量得到的变量或被控制的变量。这里假设 y 是被控制变量，且所有的状态 x 均可测量得到。本书第二部分的主题即为输出反馈问题。

在 4.1 节和 4.2 节中，考虑不含有不确定性的单输入单输出系统：

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R} \\ y &= h(x), \qquad y \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{4.1}$$

其中 f 和 g 是 $\mathbb{R}^n$ 上的光滑向量场，$h(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是一个光滑函数，满足 $h(0) = 0$。我们研究**跟踪问题(Tracking Problem)**，即对于给定的一个光滑有界参考信号 $y_{\mathrm{r}}(t)$，设计一个状态反馈控制，使得对于闭环系统的任意初始条件，输出变量 y 满足

$$\lim_{t \to \infty} (y(t) - y_{\mathrm{r}}(t)) = 0$$

对于一类可输入–输出反馈线性化的系统，将给出跟踪问题的解。

当系统受到干扰 $\theta(t)$ 的影响或含有未知参数 θ 时，即对于**不确定 (uncertain)**系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, \theta(t)) + g(x)u \\ y &= h(x) \end{aligned}$$

仍可求解跟踪问题。这类问题的解决方法是 4.3 节、4.4 节和 4.5 节的主题。在 4.3 节中界定了跟踪问题仍然可解的一类不确定系统，在这些系统中，干扰 θ 不影响闭环系统的输出。在 4.4 节中，对于跟踪问题不可解的情形，提出并解决了干扰抑制问题，即说明如何设计一个鲁棒状态反馈控制，使得干扰对跟踪误差的影响抑制到任意的程度。对于干扰是常值的特殊情形，4.5 节讨论了如何采用自适应控制求解其跟踪问题。4.6 节将上述结果推广到多变量系统中，4.7 节将本章给出的设计方法应用到实例。

4.1　逆系统与跟踪动态

在本节中，我们仅讨论系统 (4.1)，并引入相对阶、零动态以及跟踪动态的概念。

定义 4.1.1 **相对阶(Relative Degree)** 系统 (4.1) 的相对阶 ρ，又称为**控制特征指数(Control Characteristic Index)**，定义为满足

$$L_g L_f^i h(x) = 0, \qquad \forall x \in U_0, \quad 0 \leqslant i \leqslant \rho - 2$$

$$L_gL_f^{\rho-1}h(x) \neq 0, \qquad \forall x \in U_0 \tag{4.2}$$

的整数，其中 U_0 为原点的一个邻域。若

$$L_gL_f^ih(x) = 0, \qquad \forall x \in U_0, \quad \forall i \geqslant 0$$

则称 $\rho = \infty$。 □

在上述定义中，不失一般性，在原点的邻域内定义相对阶，实际上就可以在任意状态 $x_e \in \mathbb{R}^n$ 的邻域内定义相对阶。

评注 4.1.1 非线性状态反馈变换不会改变相对阶 ρ。实际上，条件 (4.2) 与局部坐标的选取无关。状态反馈 $u = k(x) + \beta(x)v$ 将 f 变换为 $\tilde{f} = f + kg$，将 g 变换为 $\tilde{g} = \beta g$。若 $L_gh = 0$，则有$L_{\tilde{g}}h = \beta(L_gh) = 0$。采用归纳法，假设

$$L_gL_f^ih = 0, \qquad 0 \leqslant i \leqslant j \tag{4.3}$$

蕴涵着$L_f^ih = L_{\tilde{f}}^ih$，$1 \leqslant i \leqslant j+1$，则可断言，若

$$L_gL_f^{j+1}h = 0 \tag{4.4}$$

则有

$$L_{\tilde{g}}L_{\tilde{f}}^{j+1}h = 0$$

实际上，假设 (4.3) 和式 (4.4) 说明

$$L_{\tilde{g}}L_{\tilde{f}}^{j+1}h = \beta L_g(L_f^{j+1}h) = 0$$

同样地，若$L_gL_f^{\rho-1}h \neq 0$，则$L_{\tilde{g}}L_{\tilde{f}}^{\rho-1}h \neq 0$。 □

评注 4.1.2 相对阶 ρ 等于输入 u 可以直接影响的输出对时间导数的最小阶。记

$$y^{(i)} = \frac{d^iy}{dt^i}$$

考虑

$$y^{(1)} = \langle dh, \dot{x}\rangle = L_fh + uL_gh$$

若 $\rho = 1$，在 U_0 内由定义可知 $L_gh \neq 0$，因此只要 $x \in U_0$，输入 u 就可以直接影响 $y^{(1)}$。当 $1 < \rho \leqslant n$ 时，由 ρ 的定义，可计算

$$\begin{aligned} y^{(i)} &= L_f^ih, \qquad 1 \leqslant i \leqslant \rho - 1 \\ y^{(\rho)} &= L_f^\rho h + uL_gL_f^{\rho-1}h \end{aligned}$$

因此只要有 $x \in U_0$，$y^{(\rho)}$ 即为直接受到输入 u 影响的输出对时间导数的最小阶次。若 $\rho = \infty$，则对于 $x \in U_0$，y 对时间的导数的任意阶均不受输入 u 的影响。 □

例 4.1.1 在平衡点的一个邻域内，相对阶也可能是无法定义的，如下面的系统所示:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + x_3^2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= u \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

记 $g=\frac{\partial}{\partial x_3}$，$f=(x_2+x_3^2)\frac{\partial}{\partial x_1}+x_3\frac{\partial}{\partial x_2}$，$h=x_1$，可计算

$$\begin{aligned} L_g h &= 0 \\ L_g L_f h &= 2x_3 \end{aligned}$$

在原点的任意一个邻域 U_0 内，L_gL_fh 既不恒等于零，又不恒异于零，因此相对阶在 U_0 内无定义。 □

例 4.1.2　实际上，在平衡点的一个邻域内相对阶无定义并非只是出现在人为想像的数字系统中。在实际系统中也会发生，如**球棒(ball and beam)**系统，其模型为

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= -g\sin\varphi + r\dot{\varphi}^2 \\ \ddot{\varphi} &= \tau - \frac{mgr\cos\varphi}{mr^2+J} - \frac{2mr\dot{r}\dot{\varphi}}{mr^2+J} \triangleq u \\ y &= r \end{aligned} \tag{4.5}$$

其中 u 定义了新的输入(回顾 ρ 与反馈变换无关)。状态空间形式的闭环模型可重写为($x=[r,\dot{r},\varphi,\dot{\varphi}]^{\mathrm{T}}$)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -g\sin x_3 + x_1x_4^2 \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= u \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

记

$$\begin{aligned} f &= x_2\frac{\partial}{\partial x_1} + (-g\sin x_3 + x_1x_4^2)\frac{\partial}{\partial x_2} + x_4\frac{\partial}{\partial x_3} \\ g &= \frac{\partial}{\partial x_4} \\ h &= x_1 \end{aligned}$$

计算得

$$\begin{aligned} L_f h &= x_2 \\ L_gL_f h &= 0 \\ L_f^2 h &= -g\sin x_3 + x_1x_4^2 \\ L_gL_f^2 h &= 2x_1x_4 \end{aligned}$$

这说明关于原点 $x=0$ 的相对阶无定义。就物理意义而言，意味着向心力项 $x_1x_4^2$ 是从新的输入 u (棒的角加速度)到输出 y (球的位置)的“最快”连接。当球的位置或者棒的角速度为零时，向心力变为零。注意，关于原点 $x=0$ 的线性近似是可控的，其相对阶为 4。 □

下面，我们引入全局相对阶的概念。

定义 4.1.2　**全局相对阶(Global Relative Degree)**　系统(4.1)的全局相对阶 ρ 定义为满足

$$L_gL_f^i h(x) \;=\; 0, \qquad \forall x\in\mathbb{R}^n, \quad 0\leqslant i\leqslant \rho-2$$

$$L_g L_f^{\rho-1} h(x) \neq 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

的整数。若

$$L_g L_f^i h(x) = 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall i \geqslant 0$$

则称$\rho = \infty$。 □

与定义 4.1.1 相比，定义 4.1.2 要求在整个状态空间 $\mathbb{R}^n$ 上均成立，而并非只在原点的一个邻域U_0 内成立。在本章中仅考虑在原点的一个邻域内相对阶有明确定义的系统，这就给系统加上了一个限制，而且排除了如例 4.1.1 和例 4.1.2 所示的系统。

评注 4.1.3 在线性系统(即 f 和 h 为线性的，g 为一个常数)的特殊情形下

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu \\ y &= cx \end{aligned}$$

相对阶 ρ 定义为满足如下条件的整数：

$$\begin{aligned} cA^i b &= 0, \qquad 0 \leqslant i \leqslant \rho - 2 \\ cA^{\rho-1} b &\neq 0 \end{aligned}$$

这个定义与全局相对阶一致，并且总是可定义的。若 $\rho \leqslant n$，则

$$\begin{aligned} y^{(i)} &= cA^i x, \qquad 1 \leqslant i \leqslant \rho - 1 \\ y^{(\rho)} &= cA^\rho x + cA^{\rho-1} bu \end{aligned}$$

□

下面的两个引理引入了对于相对阶 $\rho < \infty$ 的控制系统十分有用的状态坐标。

引理 4.1.1 设系统 (4.1) 的相对阶 $\rho < \infty$，则 $\rho \leqslant n$，并且对于任意的 $j = 1, \cdots, \rho$ 有

$$\operatorname{rank}\{dh, \cdots, d(L_f^{j-1} h)\}(x) = j, \qquad \forall x \in U_0$$

□

证明: 由 Leibniz 公式，相对阶 $\rho < \infty$ 的定义表明，在 U_0 中有

$$\langle dh, ad_f^{\rho-1} g \rangle \neq 0 \tag{4.6}$$

$$\langle dh, ad_f^i g \rangle = 0, \qquad 0 \leqslant i \leqslant \rho - 2 \tag{4.7}$$

重复使用 Leibniz 公式，对于 $0 \leqslant k \leqslant \rho - 1$，从式 (4.6) 和式 (4.7) 可得

$$\begin{aligned} \langle d(L_f^k h), ad_f^{\rho-k-1} g \rangle &\neq 0, \qquad \forall x \in U_0 \\ \langle d(L_f^k h), ad_f^i g \rangle &= 0, \qquad 0 \leqslant i \leqslant \rho - k - 2, \forall x \in U_0 \end{aligned}$$

从而在 U_0 内 $\rho \times \rho$阶矩阵

$$\begin{bmatrix} \langle dh, g \rangle & \cdots & \langle dh, ad_f^{\rho-1} g \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle d(L_f^{\rho-1} h), d \rangle & \cdots & \langle d(L_f^{\rho-1} h), ad_f^{\rho-1} g \rangle \end{bmatrix}$$

的秩为 ρ，这意味着

$$\mathrm{rank}\{dh, \cdots, d(L_f^{\rho-1}h)\}(x) \quad = \quad \rho, \qquad \forall x \in U_0$$

□

引理 4.1.2 假设系统 (4.1) 的相对阶 $\rho \leqslant n$，则存在 $n-\rho$ 个函数 $\xi_i(x), 1 \leqslant i \leqslant n-\rho$，使得

(i) 函数

$$\xi_1(x), \cdots, \xi_{n-\rho}(x), h(x), \cdots, L_f^{\rho-1}h(x)$$

构成一个关于原点的局部微分同胚；

(ii) 在局部坐标系

$$\begin{aligned}(\xi, z) &= (\xi(x), z(x)) = (\xi_1(x), \cdots, \xi_{n-\rho}(x), z_1(x), \cdots, z_\rho(x)) \\ &= (\xi_1(x), \cdots, \xi_{n-\rho}(x), h(x), \cdots, L_f^{\rho-1}h(x))\end{aligned}$$

下，$\langle d\xi_i, g\rangle = 0, 1 \leqslant i \leqslant n-\rho$，系统 (4.1) 表示为**跟踪型(tracking form)**，又称为**标准型(normal form)**：

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= \phi(\xi, z) \\ \dot{z}_i &= z_{i+1}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant \rho-1 \\ \dot{z}_\rho &= L_f^\rho h + uL_gL_f^{\rho-1}h \\ y &= z_1\end{aligned} \tag{4.8}$$

另外，若全局相对阶 ρ 有定义 $\rho \leqslant n$，且

(iii) 向量场

$$\tilde{f} = f - \frac{L_f^\rho h}{L_gL_f^{\rho-1}h}g, \qquad \tilde{g} = \frac{1}{L_gL_f^{\rho-1}h}g$$

是完备的，

则存在一个全局微分同胚，将系统 (4.1) 变换为跟踪型 (4.8)。 □

证明: 若 $\rho = n$，引理 4.1.1 表明在原点的一个邻域内有

$$\mathrm{rank}\{dh, \cdots, d(L_f^{n-1}h)\}(x) \quad = \quad n$$

因此由逆函数定理 A.1.1 可知

$$z_1 = h(x), \cdots, z_n = L_f^{n-1}h(x)$$

是一个局部微分同胚。在 z 坐标系下，系统 (4.1) 可表示为

$$\begin{aligned}\dot{z}_i &= z_{i+1}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n-1 \\ \dot{z}_n &= L_f^n h + uL_gL_f^{n-1}h\end{aligned}$$

若 $\rho < n$，由定义4.1.1有

$$\langle d(L_f^j h), g\rangle \quad = \quad 0, \qquad 0 \leqslant j \leqslant \rho-2, \ \forall x \in U_0$$

$$\langle d(L_f^{\rho-1})h, g\rangle \neq 0, \qquad \forall x \in U_0 \tag{4.9}$$

根据Frobenius定理(在定理A.4.3中令$\mathcal{D} = \text{span}\{g\}$所给定的形式)，除函数$h,\ldots,L_f^{\rho-2}h$之外，存在$n-\rho$个函数$\xi_i(x), 1\leqslant i\leqslant n-\rho$，使得在原点的一个邻域内有

$$\begin{aligned}\langle d\xi_i, g\rangle = 0, \qquad 1\leqslant i\leqslant n-\rho\\ \text{rank}\{dh,\cdots,d(L_f^{\rho-2}h), d\xi_1,\cdots,d\xi_{n-\rho}\}(x) = n-1\end{aligned} \tag{4.10}$$

由式(4.9)和式(4.10)，在原点的一个邻域内有

$$\text{rank}\{dh,\cdots,d(L_f^{\rho-1}h), d\xi_1,\cdots,d\xi_{n-\rho}\}(x) = n$$

因此由逆函数定理A.1.1可知

$$\begin{aligned}\xi_i &= \xi_i(x), \qquad 1\leqslant i\leqslant n-\rho\\ z_1 &= h(x)\\ &\vdots\\ z_\rho &= L_f^{\rho-1}h(x)\end{aligned}$$

是一个局部微分同胚。在(ξ,z)局部坐标系下，系统(4.1)变为

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_i &= L_f\xi_i + uL_g\xi_i, \qquad 1\leqslant i\leqslant n-\rho\\ \dot{z}_j &= L_f^j h + uL_gL_f^{j-1}h, \qquad 1\leqslant j\leqslant \rho\end{aligned}$$

由式(4.10)可知，$L_g\xi_i = 0, 1\leqslant i\leqslant n-\rho$，且由式(4.9)可知，$L_gL_f^{j-1}h = 0, 1\leqslant j\leqslant \rho-1$，从而在$(\xi,z)$局部坐标系下系统(4.1)可表示为式(4.8)。全局情形的证明留给读者作为练习。 □

评注 4.1.4 在上面的证明中，明确地选择函数$\xi_1(x),\cdots,\xi_{n-\rho}(x)$，使得$\langle d\xi_i, g\rangle = 0, 1\leqslant i\leqslant n-\rho$。另一方面，如果只是通过单纯地选择函数$\xi_1,\cdots,\xi_{n-\rho}$使得

$$\text{rank}\{dh,\cdots,d(L_f^{\rho-1}h), d\xi_1,\cdots,d\xi_{n-\rho}\} = n$$

来确定局部坐标$(h,\cdots,L_f^{\rho-1}h,\xi_1,\cdots,\xi_{n-\rho})$，则在这样的局部坐标系下，系统可表示为

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= \phi_1(\xi,z) + \phi_2(\xi,z)u\\ \dot{z}_i &= z_{i+1}, \qquad 1\leqslant i\leqslant \rho-1\\ \dot{z}_\rho &= L_f^\rho h + uL_gL_f^{\rho-1}h\\ y &= z_1\end{aligned}$$

□

引理 4.1.3 若系统(4.1)的相对阶$\rho\leqslant n$，则该系统是局部可部分状态反馈线性化的，其特征指数为ρ。 □

证明: 由引理4.1.2，存在关于原点的局部坐标，在该坐标下系统(4.1)可表示为式(4.8)。由定义4.1.1可知，在原点的一个邻域内有$L_gL_f^{\rho-1}h\neq 0$，且可定义状态反馈控制

$$L_f^\rho h + (L_gL_f^{\rho-1}h)u = v$$

即

$$u = \frac{1}{L_gL_f^{\rho-1}h}(-L_f^\rho h + v)$$

将其代入式 (4.8) 中，可得

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= \phi(\xi, z)\\ \dot{z}_i &= z_{i+1}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant \rho - 1\\ \dot{z}_\rho &= v\end{aligned}$$

由定义 2.4.1 可知，上式表明系统是具有指数 ρ 的局部可部分状态反馈线性化的。 □

评注 4.1.5 对于相对阶为 ρ 的系统，不要求分布 $\bar{\mathcal{G}}_{\rho-2}$ 的秩为常数，因此部分反馈线性化定理 2.4.2 可能不适用。这一事实可通过下例说明：

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 x_4^2\\ \dot{x}_2 &= x_3\\ \dot{x}_3 &= x_4\\ \dot{x}_4 &= u\\ y &= x_2\end{aligned}$$

其全局相对阶为 $\rho = 3$。记

$$\begin{aligned}g &= \frac{\partial}{\partial x_4}\\ f &= x_1 x_4^2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_4 \frac{\partial}{\partial x_3}\\ h &= x_2\end{aligned}$$

计算得

$$\begin{aligned}ad_{(-f)} g &= 2x_1 x_4 \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_3}\\ ad^2_{(-f)} g &= \frac{\partial}{\partial x_2}\\ [ad_{(-f)} g, g] &= -2x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\end{aligned}$$

因此，$\mathcal{G}_1$ 的对合闭包 $\bar{\mathcal{G}}_{\rho-2} = \bar{\mathcal{G}}_1$ 不具有常数秩，这是由于

$$\bar{\mathcal{G}}_1 = \text{span}\left\{\frac{\partial}{\partial x_4}, \frac{\partial}{\partial x_3}, x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\right\}$$

而 $ad_f^2 g \notin \bar{\mathcal{G}}_1$。 □

定义 4.1.3 对于系统 (4.1)，若

$$y_{\mathrm{r}}^{(i)} = L_f^i h(x_0), \qquad 0 \leqslant i \leqslant \rho - 1$$

则称初始条件 $x(0) = x_0 \in U_0$ 与参考信号 $y_{\mathrm{r}}(t)$ 是**相容的(compatible)**。 □

定义 4.1.4 令 $x_0 \in U_0 \subset \mathbb{R}^n$，其中 U_0 为原点的一个邻域，称使 $\phi(t, u, x_0) \notin U_0$ 的最小时间 $t > 0$ 为**逃逸时间(escape time)** $T(x_0, u, U_0)$，其中 $\phi(t, u, x_0)$ 表示对应于输入 u 和初始条件 $x(0) = x_0$ 的系统 (4.1) 的解。 □

若 $\rho \leqslant n$，应用引理 4.1.2，在新的坐标 (ξ, z) 下，可将系统 (4.1) 表示为跟踪型 (4.8)。由相对阶 ρ 的定义，在 U_0 中 $L_g L_f^{\rho-1} h(x) \neq 0$，施加于系统 (4.1) 上的输入与初始条件 x_0 是相容

的，则在原点的一个邻域 $V_0 \subset U_0$ 内可保证精确跟踪，即 $y(t) = y_{\rm r}(t), 0 \leqslant t < T(x_0, u_{\rm r}, V_0)$ 的输入可由如下**逆系统(inverse system)**给出：

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\xi}} &= \phi(\bar{\xi}, y_{\rm r}, \cdots, y_{\rm r}^{(\rho-1)}), \qquad \bar{\xi}(0) = \xi(0) \\ u_{\rm r} &= \frac{-L_f^{\rho} h(\bar{\xi}, y_{\rm r}, \cdots, y_{\rm r}^{(\rho-1)}) + y_{\rm r}^{(\rho)}}{L_g L_f^{\rho-1} h(\bar{\xi}, y_{\rm r}, \cdots, y_{\rm r}^{(\rho-1)})} \end{aligned} \tag{4.11}$$

逆系统的动态由 $y_{\rm r}, \cdots, y_{\rm r}^{(\rho-1)}$ 驱动，可称为跟踪动态。若参考信号 $y_{\rm r}(t) = 0$，则逆系统的动态

$$\dot{\bar{\xi}} = \phi(\bar{\xi}, 0) \tag{4.12}$$

称为零动态。零动态是众所周知的线性系统中的零点概念在非线性系统中的推广。下面给出零动态和跟踪动态的几何定义。

定义 4.1.5 零动态(Zero Dynamics) 设在 U_0 中系统 (4.1) 的相对阶为 $\rho \leqslant n$。令 $z_i = L_f^{i-1} h(x), 1 \leqslant i \leqslant \rho$。定义 $(n-\rho)$ 维流形 $M = \{x \in U_0 : h(x) = 0, \cdots, L_f^{\rho-1} h(x) = 0\}$。所谓的零动态是指约束在 M 上的系统 (4.1) 的动态。 □

由引理 4.1.2，在局部坐标系下，系统 (4.1) 的零动态在局部坐标系下可由

$$\dot{\xi} = \phi(\xi, 0), \qquad \xi \in \mathbb{R}^{n-\rho} \tag{4.13}$$

给出，并可通过在跟踪型 (4.8) 中令 $z_1 = 0, \cdots, z_\rho = 0$ 获得，这是由于 $M = \{(\xi, z) \in V_0 \subset U_0 : z_1 = 0, \cdots, z_\rho = 0\}$。

定义 4.1.6 最小相位(Minimum Phase) 若对于零动态，其原点 $\xi = 0$ 是一个渐近稳定的平衡点，则称相对阶 $\rho \leqslant n$ 的系统 (4.1) 是最小相位系统。不是最小相位的系统称为**非最小相位系统(non-minimum phase)**。 □

不失一般性，在上面的定义中平衡点取为原点。

例 4.1.3 计算单输入单输出(可控可观)线性系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu, \qquad x \in \mathbb{R}^n \\ y &= cx \end{aligned} \tag{4.14}$$

的零动态，其相对阶为 ρ，传递函数为

$$W(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + \cdots + b_{n-\rho} s^{n-\rho}}{a_0 + a_1 s + \cdots + a_{n-1} s^{n-1} + s^n} \triangleq \frac{n(s)}{d(s)}$$

其中 $b_{n-\rho} \neq 0$，且 $n(s)$ 和 $d(s)$ 是互质的，即无零极点对消发生。该系统可由如下的控制器标准型实现：

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ c &= \begin{bmatrix} b_0 & \cdots & b_{n-\rho} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

多项式 $n(s)$ 的零点称为系统(4.14)的零点，多项式 $d(s)$ 的零点称为系统(4.14)的极点。由引理4.1.2的证明，定义

$$\begin{aligned}
z_1 &= y = cx = b_0x_1 + \cdots + b_{n-\rho}x_{n-\rho+1} \\
z_2 &= \dot{y} = cAx = b_0x_2 + \cdots + b_{n-\rho}x_{n-\rho+2} \\
&\vdots \\
z_\rho &= y^{(\rho-1)} = cA^{\rho-1}x = b_0x_\rho + \cdots + b_{n-\rho}x_n
\end{aligned} \tag{4.15}$$

以及

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= x_1 \\
&\vdots \\
\xi_{n-\rho} &= x_{n-\rho}
\end{aligned}$$

由于 $b_{n-\rho} \neq 0$，从而

$$\begin{bmatrix} z \\ \xi \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc|cccc}
b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-\rho-1} & b_{n-\rho} & 0 & \cdots & 0 \\
0 & b_0 & \cdots & b_{n-\rho-2} & b_{n-\rho-1} & b_{n-\rho} & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & b_{n-\rho} \\
\hline
\multicolumn{4}{c|}{I_{(n-\rho)\times(n-\rho)}} & \multicolumn{4}{c}{0_{(n-\rho)\times\rho}}
\end{array}\right] x$$

是一个线性坐标变换。在新的坐标系下有

$$\begin{aligned}
\dot{z}_i &= z_{i+1}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant \rho - 1 \\
\dot{z}_\rho &= b_0x_{\rho+1} + \cdots + b_{n-\rho-1}x_n + b_{n-\rho}\Big(-\sum_{i=1}^{n} a_{i-1}x_i\Big) + b_{n-\rho}u \\
\dot{\xi}_i &= \xi_{i+1}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n - \rho - 1 \\
\dot{\xi}_{n-\rho} &= x_{n-\rho+1} = \frac{1}{b_{n-\rho}}(y - b_0\xi_1 - \cdots - b_{n-\rho-1}\xi_{n-\rho}) \\
y &= z_1
\end{aligned}$$

零动态在 $(n-\rho)$ 维流形

$$M = \{(z, \xi) \in \mathbb{R}^n : z_1 = 0, \cdots, z_\rho = 0\}$$

上演化，该流形为 $\mathbb{R}^n$ 的一个子空间，而零动态可由($\xi = [\xi_1, \cdots, \xi_{n-\rho}]^{\mathrm{T}}$)

$$\dot{\xi} = \begin{bmatrix}
0 & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 \\
-b_0/b_{n-\rho} & -b_1/b_{n-\rho} & \cdots & -b_{n-\rho-1}/b_{n-\rho}
\end{bmatrix} \xi \triangleq \Lambda\xi$$

给出。友矩阵 Λ 的特征多项式与传递函数的分子 $n(s)$ 一致，即 Λ 的特征值与传递函数的零点一致。若系统(4.14)的所有零点都具有正实部，则零动态是渐近稳定的，且系统是最小相位系统。 □

零动态是更一般的跟踪动态概念的一种特殊情形。

定义 4.1.7 跟踪动态(Tracking Dynamics) 设在 U_0 中系统(4.1)的相对阶 $\rho \leqslant n$，且存在一个初始条件 $x_0 \in U_0$ 与参考信号 $y_r(t)$ 是相容的，即 $y_r^{(i)}(0) = L_f^i h(x_0), 0 \leqslant i \leqslant \rho - 1$。令

$$M_t = \{x \in U_0 : h(x) = y_r(t), \cdots, L_f^{\rho-1} h(x) = y_r^{(\rho-1)}(t)\}$$

为时变的$(n-\rho)$维积分流形，称为**跟踪流形(tracking manifold)**。所谓的跟踪动态就是约束于M_t上的系统(4.1)的动态。 □

评注 4.1.6 跟踪动态可通过实施状态反馈

$$u = \frac{-L_f^\rho h + y_r^{(\rho)}}{L_g L_f^{\rho-1} h}$$

获得，该反馈使得跟踪流形 M_t 对于闭环动态

$$\dot{x} = f - g\frac{L_f^\rho h}{L_g L_f^{\rho-1} h} + g\frac{y_r^{(\rho)}}{L_g L_f^{\rho-1} h}$$

是不变的。

若初始时刻系统在 M_t 上，即$x(0)$与 y_r 是相容的，则闭环动态与跟踪动态是一致的。等价地，由引理 4.1.2，系统 (4.1) 的跟踪动态在局部坐标系下可由

$$\dot{\xi} = \phi(\xi, y_r, \cdots, y_r^{\rho-1}), \qquad \xi \in \mathbb{R}^{n-\rho} \tag{4.16}$$

给出，且可通过在跟踪型 (4.8) 中令 $z_1 = y_r, \cdots, z_\rho = y_r^{(\rho-1)}$ 来获得，这是由于 $M_t = \{(\xi, z) \in V_0 \subset U_0 : z_1 = y_r, \cdots, z_\rho = y_r^{(\rho-1)}\}$。 □

例 4.1.4 (续例 4.1.3)线性系统 (4.14) 的跟踪动态由下式给出：

$$\dot{\xi} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ b_0/b_{n-\rho} & -b_1/b_{n-\rho} & \cdots & -b_{n-\rho-1}/b_{n-\rho} \end{bmatrix} \xi + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1/b_{n-\rho} \end{bmatrix} y_r$$

若系统 (4.14) 的所有零点均具有负实部，则对于输入 y_r，系统是 BIBS (参见第 3 章)稳定的。□

对于线性系统而言，渐近稳定的零动态能够保证跟踪动态具有 BIBS 稳定的性质，但是非线性系统可能不具有这一性质，如下例所示。

例 4.1.5 考虑系统

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_1 x_2 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= u \\ y &= x_2 \end{aligned}$$

其跟踪动态为

$$\dot{x}_1 = [-1 + y_r(t)]x_1 + y_r(t)$$

而零动态由渐近稳定线性系统

$$\dot{x}_1 = -x_1$$

给出，但是跟踪动态不是 BIBS 稳定的。若 y_r 是常数，当 $y_r < 1$ 时跟踪动态是有界的，而当 $y_r > 1$ 时跟踪动态是无界的。 □

4.2 输入–输出反馈线性化

在这一节中，引入通过状态反馈给出输入–输出线性化的概念。主要结果表明，每个相对阶有定义且$\rho \leqslant n$的系统是可输入–输出反馈线性化的。对于这样的系统，如果跟踪动态是BIBS稳定的，则讨论如何由静态状态反馈求解跟踪问题。

定义 4.2.1　输入–输出反馈线性化(Input-Output Feedback Linearization) 系统(4.1)称为在原点的一个邻域U_0内(在$\mathbb{R}^n$内)是局部(全局)可状态反馈输入–输出线性化的，若存在一个状态反馈

$$u = k(x) + \beta(x)v$$

其中k和β为光滑函数，$\beta(x) \neq 0, \forall x \in U_0$ ($\beta(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$)，使得闭环系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)k(x) + g(x)\beta(x)v \\ y &= h(x) \end{aligned}$$

在U_0内(在$\mathbb{R}^n$内)的输入–输出动态为

$$\frac{d^r y}{dt^r} = v$$

其中$1 \leqslant r \leqslant n$。　□

若$r = n$，则系统(4.1)同时是可状态反馈线性化的和可输入–输出线性化的。

定义 4.2.2　静态状态反馈跟踪(Tracking by Static State Feedback) 给定任意光滑有界参考信号$y_{\mathrm{r}}(t)$，且其对时间的导数$y_{\mathrm{r}}^{(1)}(t), \cdots, y_{\mathrm{r}}^{(\rho)}(t)$ 是有界的，当存在一个控制

$$u = k(x) + \beta(x)v_{\mathrm{r}}(y_r(t), \cdots, y_{\mathrm{r}}^{(\rho)}(t))$$

使得对于任意给定的初始条件$x(0) \in \mathbb{R}^n$，闭环系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)k(x) + g(x)\beta(x)v_{\mathrm{r}} \\ y &= h(x) \end{aligned}$$

满足

(i) $\forall t \geqslant 0$，$\|x(t)\|$ 是有界的，

(ii) $\lim_{t\to\infty}(y(t) - y_{\mathrm{r}}(t)) = 0$。

其中$\beta(x) \neq 0$，$\forall x \in \mathbb{R}^n$，$k$和$\beta$为$\mathbb{R}^n$上的光滑函数，$v_{\mathrm{r}}$为连续函数，则称系统(4.1)的跟踪问题是由静态状态反馈全局可解的。　□

现在，为给出并证明这一节中的主要定理做好了准备。

定理 4.2.1　输入–输出反馈线性化(Input-Output Feedback Linearization) 设ρ有定义，则系统(4.1)是具有指数ρ的局部可部分状态反馈线性化的，并且是局部可状态反馈输入–输出线性化的，即局部反馈等价于

$$\dot{\xi} = \phi(\xi, z), \qquad \xi \in \mathbb{R}^{n-\rho}$$

$$\begin{aligned}\dot{z}_i &= z_{i+1}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant \rho - 1 \\ \dot{z}_\rho &= v \\ y &= z_1\end{aligned} \tag{4.17}$$

当且仅当 $\rho \leqslant n$。 □

证明: 充分性。若 $\rho \leqslant n$，利用引理4.1.2，可定义

$$L_f^\rho h + u L_g L_f^{\rho-1} h = v$$

从而跟踪型(4.8)变为式(4.17)。由 ρ 的定义，在 U_0 中 $L_g L_f^{\rho-1} h(x) \neq 0$，可以解出 u，则有

$$u = \frac{-L_f^\rho h(x)}{L_g L_f^{\rho-1} h(x)} + \frac{1}{L_g L_f^{\rho-1} h(x)} v \triangleq k(x) + \beta(x) v \tag{4.18}$$

其中 $\beta(0) \neq 0$。因此可定义式(4.18)，且其与局部微分同胚 $\xi = \xi(x), z = z(x)$ 一起定义了一个反馈变换。因此，可证明(4.1)是可部分状态反馈线性化的，且局部反馈等价于式(4.17)。
必要性。系统(4.17)的相对阶有定义，并且 $\rho \leqslant n$。在反馈变换下 ρ 是不变的，因此系统(4.1)有相同的相对阶 ρ。 □

定理 4.2.2 全局输入–输出反馈线性化(Global Input-Output Feedback Linearization) *假设全局相对阶 ρ 有定义，且 $\rho \leqslant n$。系统(4.1)是全局可输入–输出反馈线性化的，当且仅当向量场*

$$\tilde{f} = f - \frac{L_f^\rho h}{L_g L_f^{\rho-1} h} g, \qquad \tilde{g} = \frac{1}{L_g L_f^{\rho-1} h} g$$

是完备的。 □

证明: 可参考引理4.1.2的全局情形和定理4.2.1进行证明。 □

定理 4.2.3 静态状态反馈跟踪(Tracking by Static State Feedback) *考虑系统(4.1)，假设全局相对阶有定义，且 $\rho \leqslant n$，跟踪动态是BIBS稳定的，且向量场*

$$\tilde{f} = f - \frac{L_f^\rho h}{L_g L_f^{\rho-1} h} g, \qquad \tilde{g} = \frac{1}{L_g L_f^{\rho-1} h} g$$

是完备的，则跟踪问题可通过静态状态反馈全局可解。 □

证明: 引理4.1.2全局适用。控制(4.18)是全局有定义的，选择

$$v = -k_1(z_1 - y_r(t)) - \cdots - k_\rho(z_\rho - y_r^{(\rho-1)}(t)) + y_r^{(\rho)}(t)$$

且 $s^\rho + k_\rho s^{\rho-1} + \cdots + k_1$ 是一个Hurwitz多项式，得

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \vdots \\ \dot{e}_{\rho-1} \\ \dot{e}_\rho \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -k_1 & -k_2 & \cdots & -k_\rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_{\rho-1} \\ e_\rho \end{bmatrix}$$

其中 $e_i = y^{(i-1)} - y_r^{(i-1)}$，使得对于任意初始跟踪误差 $e(0)$，实现渐近跟踪。由 $y_r, \cdots, y_r^{(\rho)}$ 有界可知，$z_1, \cdots, z_\rho$ 也有界。又由于跟踪动态是BIBS稳定的，将 $z_1(t), \cdots, z_\rho(t)$ 视为有界参考信号，则从式(4.17)可得 ξ 也是有界的。综上所述，状态是有界的。 □

评注 4.2.1 若状态反馈 (4.18)

$$u = k(x) + \beta(x)v$$

与ξ相关，则为保持输出及其$\rho-1$个时间导数等于零而需要的控制作用可能依赖于零动态$\dot{\xi}=\phi(\xi,0)$的原点$\xi=0$的稳定性。 □

例 4.2.1 考虑非最小相位系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2^2 + u \\ \dot{x}_2 &= x_2^3 \\ y &= x_1\end{aligned}$$

其输入–输出线性化控制为

$$u = -x_2^2 + v$$

若$x_2(0)\neq 0$，当t趋向于无穷时，该控制趋向于无穷。这是因为在这种情形下，对于任意的$y_{\mathrm{r}}(t)$，跟踪动态

$$\dot{x}_2 = x_2^3$$

是无界的，因此定理 4.2.3 不适用。 □

例 4.2.2 考虑系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1^3 + x_2^3 \\ \dot{x}_2 &= u + x_2^2 \\ y &= x_2\end{aligned}$$

其输入–输出线性化控制为

$$u = -x_2^2 + v$$

而跟踪动态

$$\dot{x}_1 = -x_1^3 + y_{\mathrm{r}}^3(t)$$

是 BIBS 稳定的，这一点可通过考虑函数

$$V = \frac{1}{2}x_1^2$$

得到确认。其对时间的导数满足

$$\dot{V} = -x_1^4 + x_1 y_{\mathrm{r}}^3 \leqslant -x_1^4 + |x_1|M^3$$

若$y_{\mathrm{r}}(t)$有界，即$y_{\mathrm{r}}(t)\leqslant M, \forall t\geqslant 0$，对于任意的$|x_1|>M$有$\dot{V}<0$，因此$x_1(t)$是有界的。定理 4.2.3 适用，且跟踪问题的解为控制$(k>0)$

$$u = -x_2^2 - k(x_2 - y_{\mathrm{r}}) + \dot{y}_{\mathrm{r}}$$

□

例 4.2.3 对单输入单输出线性系统 (4.14) 应用定理 4.2.1 给出的反馈变换，在这种情形下，状

态反馈 (4.18) 为

$$u = -\frac{b_0}{b_{n-\rho}}x_{\rho+1} - \cdots - \frac{b_{n-\rho-1}}{b_{n-\rho}}x_n + \sum_{i=1}^{n} a_{i-1}x_i + \frac{1}{b_{n-\rho}}v$$

且配置闭环系统的 $n-\rho$ 个极点与原系统的 $n-\rho$ 个零点一致，即进行零极点对消，则闭环系统变为

$$\begin{aligned}
\dot{z}_i &= z_{i+1}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant \rho - 1 \\
\dot{z}_\rho &= v \\
\dot{\xi} &= \xi_{i+1}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n - \rho - 1 \\
\dot{\xi}_{n-\rho} &= -\frac{b_0}{b_{n-\rho}}\xi_1 - \cdots - \frac{b_{n-\rho-1}}{b_{n-\rho}}\xi_{n-\rho} + \frac{z_1}{b_{n-\rho}} \\
y &= z_1
\end{aligned}$$

该例说明非线性系统的输入–输出线性化设计是线性系统零极点对消方法的一个推广。 □

在 $\rho = n$ 的情形下，输入–输出反馈线性化定理 4.2.1 可叙述如下。

定理 4.2.4 *对于系统* (4.1)，*其中* $f(0) = 0$，*当且仅当相对阶* $\rho = n$ *时，或者等价地，在* U_0 *中有下列条件成立时*:

(i) $\operatorname{rank}\mathcal{G}_{n-1} = n$,

(ii) $\mathcal{G}_{n-2}$ *是对合的且具有常数秩* $n-1$,

(iii) $\langle dh, \mathcal{G}_{n-2}\rangle = 0$,

则系统同时为局部可状态反馈输入–输出线性化的和可状态反馈线性化的。 □

证明: 由参考输入–输出反馈线性化定理 4.2.1 和反馈线性化定理 2.2.1 可证。 □

结合输入–输出反馈线性化定理 4.2.1 与三角型部分线性化定理 2.4.3，则可以得到下面的结论。

定理 4.2.5 *对于系统* (4.1)，*假设* $\rho \leqslant n$。*若分布*

$$\mathcal{G}_i = \operatorname{span}\{g, \cdots, ad_f^i g\}, \qquad 0 \leqslant i \leqslant \rho - 1$$

在 U_0 *中是对合的且具有常数秩* $i+1$，*则系统* (4.1) *同时是具有指数* ρ *的三角型局部可部分状态反馈线性化的和局部可状态反馈输入–输出线性化的，即局部反馈等价于*

$$\begin{aligned}
\dot{\xi} &= \phi(\xi, z_1) \\
\dot{z}_i &= z_{i+1}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant \rho - 1 \\
\dot{z}_\rho &= v \\
y &= z_1
\end{aligned} \tag{4.19}$$

□

例 4.2.4 考虑系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_4^3\\ \dot{x}_2 &= x_3\\ \dot{x}_3 &= x_4\\ \dot{x}_4 &= u\\ y &= x_2\end{aligned}$$

并记

$$\begin{aligned}f &= x_4^3\frac{\partial}{\partial x_1} + x_3\frac{\partial}{\partial x_2} + x_4\frac{\partial}{\partial x_3}\\ g &= \frac{\partial}{\partial x_4}\\ h &= x_2\end{aligned}$$

该系统的全局相对阶有定义且等于3。定理4.2.4和定理4.2.5不适用。实际上，计算

$$\begin{aligned}ad_{(-f)}g &= 3x_4^2\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_3}\\ [g, ad_{(-f)}g] &= 6x_4\frac{\partial}{\partial x_1}\end{aligned}$$

可知在原点的任意邻域内，有

$$[g, ad_{(-f)}g] \notin \mathrm{span}\{g, ad_f g\}$$

因此分布 $\mathcal{G}_1$ 不是对合的。但是，输入–输出反馈线性化定理4.2.1适用。 □

例 4.2.5 考虑系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= x_3^3 + u\\ \dot{x}_3 &= -x_3^3 + x_1\\ y &= x_1\end{aligned}$$

记

$$\begin{aligned}f &= x_2\frac{\partial}{\partial x_1} + x_3^3\frac{\partial}{\partial x_2} + (-x_3^3 + x_1)\frac{\partial}{\partial x_3}\\ g &= \frac{\partial}{\partial x_2}\\ h &= x_1\end{aligned}$$

该系统同时是全局可状态反馈输入–输出线性化的和全局可状态反馈线性化的，但不是同时可线性化的和可输入–输出线性化的。计算

$$\begin{aligned}L_f h &= x_2\\ L_g h &= 0\\ L_g L_f h &= 1\end{aligned}$$

可知其全局相对阶 ρ 为2。由于 $\rho < 3$，定理4.2.4不适用。系统已经表示为跟踪型(4.8)。逆系

统为

$$
\begin{aligned}
\dot{\xi} &= -\xi^3 + y_{\mathrm{r}} \\
u &= -\xi^3 + y_{\mathrm{r}}^{(2)}
\end{aligned} \tag{4.20}
$$

且跟踪动态

$$
\dot{\xi} = -\xi^3 + y_{\mathrm{r}}
$$

是BIBS稳定的。由于其零动态是$\dot{\xi} = -\xi^3$，故系统是最小相位的。状态反馈输入–输出线性化控制($k_1 > 0, k_2 > 0$)

$$
u = -x_3^3 - k_1 x_1 - k_2 x_2 + v_{\mathrm{r}} \tag{4.21}
$$

使得输入–输出映射为一个二阶线性系统

$$
\ddot{y} = -k_1 y - k_2 \dot{y} + v_{\mathrm{r}}
$$

设

$$
v_{\mathrm{r}} = k_1 y_{\mathrm{r}} + k_2 \dot{y}_{\mathrm{r}} + \ddot{y}_{\mathrm{r}} \tag{4.22}
$$

则闭环系统可跟踪任意参考信号y_{r}。当x_1趋近于y_{r}时，状态x_3的动态渐近趋近于跟踪动态

$$
\dot{x}_3 = -x_3^3 + y_{\mathrm{r}}
$$

由于向量场

$$
\begin{aligned}
\tilde{f} &= f - \frac{L_f^2 h}{L_g L_f h} g = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + (-x_3^3 + x_1) \frac{\partial}{\partial x_3} \\
\tilde{g} &= \frac{1}{L_g L_f h} g = \frac{\partial}{\partial x_2}
\end{aligned}
$$

都是完备的，全局相对阶有定义($\rho = 2$)且跟踪动态是BIBS稳定的，因此可以应用定理4.2.3。该系统亦是全局可状态反馈线性化的。事实上，考虑坐标变换

$$
\begin{aligned}
z_1 &= x_3 \\
z_2 &= -x_3^3 + x_1 \\
z_3 &= x_2 - 3x_1 x_3^2 + 3x_3^5
\end{aligned}
$$

如下所示，该变换是全局可逆的

$$
\begin{aligned}
x_1 &= z_2 + z_1^3 \\
x_2 &= z_3 + 3z_2 z_1^2 \\
x_3 &= z_1
\end{aligned}
$$

在新的坐标系下，系统变为

$$
\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= z_2 \\
\dot{z}_2 &= z_3 \\
\dot{z}_3 &= x_3^3 - 3x_2 x_3^2 + 21 x_1 x_3^4 - 6x_1^2 x_3 - 15 x_3^7 + u \\
y &= z_2 + z_1^3
\end{aligned}
$$

因此，反馈线性化控制为

$$\begin{aligned}u &= -x_3^3+3x_2x_3^2-21x_1x_3^4+6x_1^2x_3+15x_3^7\\&\quad -k_1x_3-k_2(-x_3^3+x_1)-k_3(x_2-3x_1x_3^2+3x_3^5)+v_{\rm r}\end{aligned}\tag{4.23}$$

且闭环系统为

$$\begin{aligned}\dot z_1 &= z_2\\ \dot z_2 &= z_3\\ \dot z_3 &= -k_1z_1-k_2z_2-k_3z_3+v_{\rm r}\\ y &= z_2+z_1^3\end{aligned}$$

通过选择 k_1, k_2 和 k_3，使得 $s^3+k_3s^2+k_2s+k_1$ 是 Hurwitz 多形式，可全局镇定该系统。至于跟踪问题，驱动信号 $v_{\rm r}$ 将由逆系统

$$\begin{aligned}\dot z_{\rm r1} &= -z_{\rm r1}^3+y_{\rm r}\\ z_{\rm r2} &= -z_{\rm r1}^3+y_{\rm r}\\ z_{\rm r3} &= -3z_{\rm r1}^2(-z_{\rm r1}^3+y_{\rm r})+\dot y_{\rm r}=3z_{\rm r1}^5-3z_{\rm r1}^2y_{\rm r}+\dot y_{\rm r}\\ \dot z_{\rm r3} &= -3z_{\rm r1}^2\dot y_{\rm r}+\ddot y_{\rm r}+(15z_{\rm r1}^4-6z_{\rm r1}y_{\rm r})(-z_{\rm r1}^3+y_{\rm r})\\ &= -3z_{\rm r1}^2\dot y_{\rm r}+\ddot y_{\rm r}-15z_{\rm r1}^7+21z_{\rm r1}^4y_{\rm r}-6z_{\rm r1}y_{\rm r}^2\\ v_{\rm r} &= k_1z_{\rm r1}+k_2z_{\rm r2}+k_3z_{\rm r3}+\dot z_{\rm r3}\end{aligned}\tag{4.24}$$

来确定。

注意，到目前为止所研究的理论导致跟踪问题有两个不同的状态反馈解，分别由式 (4.21)、式(4.22) 和式 (4.23)、式(4.24) 给出。 □

4.3 干扰解耦

现在，考虑具有如下未知干扰向量的系统:

$$\theta(t) = [\theta_1(t),\cdots,\theta_p(t)]^{\rm T}\in\Omega\subset\mathbb{R}^p$$

并假设 θ 非线性地进入状态方程

$$\begin{aligned}\dot x &= f(x)+g(x)u+q(x,\theta(t))\\ y &= h(x)\end{aligned}\tag{4.25}$$

其中 $q(x,\theta)$ 为一个光滑函数，且 $q(x,0)=0, \forall x\in\mathbb{R}^n$，或者线性地进入状态方程

$$\begin{aligned}\dot x &= f(x)+g(x)u+\sum_{i=1}^{p}\theta_i(t)q_i(x)\\ y &= h(x)\end{aligned}\tag{4.26}$$

即 $q(x,\theta(t))=\sum_{i=1}^{p}\theta_i(x)q_i(x)$。当 $\theta(t)=0, \forall t\geqslant 0$ 时，得到标称系统 (4.1)。本节研究干扰抑制问题和在干扰抑制要求下的跟踪问题。

定义 4.3.1 干扰特征指数(Disturbance Characteristic Index) 对于系统 (4.25)，干扰特征指

数ν定义为满足：

$$\begin{aligned} L_qL_f^ih(x) &= 0, \quad 0\leqslant i\leqslant \nu-2, \forall x\in\mathbb{R}^n, \forall\theta\in\Omega \\ L_qL_f^{\nu-1}h(x) &\neq 0, \quad 对于某个\theta\in\Omega, 对于某个x\in\mathbb{R}^n \end{aligned}$$

的整数。若有

$$L_qL_f^ih(x) = 0, \quad i\geqslant 0, \forall x\in\mathbb{R}^n, \forall\theta\in\Omega$$

则定义$\nu=\infty$。 □

注意，与相对阶ρ的定义相反，干扰特征指数ν总是有定义的。对于闭环系统，将f变换到$f+kg$的状态反馈控制$u=k(x)+\beta(x)v$，可能影响到所定义的干扰特征指数

$$\begin{aligned} L_gL_{f+kg}^ih(x) &= 0, \quad 0\leqslant i\leqslant \nu-2, \forall x\in\mathbb{R}^n, \forall\theta\in\Omega \\ L_qL_{f+kg}^{\nu-1}h(x) &\neq 0, \quad 对于某个\theta\in\Omega, 对于某个x\in\mathbb{R}^n \end{aligned}$$

这一事实是求解如下所定义的干扰抑制问题的关键。

定义 4.3.2 **干扰抑制(Disturbance Rejection)** 对于系统(4.25)，称干扰抑制问题，或称为**干扰解耦(disturbance decoupling)** 问题通过静态状态反馈全局可解，当存在一个静态状态反馈

$$u=k(x)+\beta(x)v$$

使得闭环系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x)+g(x)k(x)+g(x)\beta(x)v+q(x,\theta(t)) \\ y &= h(x) \end{aligned}$$

有$\nu=\infty$，其中k和β为$\mathbb{R}^n$上的光滑函数，且$\beta(x)\neq 0, \forall x\in\mathbb{R}^n$。 □

下面的结果表明，在合适的坐标系下，干扰特征指数ν和相对阶ρ之间的重要关系。

引理 4.3.1 对于标称系统，假设$\rho\leqslant n$，则存在$n-\rho$个函数$\xi_i(x), 1\leqslant i\leqslant n-\rho$，使得

(i) 函数

$$\xi_1(x),\cdots,\xi_{n-\rho}(x),h(x),\cdots,L_f^{\rho-1}h(x)$$

构成一个关于原点的局部微分同胚，

(ii) $\langle d\xi_i, g\rangle = 0, 1\leqslant i\leqslant n-\rho$

在局部坐标系

$$(\xi,z)=(\xi(x),z(x))=(\xi_1(x),\cdots,\xi_{n-\rho}(x),z_1(x),\cdots,z_\rho(x))$$

下，系统(4.25)可表示如下：

当$\nu>\rho$时，

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_i &= L_f\xi_i+L_q\xi_i, \quad 1\leqslant i\leqslant n-\rho \\ \dot{z}_j &= z_{j+1}, \quad 1\leqslant j\leqslant \rho-1 \\ \dot{z}_\rho &= L_f^\rho h+uL_gL_f^{\rho-1}h \end{aligned}$$

$$y = z_1 \tag{4.27}$$

当 $\nu = \rho$ 时，

$$\begin{aligned}
\dot{\xi}_i &= L_f \xi_i + L_q \xi_i, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n-\rho \\
\dot{z}_j &= z_{j+1}, \qquad 1 \leqslant j \leqslant \rho - 1 \\
\dot{z}_\rho &= L_f^\rho h + u L_g L_f^{\rho-1} h + L_q L_f^{\rho-1} h \\
y &= z_1
\end{aligned} \tag{4.28}$$

当 $\nu < \rho$ 时，

$$\begin{aligned}
\dot{\xi}_i &= L_f \xi_i + L_q \xi_i, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n-\rho \\
\dot{z}_j &= z_{j+1}, \qquad 1 \leqslant j \leqslant \nu - 1 \\
\dot{z}_j &= z_{j+1} + L_q L_f^{j-1} h, \qquad \nu \leqslant j \leqslant \rho - 1 \\
\dot{z}_\rho &= L_f^\rho h + u L_g L_f^{\rho-1} h + L_q L_f^{\rho-1} h \\
y &= z_1
\end{aligned} \tag{4.29}$$

若向量场

$$\tilde{f} = f - \frac{L_f^\rho h}{L_g L_f^{\rho-1} h} g, \qquad \tilde{g} = \frac{1}{L_g L_f^{\rho-1} h} g$$

是完备的且全局相对阶有定义，则存在一个全局坐标变换，将系统 (4.25) 变换到式 (4.27)、式 (4.28) 和式 (4.29)。 □

证明: 由于 $\rho \leqslant n$，引理4.1.2适用于标称系统。在引理4.1.2建立的局部坐标系 $\xi_1, \cdots, \xi_{n-\rho}, z_1 = h, \cdots, z_\rho = L_f^{\rho-1} h$ 下，$q(x,\theta)$ 可以表示为

$$q = \sum_{i=1}^{n-\rho} L_q \xi_i(x) \frac{\partial}{\partial \xi_i} + \sum_{i=1}^{\rho} L_q L_f^{i-1} h \frac{\partial}{\partial z_i}$$

若 $\nu > \rho$，由定义 4.3.1

$$L_q L_f^i h = 0, \qquad 0 \leqslant i \leqslant \rho - 1$$

有

$$q = \sum_{i=1}^{n-\rho} L_q \xi_i(x) \frac{\partial}{\partial \xi_i}$$

若 $\nu = \rho$，则有

$$q = \sum_{i=1}^{n-\rho} L_q \xi_i(x) \frac{\partial}{\partial \xi_i} + L_q L_f^{\rho-1} h \frac{\partial}{\partial z_\rho}$$

而当 $\nu < \rho$ 时，得

$$q = \sum_{i=1}^{n-\rho} L_q \xi_i(x) \frac{\partial}{\partial \xi_i} + \sum_{i=\nu}^{\rho} L_q L_f^{i-1} h \frac{\partial}{\partial z_i}$$

由上述 3 种不同情形下 q 的表达式及引理 4.1.2 得到的跟踪型 (4.8)，引理得证。该引理的全局情形是引理 4.1.2 全局情形的一个推论。 □

在上述3种情形下，引理4.3.1所给出的标称系统的跟踪动态

$$\dot{\xi}_i = L_f\xi_i(\xi, z) + L_q\xi_i(\xi, z, \theta(t)), \qquad 1 \leqslant i \leqslant n-\rho \tag{4.30}$$

是我们所关注的。在线性参数的情形下，式(4.30)为

$$\dot{\xi}_i = L_f\xi_i(\xi, z) + \sum_{j=1}^{p}\theta_j(t)L_{q_j}\xi_i(\xi, z) \tag{4.31}$$

定理 4.3.1 干扰抑制(Disturbance Rejection) 对于标称系统，假设全局相对阶为 $\rho \leqslant n$，且向量场

$$\tilde{f} = f - \frac{L_f^\rho h}{L_g L_f^{\rho-1}h}g, \qquad \tilde{g} = \frac{1}{L_g L_f^{\rho-1}h}g$$

是完备的。当且仅当 $\nu > \rho$ 时，干扰抑制问题由静态状态反馈全局可解。此时，如下给定的状态反馈控制

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{\rho-1}h(x)}(-L_f^\rho h(x) + v) \tag{4.32}$$

是干扰抑制问题的解。 □

证明: 充分性。若 $\nu > \rho$，应用引理4.1.2的全局情形可得到式(4.27)。由于 $L_g L_f^{\rho-1}h \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$，控制(4.32)有定义，将式(4.32)代入式(4.27)，可得闭环系统

$$\begin{aligned}
\dot{\xi}_i &= L_f\xi_i + L_q\xi_i, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n-\rho \\
\dot{z}_j &= z_{j+1}, \qquad 1 \leqslant j \leqslant \rho - 1 \\
\dot{z}_\rho &= v \\
y &= z_1
\end{aligned}$$

的干扰特征指数 $\nu = \infty$。而且输入–输出行为是线性的，可表示为

$$\frac{d^\rho y(t)}{dt^\rho} = v(t)$$

它不受干扰 θ 影响，而干扰 θ 仅影响状态 $\xi_1, \cdots, \xi_{n-\rho}$。

必要性。从式(4.28)和式(4.30)可知，无论采用哪种状态反馈 $u = k(x) + \beta(x)v$，闭环系统的干扰特征指数均保持不变，且等于 $\nu \leqslant \rho \leqslant n$。 □

定义 4.3.3 具有干扰抑制的跟踪(Tracking with Disturbance Rejection) 对于系统(4.25)，称具有干扰抑制的跟踪问题由静态状态反馈全局可解，当存在一个静态状态反馈

$$u = k(x) + \beta(x)v_{\mathrm{r}}(y_{\mathrm{r}}(t), \cdots, y_{\mathrm{r}}^{(\rho)}(t)) \tag{4.33}$$

使得对于任意光滑有界参考信号 $y_{\mathrm{r}}(t)$，其对时间的导数 $y_{\mathrm{r}}^{(1)}, \cdots, y_{\mathrm{r}}^{(\rho)}$ 有界，以及任意的初始条件 $x(0) \in \mathbb{R}^n$，闭环系统

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= f(x) + g(x)k(x) + g(x)\beta(x)v_{\mathrm{r}}(t) + q(x, \theta(t)) \\
y &= h(x)
\end{aligned}$$

满足:

(i) $\nu = \infty$,

(ii) $\forall t \geqslant 0$，$\|x(t)\|$ 是有界的，

(iii) $\lim_{t\to\infty}(y(t)-y_{\mathrm{r}}(t))=0$，

其中 k 和 β 为 $\mathbb{R}^n$ 上的光滑函数，$\beta(x)\neq 0,\forall x\in\mathbb{R}^n$，$v_{\mathrm{r}}$ 为一个连续函数。 □

定理 4.3.2 具有干扰抑制的跟踪(Tracking with Disturbance Rejection) 对于标称系统，假设全局相对阶为 $\rho\leqslant n$，且向量场

$$\tilde{f}=f-\frac{L_f^{\rho}h}{L_gL_f^{\rho-1}h}g,\qquad \tilde{g}=\frac{1}{L_gL_f^{\rho-1}h}g$$

是完备的。若 $\nu>\rho$，且对于任意有界干扰 $\theta(t)$，动态 (4.30) 是BIBS稳定的，则具有干扰抑制的跟踪问题由静态状态反馈

$$u \;=\; \frac{1}{L_gL_f^{\rho-1}h}(-L_f^{\rho}h-k_1h-\cdots-k_{\rho}L_f^{\rho-1}h+v_{\mathrm{r}}) \tag{4.34}$$

全局可解，这里 $s^{\rho}+k_{\rho}s^{\rho-1}+\cdots+k_1$ 是一个Hurwitz 多项式，且

$$v_{\mathrm{r}} \;=\; k_1y_{\mathrm{r}}+\cdots+k_{\rho}y_{\mathrm{r}}^{(\rho-1)}+y_{\mathrm{r}}^{(\rho)}$$

□

证明: 应用定理4.3.1。另外，将式 (4.34) 代入式 (4.27)，输入–输出系统变为

$$\begin{aligned}
\dot{z}_j &= z_{j+1},\qquad 1\leqslant j\leqslant \rho-1\\
\dot{z}_{\rho} &= -k_1(z_1-y_{\mathrm{r}})-\cdots-k_{\rho}(z_{\rho}-y_{\mathrm{r}}^{(\rho-1)})+y_{\mathrm{r}}^{(\rho)}\\
\dot{\xi}_i &= L_f\xi_i+L_q\xi_i\\
y &= z_1
\end{aligned}$$

记 $e_i=z_i-y_{\mathrm{r}}^{(i-1)},1\leqslant i\leqslant\rho$，$e=[e_1,\cdots,e_{\rho}]^{\mathrm{T}}$，可得

$$\dot{e}=\begin{bmatrix}0&1&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ 0&0&\cdots&1\\ -k_1&-k_2&\cdots&-k_{\rho}\end{bmatrix}e$$

定义 4.3.3 的条件 (i) 和条件 (iii) 成立。对于任意有界的干扰 $\theta(t)$，式 (4.30) 的动态是BIBS稳定的，因此也满足条件 (ii)。 □

当$\nu\leqslant\rho$时，由干扰抑制定理4.3.1的必要性部分可知，不存在一个状态反馈控制 (4.32) 使得输出不受干扰影响。下一节将特别研究这些情形。

4.4 干扰抑制

这一节将内容限于系统 (4.26)，只讨论当未知干扰是线性时的情形，且假设干扰解耦问题是不可解的(即 $\nu\leqslant\rho$)。对于这样的系统，所研究的干扰抑制问题可定义如下。

定义 4.4.1 L_2-**增益干扰抑制** (L_2-**gain Disturbance Attenuation**) 对于系统(4.26)，称L_2-增益干扰抑制跟踪问题全局可解，当对于任意光滑有界参考轨迹$y_{\rm r}(t)$，其对时间的导数$y_{\rm r}^{(1)},\cdots,y_{\rm r}^{(\rho)}$有界，以及任意有界干扰$\theta(t)$，存在一个参数化状态反馈控制

$$u = u(x,k,t)$$

使得闭环系统满足：

(i) 对于任意的$t\geqslant 0$和任意的$x(0)$，$\|x(t)\|$和$u(x,k,t)$是有界的，

(ii) 对于标称系统，当$x(0)$与$y_{\rm r}$是**相容的** (**compatible**)时，有

$$\int_0^t [y(\tau)-y_{\rm r}(\tau)]^2\,d\tau \leqslant \frac{1}{k}\int_0^t \theta^{\rm T}(\tau)\theta(\tau)\,d\tau, \qquad \forall t\geqslant 0$$

其中$k>0$为任意大，

(iii) 当$\theta(t)=0,\forall t\geqslant 0$时，对于任意的$x(0)$，$\lim_{t\to\infty}[y(t)-y_{\rm r}(t)]=0$。

□

下面的两个结果提供了充分条件，在该条件下干扰抑制问题的状态反馈控制解可以直接构造出来。

定理 4.4.1 L_2-**增益干扰抑制** (L_2-**gain Disturbance Attenuation**) 对于系统(4.26)，假设如下条件成立：

(i) 对于标称系统，全局相对阶ρ有定义且$\nu\leqslant\rho\leqslant n$，

(ii) $d(L_{q_j}L_f^i h)\in {\rm span}\{dh,\cdots,d(L_f^i h)\}$，$\nu-1\leqslant i\leqslant\rho-2$，$1\leqslant j\leqslant p$，$\forall x\in\mathbb{R}^n$，

(iii) 向量场

$$\tilde f = f-\frac{L_f^\rho h}{L_gL_f^{\rho-1}h}g, \qquad \tilde g=\frac{1}{L_gL_f^{\rho-1}h}g$$

是完备的，

(iv) 对于任意有界干扰$\theta(t)$，动态(4.31)是BIBS稳定的，

则L_2-增益干扰抑制的跟踪问题全局可解。 □

证明：考虑$\nu=1$的最坏情形。由条件(i)和条件(iii)，存在一个全局坐标变换

$$\begin{aligned} z_1 &= h(x)\\ &\vdots\\ z_\rho &= L_f^{\rho-1}h(x)\\ z_{\rho+1} &= \phi_{\rho+1}(x)\\ &\vdots\\ z_n &= \phi_n(x) \end{aligned} \tag{4.35}$$

其中$\phi_i(x),\rho+1\leqslant i\leqslant n$，满足

$$\langle d\phi_i, g\rangle = 0$$

该坐标变换将式 (4.26) 变换到

$$
\begin{aligned}
\dot{z}_j &= z_{j+1} + \sum_{i=1}^{p} \theta_i L_{q_i} L_f^{j-1} h(x) \triangleq z_{j+1} + W_j^{\mathrm{T}}(z)\theta, \qquad 1 \leqslant j \leqslant \rho - 1 \\
\dot{z}_\rho &= L_f^\rho h(x) + L_g L_f^{\rho-1} h(x) u + \sum_{i=1}^{p} \theta_i L_{q_i} L_f^{\rho-1} h(x) \\
&\triangleq L_f^\rho h(x) + L_g L_f^{\rho-1} h(x) u + W_\rho^{\mathrm{T}}(z)\theta \\
\dot{z}_{\rho+j} &= L_f \phi_{\rho+j}(z) + \sum_{i=1}^{p} \theta_i L_{q_i} \phi_{\rho+j}(z) \triangleq \phi_j(z, \theta(t)), \qquad 1 \leqslant j \leqslant n - \rho \\
y &= z_1
\end{aligned} \tag{4.36}
$$

由全局相对阶 ρ 的定义，$\forall x \in \mathbb{R}^n$，有 $L_g L_f^{\rho-1} h(x) \neq 0$。根据定理A.1.3，当 $\nu = 1$ 时，假设条件 (ii) 保证式 (4.36) 中的矩阵 W_i 仅与 $z_1, \cdots, z_i, 1 \leqslant i \leqslant \rho - 1$ 相关。我们引入一个新的控制变量 v，并且令

$$
v = L_g L_f^{\rho-1} h(x) u + L_f^\rho h(x) \tag{4.37}
$$

将其代入式 (4.36) 中，得

$$
\begin{aligned}
\dot{z}_j &= z_{j+1} + W_j^{\mathrm{T}}(z_1, \cdots, z_j)\theta, \qquad 1 \leqslant j \leqslant \rho - 1 \\
\dot{z}_\rho &= v + W_\rho^{\mathrm{T}}(z_1, \cdots, z_\rho)\theta \\
\dot{z}_{\mathrm{t}} &= \Phi(z_{\mathrm{t}}, z_1, \cdots, z_\rho, \theta) \\
y &= z_1
\end{aligned} \tag{4.38}
$$

其中 $z_{\mathrm{t}} = [z_{\rho+1}, \cdots, z_n]^{\mathrm{T}}$，且 $\Phi = [\phi_1, \cdots, \phi_{n-\rho}]^{\mathrm{T}}$。首先考虑系统 (4.38) 中 $\rho = 1$ 的情况，即

$$
\dot{z}_1 = v + W_1^{\mathrm{T}}(z_1)\theta
$$

定义跟踪误差

$$
e = y - y_{\mathrm{r}} = z_1 - y_{\mathrm{r}}
$$

以及

$$
v = v_1(z_1, y_{\mathrm{r}}, \dot{y}_{\mathrm{r}}, k) = -e - \frac{1}{4} k e W_1^{\mathrm{T}}(z_1) W_1(z_1) + \dot{y}_{\mathrm{r}} \tag{4.39}
$$

注意 $v_1(z_1, y_{\mathrm{r}}, \dot{y}_{\mathrm{r}}, k) = \dot{y}_{\mathrm{r}}$ 且 $\partial v_1 / \partial \dot{y}_{\mathrm{r}} = 1$。取 $\rho = 1$，将上式代入式 (4.38)，得

$$
\dot{e} = -e - \frac{1}{4} k e W_1^{\mathrm{T}} W_1 + W_1^{\mathrm{T}} \theta \tag{4.40}
$$

考虑

$$
V_1 = \frac{1}{2} e^2 \tag{4.41}
$$

由式 (4.40)，通过配方法，V_1 沿闭环系统对时间的导数可表示如下：

$$
\begin{aligned}
\dot{V}_1 &= -e^2 - \frac{1}{4} k e^2 W_1^{\mathrm{T}} W_1 + e W_1^{\mathrm{T}} \theta - \frac{1}{k} \theta^{\mathrm{T}} \theta + \frac{1}{k} \theta^{\mathrm{T}} \theta \\
&= -e^2 - k\left(\frac{1}{2} e W_1 - \frac{1}{k}\theta\right)^{\mathrm{T}} \left(\frac{1}{2} e W_1 - \frac{1}{k}\theta\right) + \frac{1}{k} \theta^{\mathrm{T}} \theta \\
&\leqslant -e^2 + \frac{1}{k} \|\theta\|^2
\end{aligned} \tag{4.42}
$$

由式 (4.41) 和 (4.42) 可知，$e(t)$ 是有界的，这说明 $y_{\mathrm{r}}(t)$ 有界，故 $y(t)$ 亦有界。从假设(iv)可

知，$\|x(t)\|$和$u(t)$是有界的。另外，当$e(0) = 0$，即初始条件与$y_r(0)$相容时，由于$V_1(e(0)) = 0$且$V_1(e(t)) \geqslant 0$，根据积分不等式(4.42)可得

$$-\int_0^t e^2(\tau)\, d\tau + \frac{1}{k}\int_0^t \|\theta(\tau)\|^2\, d\tau \geqslant V_1(e(t)) - V_1(e(0)) \geqslant 0$$

这意味着

$$\int_0^t e^2(\tau)\, d\tau \leqslant \frac{1}{k}\int_0^t \theta^{\mathrm{T}}(\tau)\theta(\tau)\, d\tau$$

最后，若$\forall t \geqslant 0, \theta(t) = 0$，由式(4.41)和式(4.42)可知，$\lim_{t\to\infty} e(t) = 0$。当$\rho = 1$时，证毕。当$\rho > 1$时，证明如下命题。

命题 假设对于给定的下标i，$1 \leqslant i \leqslant \rho - 1$，对于系统

$$\begin{aligned} \dot{z}_j &= z_{j+1} + W_j^{\mathrm{T}}(z_1, \cdots, z_j)\theta, \qquad 1 \leqslant j \leqslant i-1 \\ \dot{z}_i &= v + W_i^{\mathrm{T}}(z_1, \cdots, z_i)\theta \end{aligned} \tag{4.43}$$

存在i个满足

$$v_j(y_r, \cdots, y_r^{(j-1)}, y_r, \cdots, y_r^{(j)}, k) = y_r^{(j)}, \quad \frac{\partial v_j}{\partial y_r^{(j)}} = 1 \tag{4.44}$$

的函数

$$v_j(z_1, \cdots, z_j, y_r, \cdots, y_r^{(j)}, k), \qquad 1 \leqslant j \leqslant i$$

使得当式(4.43)中的$v = v_i$时，函数

$$V_i = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{i} \tilde{z}_j^2 \tag{4.45}$$

对时间的导数满足不等式

$$\dot{V}_i \leqslant -\sum_{j=1}^{i} \tilde{z}_j^2 + \frac{i}{k}\|\theta\|^2 \tag{4.46}$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{z}_1 &= e = y - y_r \\ \tilde{z}_j &= z_j - v_{j-1}, \qquad 2 \leqslant j \leqslant i \end{aligned} \tag{4.47}$$

则对于系统

$$\begin{aligned} \dot{z}_j &= z_{j+1} + W_j^{\mathrm{T}}(z_1, \cdots, z_j)\theta, \qquad 1 \leqslant j \leqslant i \\ \dot{z}_{i+1} &= v + W_{i+1}^{\mathrm{T}}(z_1, \cdots, z_{i+1})\theta \end{aligned} \tag{4.48}$$

存在一个满足

$$v_{i+1}(y_r, \cdots, y_r^{(i)}, y_r, \cdots, y_r^{(i+1)}, k) = y_r^{(i+1)}, \quad \frac{\partial v_{i+1}}{\partial y_r^{(i+1)}} = 1 \tag{4.49}$$

的函数

$$v_{i+1}(z_1, \cdots, z_{i+1}, y_r, \cdots, y_r^{(i+1)}, k)$$

使得当式(4.48)中的 $v = v_{i+1}$ 时，函数

$$V_{i+1} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{i+1}\tilde{z}_j^2 \tag{4.50}$$

对时间的导数满足不等式

$$\dot{V}_{i+1} \leqslant -\sum_{j=1}^{i+1}\tilde{z}_j^2 + \frac{i+1}{k}\|\theta\|^2 \tag{4.51}$$

其中

$$\tilde{z}_{i+1} = z_{i+1} - v_i \tag{4.52}$$

命题的证明: 考虑函数

$$V_{i+1} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{i+1}\tilde{z}_j^2$$

由命题的假设，其对时间的导数具有如下性质：

$$\begin{aligned}
\dot{V}_{i+1} \leqslant\ & -\sum_{j=1}^{i}\tilde{z}_j^2 + \frac{i}{k}\|\theta\|^2 + \tilde{z}_{i+1}(\tilde{z}_i + W_{i+1}^{\mathrm{T}}\theta + v) \\
& - \tilde{z}_{i+1}\left[\sum_{j=1}^{i}\frac{\partial v_i}{\partial z_j}(z_{j+1} + W_j^{\mathrm{T}}\theta) + \sum_{j=1}^{i+1}\frac{\partial v_i}{\partial y_{\mathrm{r}}^{(j-1)}}y_{\mathrm{r}}^{(j)}\right] \\
\triangleq\ & -\sum_{j=1}^{i}\tilde{z}_j^2 + \frac{i}{k}\|\theta\|^2 + \tilde{z}_{i+1}[\alpha_1(z_1,\cdots,z_{i+1},y_{\mathrm{r}},\cdots,y_{\mathrm{r}}^{(i+1)}) \\
& + \alpha_2^{\mathrm{T}}(z_1,\cdots,z_{i+1},y_{\mathrm{r}},\cdots,y_{\mathrm{r}}^{(i)})\theta + v]
\end{aligned} \tag{4.53}$$

其中

$$\begin{aligned}
\alpha_1(z_1,\cdots,z_{i+1},y_{\mathrm{r}},\cdots,y_{\mathrm{r}}^{(i+1)}) &= \tilde{z}_i - \sum_{j=1}^{i}\frac{\partial v_i}{\partial z_j}z_{j+1} - \sum_{j=1}^{i+1}\frac{\partial v_i}{\partial y_{\mathrm{r}}^{(j-1)}}y_{\mathrm{r}}^{(j)} \\
\alpha_2(z_1,\cdots,z_{i+1},y_{\mathrm{r}},\cdots,y_{\mathrm{r}}^{(i)}) &= W_{i+1}(z_1,\cdots,z_{i+1}) \\
&\quad - \sum_{j=1}^{i}\frac{\partial v_i}{\partial z_j}W_j(z_1,\cdots,z_j)
\end{aligned}$$

令

$$v = v_{i+1}(z_1,\cdots,z_{i+1},y_{\mathrm{r}},\cdots,y_{\mathrm{r}}^{(i+1)},k) = -\alpha_1 - \tilde{z}_{i+1} - \frac{1}{4}k\tilde{z}_{i+1}\alpha_2^{\mathrm{T}}\alpha_2$$

注意，$v_{i+1}(y_{\mathrm{r}},\cdots,y_{\mathrm{r}}^{(i)},y_{\mathrm{r}},\cdots,y_{\mathrm{r}}^{(i+1)},k) = y_{\mathrm{r}}^{(i+1)}$ 且 $\partial v_{i+1}/\partial y_{\mathrm{r}}^{(i+1)} = 1$。将上式代入式(4.53)中，有

$$\begin{aligned}
\dot{V}_{i+1} &\leqslant -\sum_{j=1}^{i+1}\tilde{z}_j^2 + \frac{i}{k}\|\theta\|^2 - \frac{1}{4}k\tilde{z}_{i+1}^2\alpha_2^{\mathrm{T}}\alpha_2 + \tilde{z}_{i+1}\alpha_2^{\mathrm{T}}\theta - \frac{1}{k}\theta^{\mathrm{T}}\theta + \frac{1}{k}\theta^{\mathrm{T}}\theta \\
&= -\sum_{j=1}^{i+1}\tilde{z}_j^2 - k\left(\frac{1}{2}\tilde{z}_{i+1}\alpha_2 - \frac{1}{k}\theta\right)^{\mathrm{T}}\left(\frac{1}{2}\tilde{z}_{i+1}\alpha_2 - \frac{1}{k}\theta\right) + \frac{i+1}{k}\|\theta\|^2
\end{aligned}$$

$$\leqslant \quad -\sum_{j=1}^{i+1}\tilde{z}_j^2+\frac{i+1}{k}\|\theta\|^2$$

命题证毕。

命题的假设对于系统

$$\dot{z}_1 \quad = \quad v+W_1^{\mathrm{T}}(z_1)\theta$$

成立，因此可以应用命题 $\rho-1$ 次，迭代地建立一个状态反馈控制

$$v \quad = \quad v_\rho(z_1,\cdots,z_n,y_{\mathrm{r}},\cdots,y_{\mathrm{r}}^{(\rho)},k)$$

对于闭环系统，有

$$\dot{V}_\rho\leqslant -e^2-\sum_{j=2}^{\rho}\tilde{z}_j^2+\frac{\rho}{k}\|\theta\|^2 \tag{4.54}$$

其中

$$V_\rho \quad = \quad \frac{1}{2}e^2+\frac{1}{2}\sum_{j=2}^{\rho}\tilde{z}_j^2 \tag{4.55}$$

由式 (4.54) 和式 (4.55) 以及条件 (iv)，且由假设 $\theta(t)$ 是有界的，可知状态 $\|x(t)\|$ 是有界的。当初始条件 $x(0)$ 与参考信号相容时，由式 (4.44) 和式 (4.49) 可知，$\tilde{z}_i(0)=0, 1\leqslant i\leqslant\rho$，这说明 $V_\rho(\tilde{z}(0))=0$。进一步由式 (4.54) 和式 (4.55) 可知

$$-\int_0^t[y(\tau)-y_{\mathrm{r}}(\tau)]^2\,d\tau-\sum_{j=2}^{\rho}\int_0^t\tilde{z}_j^2(\tau)\,d\tau+\frac{\rho}{k}\int_0^t\theta^{\mathrm{T}}(\tau)\theta(\tau)\,d\tau$$
$$\geqslant V_\rho(\tilde{z}(t))-V_\rho(\tilde{z}(0))\geqslant 0$$

意味着

$$\int_0^t[y(\tau)-y_{\mathrm{r}}(\tau)]^2\,d\tau\leqslant\frac{\rho}{k}\int_0^t\theta^{\mathrm{T}}(\tau)\theta(\tau)\,d\tau$$

其中 k 可以任意选择。另外，当 $\forall t\geqslant 0, \theta(t)=0$ 时，由式 (4.54) 和式 (4.55) 可知 $\lim_{t\to\infty}e(t)=0$ 且 $\lim_{t\to\infty}\tilde{z}_i(t)=0, 2\leqslant i\leqslant\rho$。 □

对于有些系统(当 $1<\rho<n$ 时，该类系统不同于定理 4.4.1 所界定的系统)，L_2-增益干扰抑制问题可由一个控制算法全局可解，该算法可由定理 4.4.1 的证明过程得到。

引理 4.4.1 对于系统 (4.26)，假设在 $\mathbb{R}^n$ 中如下条件成立：

(i) 对于标称系统，全局相对阶 ρ 有定义，且 $\nu\leqslant\rho\leqslant n$，

(ii) 分布 $\mathcal{G}_i=\mathrm{span}\{g,\cdots,ad_f^i g\}$ 是对合的，且具有常数秩 $i+1$，$0\leqslant i\leqslant\rho-1$，

(iii) $ad_{q_i}\mathcal{G}_j\subset\mathcal{G}_j, 1\leqslant i\leqslant p, 0\leqslant j\leqslant\rho-2$，

(iv) 向量场

$$\tilde{f}=f-\frac{L_f^\rho h}{L_gL_f^{\rho-1}h}g,\qquad \tilde{g}=\frac{1}{L_gL_f^{\rho-1}h}g$$

是完备的，

则该系统全局反馈等价于

$$
\begin{aligned}
\dot{z}_i &= z_{i+1} + W_i^{\mathrm{T}}(z_1,\cdots,z_i,z_{\mathrm{t}})\theta, \qquad 1 \leqslant i \leqslant \rho-1 \\
\dot{z}_\rho &= v + W_\rho^{\mathrm{T}}(z_1,\cdots,z_\rho,z_{\mathrm{t}})\theta \\
\dot{z}_{\mathrm{t}} &= \Phi(z_1,z_{\mathrm{t}}) + \Psi^{\mathrm{T}}(z_1,z_{\mathrm{t}})\theta \\
y &= z_1
\end{aligned}
\tag{4.56}
$$

其中 $z_{\mathrm{t}} = [z_{\rho+1},\cdots,z_n]^{\mathrm{T}}$。 □

证明: 由条件 (i)～条件 (iv)，定理 3.1.2 全局适用(参见评注 3.1.4)；另外，定理 4.2.5 也全局适用，因此存在一个全局坐标变换

$$
\begin{aligned}
z_1 &= h(x) \\
&\vdots \\
z_\rho &= L_f^{\rho-1}h(x) \\
z_{\rho+1} &= \phi_{\rho+1}(x) \\
&\vdots \\
z_n &= \phi_n(x)
\end{aligned}
$$

其中 $\phi_i(x), \rho+1 \leqslant i \leqslant n$，满足

$$
\langle d\phi_i, \mathcal{G}_{\rho-1} \rangle = 0
$$

还存在一个状态反馈

$$
v = L_g L_f^{\rho-1}h(x)u + L_f^\rho h(x)
$$

可将式 (4.26) 全局变换到式 (4.56)。 □

定理 4.4.2 对于系统 (4.26)，假设在 $\mathbb{R}^n$ 中引理 4.4.1 的条件 (i)～条件 (iv) 成立，同时满足条件

(v) 对于任意有界的 $y(t)$ 和 $\theta(t)$，式(4.56)中的动态

$$
\dot{z}_{\mathrm{t}} = \Phi(y(t),z_{\mathrm{t}}) + \Psi^{\mathrm{T}}(y(t),z_{\mathrm{t}})\theta(t) \tag{4.57}
$$

是有界的，

则具有 L_2-增益干扰抑制的跟踪问题全局可解。 □

证明: 从用式 (4.56) 代替式 (4.38) 开始，该定理的证明与定理 4.4.1 的证明方法类似。 □

例 4.4.1 考虑系统

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \arctan x_2 + \theta(t) \\
\dot{x}_2 &= u \\
y &= x_1
\end{aligned}
$$

且记

$$
f = \arctan x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}
$$

$$
\begin{aligned}
g &= \frac{\partial}{\partial x_2} \\
q &= \frac{\partial}{\partial x_1} \\
h &= x_1
\end{aligned}
$$

该系统有全局相对阶 $\rho = 2$，干扰特征指数 $\nu = 1$。因此定理4.4.1中的条件(ii)成立。但是，由于向量场 $\tilde{g}(x) = [1/(L_g L_f h)]g = (1 + x_2^2)\partial/\partial x_2$ 不是完备的，故条件(iii)不成立。又由于条件(iv)不成立，因此定理4.4.2也不适用。 □

4.5 具有暂态性能指标的自适应跟踪

在这一节中将说明，若干扰是与时间无关的常数且呈现线性，则动态自适应状态反馈控制可实现具有 L_2-暂态性能指标的渐近跟踪，即保证跟踪误差的截断 L_2-范数任意小。

定义 4.5.1 自适应状态反馈跟踪(Adaptive State Feedback Tracking) 对于干扰为常数 θ 的系统(4.26)，称具有暂态性能指标的自适应跟踪问题全局可解，当对于任意光滑有界的参考轨迹 $y_r(t)$，且其对时间的导数 $y_r^{(1)}, \cdots, y_r^{(\rho)}$ 有界，存在一个由 k 参数化的动态状态反馈控制

$$
\begin{aligned}
\dot{\hat{\theta}} &= \mu(x, k, \hat{\theta}, y_r, \cdots, y_r^{(\rho)}), \qquad \hat{\theta} \in \mathbb{R}^s \\
u &= u(x, k, \hat{\theta}, y_r, \cdots, y_r^{(\rho)})
\end{aligned}
$$

使得:

(i) 对于任意初始条件 $x(0)$ 和 $\hat{\theta}(0)$ 以及任意 $\theta \in \Omega$，$\forall t \geqslant 0$，$\|x(t)\|$ 和 $\|\hat{\theta}(t)\|$ 是有界的，且 $\lim_{t\to\infty}(y(t) - y_r(t)) = 0$，

(ii) 对于标称系统，当 $\hat{\theta}(0) = 0$ 且 $x(0)$ 与 y_r 相容(即 $y_r^{(i)}(0) = L_f^i h(x(0)), 0 \leqslant i \leqslant \rho - 1$)时，有

$$
\int_0^t [y(\tau) - y_r(\tau)]^2 \, d\tau \leqslant \frac{\|\theta\|^2}{k}, \qquad \forall t \geqslant 0
$$

其中 $k > 0$ 为任意大。

□

定理 4.5.1 自适应状态反馈跟踪(Adaptive State Feedback Tracking) 在系统(4.26)中，假设 θ 为常数且假设

(i) 标称系统的全局相对阶 ρ 有定义，且 $\nu \leqslant \rho \leqslant n$，

(ii) 对于任意的 θ，动态(4.31)是BIBS稳定的，

(iii) $d(L_{q_j} L_f^i h) \in \mathrm{span}\{dh, \cdots, d(L_f^i h)\}, \nu - 1 \leqslant i \leqslant \rho - 2, 1 \leqslant j \leqslant p, \forall x \in \mathbb{R}^n$，

(iv) 向量场

$$
\tilde{f} = f - \frac{L_f^\rho h}{L_g L_f^{\rho-1} h} g, \qquad \tilde{g} = \frac{1}{L_g L_f^{\rho-1} h} g
$$

是完备的，

则具有暂态性能指标的自适应跟踪问题全局可解。 □

证明: 由于该定理的假设与定理4.4.1的假设一致，因此可以采用定理4.4.1的证明，直到式(4.38)，之后的证明是不同的。首先考虑系统(4.38)当$\rho=1$时的情形。定义($e=y-y_{\mathrm{r}}$)

$$v=v_1(z_1,y_{\mathrm{r}},\dot{y}_{\mathrm{r}},k)=-ke-W_1^{\mathrm{T}}(z_1)\hat{\theta}_1+\dot{y}_{\mathrm{r}}$$

将其代入式(4.38)中的第一个方程得($\tilde{\theta}_1=\theta-\hat{\theta}_1$)

$$\dot{e} \;=\; -ke+W_1^{\mathrm{T}}(z_1)\tilde{\theta}_1 \tag{4.58}$$

考虑函数

$$V_1 \;=\; \frac{1}{2}(e^2+\tilde{\theta}_1^{\mathrm{T}}\tilde{\theta}_1) \tag{4.59}$$

其对时间的导数为

$$\dot{V}_1 \;=\; -ke^2+\tilde{\theta}_1^{\mathrm{T}}(eW_1(z_1)+\dot{\tilde{\theta}}_1)$$

由于$\dot{\tilde{\theta}}_1=-\dot{\hat{\theta}}_1$，定义参数修正律为

$$\dot{\hat{\theta}}_1 \;=\; eW_1(z_1),\qquad \hat{\theta}_1(0)=0 \tag{4.60}$$

可得

$$\dot{V}_1 \;=\; -ke^2 \tag{4.61}$$

将式(4.61)对时间积分，有

$$\frac{1}{k}[-V_1(e(t),\tilde{\theta}_1(t))+V_1(e(0),\tilde{\theta}_1(0))] \;=\; \int_0^t e^2(\tau)\,d\tau \tag{4.62}$$

由于V_1是正定的，当$e(0)=0$，即初始条件与y_{r}是相容的，且$\hat{\theta}_1(0)=0$时，可得

$$\int_0^t e^2(\tau)\,d\tau \;=\; \frac{1}{2k}\|\theta\|^2-\frac{1}{k}V_1(e(t),\tilde{\theta}(t))\leqslant\frac{1}{2k}\|\theta\|^2$$

应用定理B.2.1到式(4.58)和式(4.60)，得到$\lim_{t\to\infty}(y(t)-y_{\mathrm{r}}(t))=0$。

命题 假设对于系统，$1\leqslant i\leqslant\rho-1$，

$$\begin{aligned}
\dot{z}_j &= z_{j+1}+W_j^{\mathrm{T}}(z_1,\cdots,z_j)\theta, \qquad 1\leqslant j\leqslant i-1\\
\dot{z}_i &= v+W_i^{\mathrm{T}}(z_1,\cdots,z_i)\theta\\
y &= z_1
\end{aligned}$$

存在一个自适应控制

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{\theta}}_j &= \mu_j(z_1,\cdots,z_j,y_{\mathrm{r}}\cdots,y_{\mathrm{r}}^{(j)},\hat{\theta}_1,\cdots,\hat{\theta}_{j-1},k), \qquad \hat{\theta}_j(0)=0,1\leqslant j\leqslant i\\
v &= v_i(z_1,\cdots,z_i,y_{\mathrm{r}},\cdots,y_{\mathrm{r}}^{(i)},\hat{\theta}_1,\cdots,\hat{\theta}_i,k)
\end{aligned}$$

以及新的坐标$(e,\tilde{z}_2,\cdots,\tilde{z}_i)$，使得函数

$$V_i \;=\; \frac{1}{2}\left(e^2+\sum_{j=2}^{i}\tilde{z}_j^2+\sum_{j=1}^{i}\tilde{\theta}_j^{\mathrm{T}}\tilde{\theta}_j\right)$$

对时间的导数满足

$$\dot{V}_i \;=\; -ke^2-\sum_{j=2}^{i}\tilde{z}_j^2$$

其中

$$
\begin{aligned}
e &= y - y_{\mathrm{r}} \\
\tilde{z}_j &= z_j - v_{j-1}(z_1, \cdots, z_{j-1}, \hat{\theta}_1, \cdots, \hat{\theta}_{j-1}, y_{\mathrm{r}}, \cdots, y_{\mathrm{r}}^{(j-1)}, k), \qquad 2 \leqslant j \leqslant i
\end{aligned}
$$

且 $v_1, \cdots, v_{i-1}$ 为合适的光滑函数，则对于系统

$$
\begin{aligned}
\dot{z}_j &= z_{j+1} + W_j^{\mathrm{T}}(z_1, \cdots, z_j)\theta, \qquad 1 \leqslant j \leqslant i \\
\dot{z}_{i+1} &= v + W_{i+1}^{\mathrm{T}}(z_1, \cdots, z_{i+1})\theta \\
y &= z_1
\end{aligned}
$$

存在一个自适应控制

$$
\begin{aligned}
\dot{\hat{\theta}}_j &= \mu_j(z_1, \cdots, z_j, y_{\mathrm{r}}, \cdots, y_{\mathrm{r}}^{(j)}, \hat{\theta}_1, \cdots, \hat{\theta}_{j-1}, k), \qquad \hat{\theta}_j(0) = 0, 1 \leqslant j \leqslant i+1 \\
v &= v_{i+1}(z_1, \cdots, z_{i+1}, y_{\mathrm{r}}, \cdots, y_{\mathrm{r}}^{(i+1)}, \hat{\theta}_1, \cdots, \hat{\theta}_{i+1}, k)
\end{aligned}
$$

使得函数

$$
V_{i+1} = \frac{1}{2}\left(e^2 + \sum_{j=2}^{i+1} \tilde{z}_j^2 + \sum_{j=1}^{i+1} \tilde{\theta}_j^{\mathrm{T}} \tilde{\theta}_j\right)
$$

对时间的导数为

$$
\dot{V}_{i+1} = -ke^2 - \sum_{j=2}^{i+1} \tilde{z}_j^2
$$

其中

$$
\tilde{z}_{i+1} = z_{i+1} - v_i
$$

命题的证明：由命题的假设可知，V_{i+1} 对时间的导数为：

$$
\begin{aligned}
\dot{V}_{i+1} = {} & -ke^2 - \sum_{j=2}^{i} \tilde{z}_j^2 + \tilde{z}_{i+1}(\tilde{z}_i + v + W_{i+1}^{\mathrm{T}}\theta) \\
& - \sum_{j=1}^{i}\left[\frac{\partial v_i}{\partial z_j}(z_{j+1} + W_j^{\mathrm{T}}\theta) + \frac{\partial v_i}{\partial y_{\mathrm{r}}^{(j)}} y_{\mathrm{r}}^{(j+1)} + \frac{\partial v_i}{\partial \hat{\theta}_j}\dot{\hat{\theta}}_j\right] - \frac{\partial v_i}{\partial y_{\mathrm{r}}} y_{\mathrm{r}}^{(1)} \\
& + \tilde{\theta}_{i+1}\dot{\hat{\theta}}_{i+1}
\end{aligned}
$$

定义

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{i+1}^{\mathrm{T}} &= W_{i+1}^{\mathrm{T}} - \sum_{j=1}^{i} \frac{\partial v_i}{\partial z_j} W_j^{\mathrm{T}} \\
v_{i+1} &= -\tilde{z}_i - \tilde{z}_{i+1} \\
&\quad + \sum_{j=1}^{i}\left(\frac{\partial v_i}{\partial z_j} z_{j+1} + \frac{\partial v_i}{\partial \hat{\theta}_j}\dot{\hat{\theta}}_j + \frac{\partial v_i}{\partial y_{\mathrm{r}}^{(i)}} y_{\mathrm{r}}^{(i+1)}\right) - \Gamma_{i+1}^{\mathrm{T}}\hat{\theta}_{i+1} + \frac{\partial v_i}{\partial y_{\mathrm{r}}} y_{\mathrm{r}}^{(1)} \\
\dot{\hat{\theta}}_{i+1} &= \tilde{z}_{i+1}\Gamma_{i+1}, \qquad \hat{\theta}_{i+1}(0) = 0
\end{aligned}
$$

取 $v = v_{i+1}$，得

$$
\dot{V}_{i+1} = -ke^2 - \sum_{j=2}^{i+1} \tilde{z}_j^2
$$

命题证毕。

由于系统

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= v + W_1^{\mathrm{T}}(z_1)\theta \\ y &= z_1\end{aligned}$$

满足命题的假设，因此可应用命题 $\rho-1$ 次，构造一个自适应控制

$$\begin{aligned}v &= v_\rho(z_1,\cdots,z_n,y_{\mathrm{r}},\cdots,y_{\mathrm{r}}^{(\rho)},\hat{\theta}_1,\cdots,\hat{\theta}_\rho,k) \\ \dot{\hat{\theta}}_j &= \mu_j(z_1,\cdots,z_j,y_{\mathrm{r}},\cdots,y_{\mathrm{r}}^{(j)},\hat{\theta}_1,\cdots,\hat{\theta}_{j-1},k), \quad \hat{\theta}_j(0)=0, 1\leqslant j\leqslant \rho-1 \\ \dot{\hat{\theta}}_\rho &= \mu_\rho(z_1,\cdots,z_n,y_{\mathrm{r}},\cdots,y_{\mathrm{r}}^{(j)},\hat{\theta}_1,\cdots,\hat{\theta}_{\rho-1},k), \quad \hat{\theta}_\rho(0)=0\end{aligned} \tag{4.63}$$

使得在如下坐标系中有：

$$\begin{aligned}\tilde{z}_1 &= e \\ \tilde{z}_j &= z_j - v_{j-1}, \qquad 2\leqslant j\leqslant \rho\end{aligned}$$

函数

$$V_\rho = \frac{1}{2}\Big(e^2+\sum_{j=2}^{\rho}\tilde{z}_j^2+\sum_{j=1}^{\rho}\tilde{\theta}_j^{\mathrm{T}}\tilde{\theta}_j\Big)$$

对时间的导数为

$$\dot{V}_\rho = -ke^2-\sum_{j=2}^{\rho}\tilde{z}_j^2 \tag{4.64}$$

其中 v_j 是在每一步设计的控制。由此可得 $\|z(t)\|$ 和 $\|\hat{\theta}_j(t)\|, 1\leqslant j\leqslant \rho$ 是有界的，相应地由 $y_{\mathrm{r}}(t),\cdots,y_{\mathrm{r}}^{(\rho)}(t)$ 有界及动态 (4.31) 是 BIBS 稳定的条件可知，$\|x(t)\|$ 也有界。另外，$\dot{e}(t)$ 和 $\dot{\tilde{z}}_i(t), 2\leqslant i\leqslant \rho$ 也是有界的。故由积分式 (4.64) 可得

$$-V_\rho(t)+V_\rho(0)-\sum_{j=2}^{\rho}\int_0^t\tilde{z}_j^2(\tau)\,d\tau = k\int_0^t e^2(\tau)\,d\tau \tag{4.65}$$

由于向量 $[e,\tilde{z}_2,\cdots,\tilde{z}_\rho]^{\mathrm{T}}$ 满足推论 B.2.1 的假设条件，可得 $\lim_{t\to\infty}\tilde{z}_i(t)=0, 2\leqslant i\leqslant\rho$，且

$$\lim_{t\to\infty}(y(t)-y_{\mathrm{r}}(t)) = 0$$

因为 $V_\rho(t)+\sum_{j=2}^{\rho}\int_0^t\tilde{z}_j^2(\tau)\,d\tau\geqslant 0$，由式 (4.65) 可知

$$\int_0^t e^2(\tau)\,d\tau\leqslant\frac{1}{2k}\Big(e^2(0)+\sum_{j=2}^{\rho}\tilde{z}_j^2(0)+\sum_{j=1}^{\rho}\|\tilde{\theta}_j(0)\|^2\Big)$$

由于 $\hat{\theta}_j(0)=0$ 且标称系统的初始条件与 y_{r} 相容，再利用 $\tilde{\theta}_j=\theta-\hat{\theta}_j$，最终可得

$$\int_0^t e^2(\tau)\,d\tau\leqslant\frac{\rho}{2k}\|\theta\|^2$$

定义 $\bar{k}=2k/\rho$，定理得证。 □

定理 4.5.2　假设系统 (4.26) 中的 θ 为常数，引理 4.4.1 的条件 (i)～条件 (iv) 在 $\mathbb{R}^n$ 中成立，另外假设有条件：

(v) 对于任意有界的$y(t)$和θ，式(4.56)中的动态

$$\dot{z}_{\mathrm{t}} = \Phi(y(t), z_{\mathrm{t}}) + \Psi^{\mathrm{T}}(y(t), z_{\mathrm{t}})\theta \tag{4.66}$$

有界，

则具有暂态性能指标的自适应跟踪问题全局可解。 □

证明: 由于这里的假设与定理4.4.2中的假设是一致的，所以采用引理4.4.1的证明，直到式(4.56)，然后用式(4.56)取代式(4.38)，则证明方法与定理4.5.1的证明类似。 □

评注 4.5.1 注意定理4.4.1和定理4.5.1具有相同的假设；定理4.4.2和定理4.5.2亦如此。在θ是常数的特殊情形下，定理4.5.1和定理4.5.2保证跟踪误差渐近趋于零，且跟踪误差的截断L_2-范数可以任意小，即可以任意改进暂态性能指标。由于允许θ是时变的，定理4.4.1和定理4.4.2针对的是更一般的系统，但是不能保证渐近跟踪。 □

评注 4.5.2 参数向量θ为常数($\dot{\theta}(t)=0$)的假设，在定理4.5.1和定理4.5.2 中可通过如下方式加以放宽，即假设$\theta(t)$由具有未知初始条件$\theta(0)$的如下**外部系统(exosystem)**给出

$$\dot{\theta} = \Lambda(t,x)\theta + \lambda(t,x)$$

且具有如下性质:

(i) 对于任意的$t \geqslant 0$和$x \in \mathbb{R}^n$，矩阵$\Lambda(t,x)+\Lambda^{\mathrm{T}}(t,x)$是半负定的，

(ii) 外部系统是BIBS稳定的。

□

例 4.5.1 考虑标量系统(θ是未知定常参数)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \theta x + u, \qquad x \in \mathbb{R} \\ y &= x \end{aligned}$$

设常数y_{r}为被跟踪量。根据自适应反馈线性化定理3.4.2，得到自适应跟踪控制($\gamma > 0$)

$$\begin{aligned} u &= -\hat{\theta}x - (x - y_{\mathrm{r}}) \\ \dot{\hat{\theta}} &= \gamma x(x - y_{\mathrm{r}}) \end{aligned}$$

使得$V = \frac{1}{2}(x-y_{\mathrm{r}})^2 + \frac{1}{2\gamma}(\theta-\hat{\theta})^2$ 对时间的导数为$\dot{V} = -e^2$。按照自适应跟踪定理4.5.1，设计得到自适应跟踪控制，包括控制

$$\begin{aligned} u &= -\hat{\theta}x - k(x - y_{\mathrm{r}}) \\ \dot{\hat{\theta}} &= \gamma x(x - y_{\mathrm{r}}) \end{aligned}$$

其保证$\dot{V} = -ke^2$，即当$x(0) = y_{\mathrm{r}}$且$\hat{\theta}(0) = 0$时有

$$\int_0^t (x(\tau) - y_{\mathrm{r}}(\tau))^2 \, d\tau \leqslant \frac{1}{2k}\theta^2, \qquad \forall t \geqslant 0$$

而按照L_2-增益干扰抑制定理4.4.1，设计得到鲁棒控制为

$$u = -(x - y_{\mathrm{r}}) - \frac{1}{4}kx^2(x - y_{\mathrm{r}})$$

它保证当 $x(0) = y_r$ 时有

$$\int_0^t (x(\tau) - y_r(\tau))^2 \, d\tau \leqslant \frac{1}{k} \int_0^t \theta^2(\tau) \, d\tau$$

且对于时变干扰 $\theta(t)$ 也成立。 □

例 4.5.2 考虑系统

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + \theta x_3^2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 - 2\theta x_3 x_4 \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= u \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

其中 θ 为未知定常参数，记

$$\begin{aligned} f &= x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_4 \frac{\partial}{\partial x_3} \\ g &= \frac{\partial}{\partial x_4} \\ q &= x_3^2 \frac{\partial}{\partial x_1} - 2x_3 x_4 \frac{\partial}{\partial x_2} \\ h &= x_1 \end{aligned}$$

显然，全局相对阶 ρ 有定义且等于 4，干扰特征指数 ν 等于 1。因此，定理 4.5.1 的条件 (i) 成立。条件 (ii) 和条件 (iv) 也成立。但是，定理 4.5.1 的条件 (iii) 不满足，这是因为

$$d(L_q h) = d(x_3^2) = 2x_3 dx_3$$

不属于 $\mathrm{span}\{dh\} = \mathrm{span}\{dx_1\}$。然而，对于任意参数 θ，系统既是可输入–输出线性化的，又是可状态反馈线性化的。实际上，在新的坐标系下(坐标变换是全局的)

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 \\ z_2 &= x_2 + \theta x_3^2 \\ z_3 &= x_3 \\ z_4 &= x_4 \end{aligned}$$

系统变为如下线性可控可观型

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ \dot{z}_3 &= z_4 \\ \dot{z}_4 &= u \\ y &= z_1 \end{aligned}$$

对于该系统，控制律可以简单地通过标准的线性输出反馈方法进行设计(注意，由于新变量 z_2 与 θ 相关，因此是未知的)。 □

4.6 多变量系统的推广

考虑多变量非线性系统，其输入 (m) 与输出的维数相等

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x)+\sum_{i=1}^{m} g_i(x)u_i \triangleq f(x)+G(x)u, \qquad x\in\mathbb{R}^n \\ y_j &= h_j(x), \qquad 1\leqslant j\leqslant m\end{aligned} \tag{4.67}$$

其中 $f,g_1,\cdots,g_m$ 是光滑向量场，$h_1,\cdots,h_m$ 是光滑实值函数，$\mathrm{rank}G(0)=m$，并且 $\mathrm{rank}\{dh_1(0),\cdots,dh_m(0)\}=m$。

定义 4.6.1 称含 m 个整数的集合 $\{\rho_1,\cdots,\rho_m\}$ 为系统(4.67)的**控制特征指数(control characteristic indices)**，当在原点的一个邻域 U_0 内有($1\leqslant i\leqslant m$)：

$$\begin{aligned} L_{g_j}L_f^k h_i(x) &= 0, \qquad 1\leqslant j\leqslant m, 0\leqslant k\leqslant \rho_i-2, \forall x\in U_0 \\ L_{g_j}L_f^{\rho_i-1}h_i(x) &\neq 0, \qquad \text{对于某个} j, 1\leqslant j\leqslant m, \forall x\in U_0\end{aligned}$$

若

$$L_{g_j}L_f^k h_i(x) = 0, \qquad \forall x\in U_0, \forall k\geqslant 0$$

则称 $\rho_i=\infty$。 □

上面的定义是关于原点给出的，该定义亦可在任意点 $\bar{x}\in\mathbb{R}^n$ 的附近给出，该点满足 $\mathrm{rank}\,G(\bar{x})=m$，且 $\mathrm{rank}\{dh_1(\bar{x}),\cdots,dh_m(\bar{x})\}=m$。

评注 4.6.1 若 $\rho_i<\infty, 1\leqslant i\leqslant m$，则每个 ρ_i 等于输出 y_i 对时间导数的最小阶，该阶导数至少直接受到某个输入 $u_j, 1\leqslant j\leqslant m$ 的影响。 □

定义 4.6.2 若 $\rho_i<\infty, 1\leqslant i\leqslant m$，则 $m\times m$ 的**解耦矩阵(decoupling matrix)**定义为

$$D(x) = \begin{bmatrix} L_{g_1}L_f^{\rho_1-1}h_1 & \cdots & L_{g_m}L_f^{\rho_1-1}h_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ L_{g_1}L_f^{\rho_m-1}h_m & \cdots & L_{g_m}L_f^{\rho_m-1}h_m \end{bmatrix}$$

□

评注 4.6.2 解耦矩阵可能是非奇异的，如下例($\rho_1=2,\rho_2=1$)所示：

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2+x_3^2 \\ \dot{x}_2 &= x_1^2+(1+x_1^2)u_1 \\ \dot{x}_3 &= x_2^2+u_2 \\ y_1 &= x_1 \\ y_2 &= x_3\end{aligned}$$

解耦矩阵为

$$D(x)=\begin{bmatrix} 1+x_1^2 & 2x_3 \\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

其行列式 $(1+x_1^2)$ 恒不为零。解耦矩阵也可能是奇异的，如下例($\rho_1=2,\rho_2=1$)所示：

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2+x_3\\
\dot{x}_2 &= x_1^2+(1+x_1^2)u_1+\frac{1}{2}u_2\\
\dot{x}_3 &= x_2^2+(1+x_1^2)u_1+\frac{1}{2}u_2\\
y_1 &= x_1\\
y_2 &= x_3
\end{aligned}$$

解耦矩阵为

$$D(x) = \begin{bmatrix} 2(1+x_1^2) & 1\\ 1+x_1^2 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

其行列式等于零。 □

引理 4.6.1 若在 U_0 内解耦矩阵是非奇异的，则

(i) $\mathrm{rank}\{dh_j,\cdots,d(L_f^{\rho_j-1}h_j),1\leqslant j\leqslant m\}=\sum_{j=1}^m\rho_j=\rho\leqslant n$，

(ii) 存在 $n-\rho$ 个函数 $\xi_i(x)$，定义

$$\begin{aligned}
\xi &= [\xi_1,\cdots,\xi_{n-\rho}]^{\mathrm{T}}\\
z_j &= [h_j,\cdots,L_f^{\rho_j-1}h_j]^{\mathrm{T}}, \qquad 1\leqslant j\leqslant m\\
z &= [z_1,\cdots,z_m]^{\mathrm{T}}
\end{aligned}$$

使得坐标 (ξ,z) 构成一个关于原点的局部微分同胚。在局部坐标系 (ξ,z) 下，系统 (4.67) 可表示为**多变量跟踪型(multivariable tracking form)**

$$\begin{aligned}
y_j &= z_{j1}\\
\dot{z}_{ji} &= z_{j,i+1}, \qquad 1\leqslant i\leqslant \rho_j-1\\
\dot{z}_{j,\rho_j} &= L_f^{\rho_j}h_j(\xi,z)+\sum_{i=1}^m L_{g_i}L_f^{\rho_j-1}h_j(\xi,z)u_i, \qquad 1\leqslant j\leqslant m\\
\dot{\xi} &= \phi_0(\xi,z)+\Phi^{\mathrm{T}}(\xi,z)u
\end{aligned}$$

□

评注 4.6.3 若分布 $\mathcal{G}_0=\mathrm{span}\{g_1,\cdots,g_m\}$ 是对合的且具有常数秩，则可以确定 $n-\rho$ 个函数 $\xi_i(x)$，使得 $\langle d\xi_i,\mathcal{G}_0\rangle=0$，因此条件 (ii) 中的结论适用，且动态

$$\dot{\xi} = \phi_0(\xi,z)$$

不受 u 的影响，类似于单输入情形，在该情形下 $\mathcal{G}_0=\mathrm{span}\{g(x)\}$ 总是一个对合分布。 □

定理 4.6.1 **多变量输入–输出反馈线性化 (Multivariable Input-Output Feedback Linearization)** 若在 U_0 内解耦矩阵是非奇异的，则系统是局部**可解耦的(decouplable)**，且由状态反馈可输入–输出线性化，状态反馈

$$\begin{bmatrix} L_f^{\rho_1}h_1\\ \vdots\\ L_f^{\rho_m}h_m\end{bmatrix}+D(x)u = v \tag{4.68}$$

使得闭环系统(4.67)和闭环系统(4.68)解耦，且输入–输出为线性的形式:

$$
\begin{aligned}
y_j &= z_{j1} \\
\dot{z}_{ji} &= z_{j,i+1}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant \rho_j - 1 \\
\dot{z}_{j\rho_j} &= v_j, \qquad 1 \leqslant j \leqslant m \\
\dot{\xi} &= \phi_0(\xi, z) + \Phi^{\mathrm{T}}(\xi, z)v
\end{aligned}
$$

□

令 $v_{\mathrm{r}} = [y_{\mathrm{r}1}^{(\rho_1)}, \cdots, y_{\mathrm{r}m}^{(\rho_m)}]^{\mathrm{T}}$ 为开环参考输入，对于 $1 \leqslant j \leqslant m$，其使得式(4.67)和式(4.68)中的 y_j 跟踪 $y_{\mathrm{r}j}$。其动态

$$
\dot{\xi} = \phi_0(\xi, Y_{\mathrm{r}1}, \cdots, Y_{\mathrm{r}m}) + \Phi^{\mathrm{T}}(\xi, Y_{\mathrm{r}1}, \cdots, Y_{\mathrm{r}m})v_{\mathrm{r}}
$$

称为**跟踪动态(tracking dynamics)**，其中 $Y_{\mathrm{r}j} = [y_{\mathrm{r}j}, \cdots, y_{\mathrm{r}j}^{(\rho_j-1)}]^{\mathrm{T}}, 1 \leqslant j \leqslant m$。该跟踪动态的输入为 $Y_{\mathrm{r}1}, \cdots, Y_{\mathrm{r}m}, v_{\mathrm{r}}$。对于由静态状态反馈的跟踪，定义4.2.2可自然地推广到多变量系统。

定理 4.6.2　静态状态反馈多变量跟踪(Multivariable Tracking by Static State Feedback)　假设 $\forall x \in \mathbb{R}^n$ 解耦矩阵是非奇异的，跟踪动态是BIBS稳定的，且向量场

$$
\tilde{f} = f - D^{-1}\begin{bmatrix} L_f^{\rho_1} h_1 \\ \vdots \\ L_f^{\rho_m} h_m \end{bmatrix}, \qquad \tilde{g}_i = D^{-1}g_i, 1 \leqslant i \leqslant m \tag{4.69}
$$

是完备的，则静态状态反馈跟踪问题全局可解。 □

推论 4.6.1　当且仅当 $\sum_{j=1}^{m} \rho_j = n$ 时，系统(4.67)同时是局部可状态反馈输入–输出线性化的和局部可状态反馈线性化的。在这种情形下，可控性指数等于控制特征指数。 □

现在考虑多变量系统受到一个干扰向量

$$
\theta(t) = [\theta_1(t), \cdots, \theta_p(t)]^{\mathrm{T}}, \qquad \theta \in \Omega \subset \mathbb{R}^p
$$

影响的情况，θ 可能非线性地进入系统($q(x, 0) = 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$)

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= f(x) + \sum_{i=1}^{m} g_i(x)u_i + q(x, \theta(t)) \\
y_j &= h_j(x), \qquad 1 \leqslant j \leqslant m
\end{aligned} \tag{4.70}
$$

或者线性地进入系统，即 $q(x, \theta(t)) = \sum_{j=1}^{p} \theta_i(t)q_i(x)$，

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= f(x) + \sum_{i=1}^{m} g_i(x)u_i + \sum_{j=1}^{p} \theta_i(t)q_i(x) \\
y_j &= h_j(x), \qquad 1 \leqslant j \leqslant m
\end{aligned} \tag{4.71}
$$

当 $\theta(t) = 0, \forall t \geqslant 0$ 时，可得到标称系统(4.67)。

定义 4.6.3　对于系统(4.70)的指定的输出 $y_i, 1 \leqslant i \leqslant m$，其**干扰特征指数(disturbance characteristic index)** ν_i 定义为满足

$$
L_q L_f^j h_i(x) = 0, \qquad 0 \leqslant j \leqslant \nu_i - 2, \forall \theta \in \Omega, \forall x \in \mathbb{R}^n
$$

$$L_qL_f^{\nu_i-1}h_i(x) \neq 0, \qquad \text{对于某个}\theta\in\Omega,\text{对于某个}x\in\mathbb{R}^n$$

的整数。若

$$L_qL_f^jh_i(x) = 0, \qquad \forall j\geqslant 0,\forall\theta\subset\Omega,\forall x\in\mathbb{R}^n$$

则称 $\nu_i=\infty$。 □

对于干扰解耦，定义 4.3.2 可以通过要求 $\nu_i=\infty, 1\leqslant i\leqslant m$ 直接推广到多变量系统。

定理 4.6.3 多变量干扰解耦(Multivariable Disturbance Rejection) 假设对于标称系统(4.67)，$\forall x\in\mathbb{R}^n$，解耦矩阵是非奇异的，$\nu_i>\rho_i, 1\leqslant i\leqslant m$，且向量场(4.69)是完备的，则对于系统(4.70)，干扰解耦问题全局可解。 □

如果用 $(y(t)-y_{\rm r}(t))^{\rm T}(y(t)-y_{\rm r}(t))$ 代替 $(y(t)-y_{\rm r}(t))^2$，则关于 L_2-增益干扰抑制的定义 4.4.1 和关于具有暂态性能指标的自适应跟踪的定义 4.5.1 可以推广到多变量系统。定理 4.4.1、定理 4.4.2、定理 4.5.1 和定理 4.5.2 可以推广到具有非奇异解耦矩阵的多变量系统。

4.7 实例

例 4.7.1 (问题1.10.7)考虑**点质量卫星(point mass satellite)**，假设仅有切向力($u_1=0, u_2=u$)是可以得到的，且假设我们关心的是变量 r 的控制。模型变为

$$\begin{aligned}
\dot r &= v\\
\dot v &= r\omega^2-\frac{k}{mr^2}\\
\dot\varphi &= \omega\\
\dot\omega &= -\frac{2v\omega}{r}+\frac{u}{mr}\\
y &= r
\end{aligned}$$

下面研究输出 y 跟踪任意期望常值 $\bar r$ 的问题。记

$$\begin{aligned}
f &= v\frac{\partial}{\partial r}+(r\omega^2-\frac{k}{mr^2})\frac{\partial}{\partial v}+\omega\frac{\partial}{\partial\varphi}-\frac{2v\omega}{r}\frac{\partial}{\partial\omega}\\
g &= \frac{1}{mr}\frac{\partial}{\partial\omega}\\
h &= r
\end{aligned}$$

为验证输入–输出反馈线性化定理是否适用，计算

$$\begin{aligned}
L_fh &= v\\
L_gL_fh &= 0\\
L_f^2h &= r\omega^2-\frac{k}{mr^2}\\
L_gL_f^2h &= \frac{2\omega}{m}
\end{aligned}$$

在原点 $(r,v,\varphi,\omega)=0$ 的一个邻域内，相对阶无定义，但原点并不是一个实际运行点。与状态空间中的参考轨迹

$$r = \bar r$$

$$
\begin{aligned}
v &= 0 \\
\omega &= \sqrt{\frac{k}{m\bar{r}^3}} \\
\varphi &= \sqrt{\frac{k}{m\bar{r}^3}}t
\end{aligned}
$$

相对应，输出r将被驱动到$\bar{r}$，而在上述参考轨迹周围，相对阶ρ有定义且等于3。定义

$$
\begin{aligned}
z_1 &= r \\
z_2 &= v \\
z_3 &= r\omega^2 - \frac{k}{mr^2} \\
\xi &= \varphi
\end{aligned}
$$

注意坐标变换不是全局的，而仅在$r > 0$和$\omega > 0$的区域成立。在新的坐标系下，得到

$$
\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= z_2 \\
\dot{z}_2 &= z_3 \\
\dot{z}_3 &= L_f^3 h + (L_g L_f^2 h)u \\
&= -3v\omega^2 + \frac{2kv}{mr^3} + \frac{2\omega}{m}u \\
\dot{\xi} &= \sqrt{\frac{z_3}{z_1} + \frac{k}{mz_1^3}}
\end{aligned}
$$

显然，跟踪动态

$$
\dot{\xi} = \sqrt{\frac{\ddot{\bar{r}}}{\bar{r}} + \frac{k}{m\bar{r}^3}}
$$

不是BIBS稳定的。在本例的特殊情形下，由于$\ddot{\bar{r}} = 0$，跟踪动态为

$$
\dot{\xi} = \sqrt{\frac{k}{m\bar{r}^3}}
$$

然而，注意到$\xi = \varphi$是角度，所以当$t \to \infty$时有$\varphi(t) \to \infty$并不奇怪。输入–输出线性化控制为

$$
u = \frac{m}{2\omega}\left[\left(3v\omega^2 - \frac{2kv}{mr^3}\right) - k_1 r - k_2 v - k_3\left(r\omega^2 - \frac{k}{mr^2}\right) + u_{\mathrm{r}}\right]
$$

其中u_{r}是参考输入，k_1, k_2和k_3是设计参数。 □

例 4.7.2 (问题1.10.5)计算倒立摆(**inverted pendulum**)问题当$u_2 = 0$时的跟踪动态和零动态，该问题已经在例2.8.4中讨论过，其状态空间形式的运动方程为

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= v_x \\
\dot{v}_x &= \frac{ml\omega^2\sin\varphi - mg\sin\varphi\cos\varphi + u}{M + m\sin^2\varphi} \\
\dot{\varphi} &= \omega \\
\dot{\omega} &= \frac{-ml\omega^2\sin\varphi\cos\varphi + g(m+M)\sin\varphi - u\cos\varphi}{l(M + m\sin^2\varphi)} \\
y &= \varphi
\end{aligned}
$$

相对阶为$\rho = 2$；由于在$\varphi = \pm\pi/2$处存在一个物理奇异点，在该点上控制u对倒立摆不能施

加任何力矩，因此全局相对阶无定义。由评注 4.1.6 可知，跟踪动态可以在前两式中代入下式计算：

$$u = -ml\omega^2\sin\varphi + (M+m)g\tan\varphi - \frac{ml\sin^2\varphi + Ml}{\cos\varphi}\ddot{\varphi}_{\rm r}$$

其中 $\varphi_{\rm r}(t)$ 为关于输出的参考信号，跟踪动态为

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v_x\\ \dot{v}_x &= g\tan\varphi - \frac{l\ddot{\varphi}_{\rm r}}{\cos\varphi}\end{aligned}$$

若初始条件在跟踪流形 $M_{\rm t}$ 上，即 $\varphi(0) = \varphi_{\rm r}(0), \omega(0) = \dot{\varphi}_{\rm r}(0)$，则可得跟踪动态

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v_x\\ \dot{v}_x &= g\tan\varphi_{\rm r}(t) - \frac{l\ddot{\varphi}_{\rm r}(t)}{\cos\varphi_r(t)}\end{aligned}$$

显然，其并非 BIBS 稳定的。当 $\varphi_{\rm r} = 0$ 时，得到零动态

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v_x\\ \dot{v}_x &= 0\end{aligned}$$

它是不稳定的，因此系统是非最小相位的。 □

例 4.7.3 (问题 1.10.1)考虑**感应电机(induction motor)**模型。令

$$x = [\omega, \psi_a, \psi_b, i_a, i_b]^{\rm T}$$

为状态向量，并且令

$$\theta = [\theta_1, \theta_2]^{\rm T} = [T_{\rm L} - T_{\rm LN}, R_{\rm r} - R_{\rm rN}]^{\rm T}$$

为负载力矩 $T_{\rm L}$ 和转子电阻 $R_{\rm r}$ 对标称值 $T_{\rm LN}$ 和 $R_{\rm rN}$ 的未知参数偏差。一般情况下，$T_{\rm L}$ 是未知的，而$R_{\rm r}$ 可能由于欧姆热现象在标称值附近 ±50% 范围内变化。令 $u = [u_a, u_b]^{\rm T}$ 为控制向量，令 $\sigma = L_{\rm s} - \frac{M^2}{L_{\rm r}}$，$\alpha = \frac{R_{\rm rN}}{L_{\rm r}}$，$\beta = \frac{M}{\sigma L_{\rm r}}$，$\gamma = \frac{M^2 R_{\rm rN}}{\sigma L_{\rm r}^2} + \frac{R_{\rm s}}{\sigma}$ 以及 $\mu = \frac{n_{\rm p}M}{JL_{\rm r}}$ 为新的参数化，其中 α,β,γ 和 μ 是依赖于标称值 $R_{\rm rN}$ 的已知参数。则问题 1.10.1 中的模型可重写为

$$\dot{x} = f(x) + u_a g_a + u_b g_b + \theta_1 q_1 + \theta_2 q_2(x) \tag{4.72}$$

其中向量场 f,g_a,g_b,q_1 和 q_2 为

$$f(x) = \begin{bmatrix} \mu(\psi_a i_b - \psi_b i_a) - \frac{T_{\rm LN}}{J} \\ -\alpha\psi_a - n_{\rm p}\omega\psi_b + \alpha M i_a \\ n_{\rm p}\omega\psi_a - \alpha\psi_b + \alpha M i_b \\ \alpha\beta\psi_a + n_{\rm p}\beta\omega\psi_b - \gamma i_a \\ -n_{\rm p}\beta\omega\psi_a + \alpha\beta\psi_b - \gamma i_b \end{bmatrix}$$

$$g_a = \begin{bmatrix} 0\\0\\0\\ \frac{1}{\sigma}\\0 \end{bmatrix}, \quad g_b = \begin{bmatrix} 0\\0\\0\\0\\ \frac{1}{\sigma} \end{bmatrix}$$

$$q_1(x) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{J} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad q_2(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{L_r}\psi_a + \frac{M}{L_r} i_a \\ -\frac{1}{L_r}\psi_b + \frac{M}{L_r} i_b \\ \frac{M}{\sigma L_r^2}\psi_a - \frac{M^2}{\sigma L_r^2} i_a \\ \frac{M}{\sigma L_r^2}\psi_b - \frac{M^2}{\sigma L_r^2} i_b \end{bmatrix}$$

要控制的输出为

$$\begin{aligned} y_1 &= h_1(x) = \omega \\ y_2 &= h_2(x) = \psi_a^2 + \psi_b^2 \end{aligned}$$

控制特征指数为 $\{2,2\}$。

首先，考虑 T_L 和 R_r 取为标称值，即 $\theta = 0$ 的情形。为应用定理4.6.1，需要验证解耦矩阵的非奇异性。定义坐标变换

$$\begin{aligned} z_1 &= h_1(x) = \omega \\ z_2 &= L_f h_1(x) = \mu(\psi_a i_b - \psi_b i_a) - \frac{T_{LN}}{J} \\ z_3 &= h_2(x) = \psi_a^2 + \psi_b^2 \\ z_4 &= L_f h_2(x) = -2\alpha(\psi_a^2 + \psi_b^2) + 2\alpha M(\psi_a i_a + \psi_b i_b) \\ \xi &= \arctan\left(\frac{\psi_b}{\psi_a}\right) \triangleq \xi(x) \end{aligned} \tag{4.73}$$

在 $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^5 : \psi_a^2 + \psi_b^2 \neq 0\}$ 中该坐标变换是单射，但仅对 $z_3 > 0$ 是满射。逆变换定义为

$$\begin{aligned} \omega &= z_1 \\ \psi_a &= \sqrt{z_3}\cos\xi \\ \psi_b &= \sqrt{z_3}\sin\xi \\ i_a &= \frac{1}{\sqrt{z_3}}\left(\cos\xi\left(\frac{z_4 + 2\alpha z_3}{2\alpha M}\right) - \frac{1}{\mu}\sin\xi\left(z_2 + \frac{T_{LN}}{J}\right)\right) \\ i_b &= \frac{1}{\sqrt{z_3}}\left(\sin\xi\left(\frac{z_4 + 2\alpha z_3}{2\alpha M}\right) + \frac{1}{\mu}\cos\xi\left(z_2 + \frac{T_{LN}}{J}\right)\right) \end{aligned}$$

在新的坐标系下，标称参数的感应电机动态为

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= L_f^2 h_1 + L_{g_a} L_f h_1 u_a + L_{g_b} L_f h_1 u_b \\ \dot{z}_3 &= z_4 \\ \dot{z}_4 &= L_f^2 h_2 + L_{g_a} L_f h_2 u_a + L_{g_b} L_f h_2 u_b \\ \dot{\xi} &= L_f \xi \\ y_1 &= z_1 \\ y_2 &= z_3 \end{aligned} \tag{4.74}$$

在式 (4.74) 中，前四个方程可以重写为

$$\begin{bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_f^2 h_1 \\ L_f^2 h_2 \end{bmatrix} + D(x)\begin{bmatrix} u_a \\ u_b \end{bmatrix}$$

其中 $D(x)$ 为如下给出的解耦矩阵：

$$D(x)=\begin{bmatrix}L_{g_a}L_fh_1 & L_{g_b}L_fh_1\\ L_{g_a}L_fh_2 & L_{g_b}L_fh_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{\mu}{\sigma}\psi_b & \frac{\mu}{\sigma}\psi_a\\ \frac{2\alpha M}{\sigma}\psi_a & \frac{2\alpha M}{\sigma}\psi_b\end{bmatrix} \tag{4.75}$$

由于

$$\det D = -2\frac{\alpha M\mu}{\sigma^2}(\psi_a^2+\psi_b^2) \tag{4.76}$$

在 Ω 中 $D(x)$ 处处非奇异，因此定理4.6.1适用。计算

$$\begin{aligned}L_f^2h_1 &= -\mu\beta n_{\mathrm{p}}\omega(\psi_a^2+\psi_b^2)-\mu(\alpha+\gamma)(\psi_a i_b-\psi_b i_a)\\ &\quad -\mu n_{\mathrm{p}}\omega(\psi_a i_a+\psi_b i_b)\\ L_f^2h_2 &= (4\alpha^2+2\alpha^2\beta M)(\psi_a^2+\psi_b^2)+2\alpha M n_p\omega(\psi_a i_b-\psi_b i_a)\\ &\quad -(6\alpha^2M+2\alpha\gamma M)(\psi_a i_a+\psi_b i_b)+2\alpha^2M^2(i_a^2+i_b^2)\end{aligned}$$

磁通角的动态为

$$\frac{d\xi}{dt}=n_{\mathrm{p}}\omega+\frac{\alpha M}{\psi_a^2+\psi_b^2}(\psi_a i_b-\psi_b i_a)=n_{\mathrm{p}}z_1+\frac{R_{\mathrm{rN}}}{n_{\mathrm{p}}z_3}(Jz_2+T_{\mathrm{LN}})$$

磁通角速度 $\dot\xi$ 与转子速度 $n_{\mathrm{p}}\omega$ 之差通常称为滑移速度 ω_{s}，回顾 α 的表达式，可将其写为

$$\dot\xi-n_{\mathrm{p}\omega}=\omega_{\mathrm{s}}=\frac{R_{\mathrm{rN}}M}{L_{\mathrm{r}}}\frac{\psi_a i_b-\psi_b i_a}{\psi_a^2+\psi_b^2}\triangleq\frac{R_{\mathrm{rN}}}{n_{\mathrm{p}}}\frac{T}{\|\psi\|^2}$$

其中

$$T = \frac{n_{\mathrm{p}}M}{L_{\mathrm{r}}}(\psi_a i_b-\psi_b i_a) \tag{4.77}$$

表示电磁转矩，$\psi=[\psi_a,\psi_b]^{\mathrm{T}}$。由式(4.68)，系统(4.74)的输入–输出线性化反馈为

$$\begin{bmatrix}u_a\\ u_b\end{bmatrix} = D^{-1}(x)\left(\begin{bmatrix}-L_f^2h_1\\ -L_f^2h_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}v_a\\ v_b\end{bmatrix}\right) \tag{4.78}$$

其中 $v=[v_a,v_b]^{\mathrm{T}}$ 是新的输入向量。在式(4.74)中代入状态反馈(4.78)，则在 (z,ξ) 坐标系下闭环动态变为

$$\begin{aligned}\dot z_1 &= z_2,\qquad \dot z_2=v_a,\qquad y_1=z_1\\ \dot z_3 &= z_4,\qquad \dot z_4=v_b,\qquad y_2=z_3\\ \dot\xi &= n_{\mathrm{p}}z_1+\frac{R_{\mathrm{rN}}}{n_{\mathrm{p}}z_3}(Jz_2+T_{\mathrm{LN}})\end{aligned} \tag{4.79}$$

跟踪动态为

$$\dot\xi = n_{\mathrm{p}}\omega_{\mathrm{r}}+\frac{R_{\mathrm{rN}}}{n_{\mathrm{p}}\|\psi\|_r^2}(J\dot\omega_{\mathrm{r}}+T_{\mathrm{LN}})$$

其中 $\omega_{\mathrm{r}}(t)$ 和 $\|\psi\|_{\mathrm{r}}^2(t)$ 分别为速度 $y_1=\omega$ 和磁通模的平方 $y_2=\psi_a^2+\psi_b^2$ 的参考信号。为求解跟踪问题，设计式(4.78)中的输入信号 v_a 和 v_b 为

$$\begin{aligned}v_a &= -k_{a1}(z_1-\omega_{\mathrm{r}}(t))-k_{a2}(z_2-\dot\omega_{\mathrm{r}}(t))+\ddot\omega_{\mathrm{r}}(t)\\ v_b &= -k_{b1}(z_3-\|\psi\|_{\mathrm{r}}^2)-k_{b2}(z_4-\|\dot\psi\|_{\mathrm{r}}^2)+\|\ddot\psi\|_{\mathrm{r}}^2\end{aligned}$$

其中 (k_{a1},k_{a2}) 和 (k_{b1},k_{b2}) 为定常设计参数，用来对解耦的二阶线性系统

$$\frac{d^2}{dt^2}(\omega-\omega_{\mathrm{r}}) = -k_{a1}(\omega-\omega_{\mathrm{r}})-k_{a2}\frac{d}{dt}(\omega-\omega_{\mathrm{r}})$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(\|\psi\|^2-\|\psi\|_{\mathrm{r}}^2) = -k_{b1}(\|\psi\|^2-\|\psi\|_{\mathrm{r}}^2)-k_{b2}\frac{d}{dt}(\|\psi\|^2-\|\psi\|_{\mathrm{r}}^2)$$

的响应进行整形。 □

例 4.7.4 (问题1.10.1)在本例中，对于全阶感应电机(induction motor)模型，建立具有暂态性能指标的多变量自适应跟踪控制，这里假设T_{L}和R_{r}为未知定常参数。在由式(4.73)定义的(z,ξ)坐标系下，重写系统(4.72)；由于$L_{q_2}h_1, L_{q_1}L_fh_1, L_{q_1}h_2, L_{q_1}L_fh_2, L_{q_1}\xi, L_{g_a}\xi$和$L_{g_b}\xi$均为零，可得

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= z_2+\theta_1L_{q_1}h_1\\
\dot{z}_2 &= L_f^2h_1+\theta_2L_{q_2}L_fh_1+L_{g_a}L_fh_1u_a+L_{g_b}L_fh_1u_b\\
\dot{z}_3 &= z_4+\theta_2L_{q_2}h_2\\
\dot{z}_4 &= L_f^2h_2+\theta_2L_{q_2}L_fh_2+L_{g_a}L_fh_2u_a+L_{g_b}L_fh_2u_b\\
\dot{\xi} &= L_f\xi+\theta_2L_{q_2}\xi
\end{aligned}\tag{4.80}$$

令$\hat{\theta}(t)=[\hat{\theta}_1(t),\hat{\theta}_2(t)]^{\mathrm{T}}$ 为参数的时变估计，且令

$$\tilde{\theta}=\begin{bmatrix}\tilde{\theta}_1\\ \tilde{\theta}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\theta_1-\hat{\theta}_1(t)\\ \theta_2-\hat{\theta}_2(t)\end{bmatrix}$$

为参数误差向量。记$y_{\mathrm{r}1}=\omega_{\mathrm{r}}$，$y_{\mathrm{r}2}=\|\psi_{\mathrm{r}}\|^2$，$e_1=z_1-y_{\mathrm{r}1}$以及$e_2=z_3-y_{\mathrm{r}2}$，且定义

$$\begin{aligned}
z_2 &= \tilde{z}_2-k_1e_1-\hat{\theta}_1L_{q_1}h_1+\dot{y}_{\mathrm{r}1}\triangleq\tilde{z}_2+v_1(z_1,y_{\mathrm{r}1},\dot{y}_{\mathrm{r}1},\hat{\theta}_1)\\
z_4 &= \tilde{z}_4-k_2e_2-\hat{\theta}_2L_{q_2}h_2+\dot{y}_{\mathrm{r}2}\triangleq\tilde{z}_4+v_3(z_3,y_{\mathrm{r}2},\dot{y}_{\mathrm{r}2},\hat{\theta}_2)
\end{aligned}$$

根据式(4.80)可得

$$\begin{aligned}
\dot{e}_1 &= -k_1e_1+\tilde{\theta}_1L_{q_1}h_1+\tilde{z}_2\\
\dot{\tilde{z}}_2 &= L_f^2h_1+\theta_2L_{q_2}L_fh_1+L_{g_a}L_fh_1u_a+L_{g_b}L_fh_1u_b+k_1(z_2+\theta_1L_{q_1}h_1-\dot{y}_{\mathrm{r}1})\\
&\quad+\dot{\hat{\theta}}_1L_{q_1}h_1-\ddot{y}_{\mathrm{r}1}\\
\dot{e}_2 &= -k_2e_2+\tilde{\theta}_2L_{q_2}h_2+\tilde{z}_4\\
\dot{\tilde{z}}_4 &= L_f^2h_2+\theta_2L_{q_2}L_fh_2+L_{g_a}L_fh_2u_a+L_{g_b}L_fh_2u_b+k_2(z_4+\theta_2L_{q_2}h_2-\dot{y}_{\mathrm{r}2})\\
&\quad+\dot{\hat{\theta}}_2L_{q_2}h_2+\hat{\theta}_2L_fL_{q_2}h_2+\theta_2\hat{\theta}_2L_{q_2}^2h_2+\hat{\theta}_2L_{g_2}L_{q_2}h_2+\hat{\theta}_2L_{g_b}L_{q_2}h_2-\ddot{y}_{\mathrm{r}2}\\
\dot{\xi} &= L_f\xi+\theta_2L_{q_2}\xi
\end{aligned}$$

令

$$\begin{bmatrix}u_a\\ u_b\end{bmatrix} = D(x,\hat{\theta}_2)^{-1}\begin{bmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{bmatrix}\tag{4.81}$$

其中

$$\begin{aligned}
D(x,\hat{\theta}_2) &= \begin{bmatrix}L_{g_a}L_fh_1 & L_{g_b}L_fh_1\\ L_{g_a}L_fh_2+\hat{\theta}_2L_{g_a}L_{q_2}h_2 & L_{g_b}L_fh_2+\hat{\theta}_2L_{g_b}L_{q_2}h_2\end{bmatrix}\\
\eta_1 &= -L_f^2h_1-\hat{\theta}_2L_{q_2}L_fh_1-\dot{\hat{\theta}}_1L_{q_1}h_1+\ddot{y}_{\mathrm{r}1}\\
&\quad-k_1(z_2+\hat{\theta}_1L_{q_1}h_1-\dot{y}_{r1})-e_1-\tilde{z}_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\eta_2 &= -L_f^2 h_2 - \hat{\theta}_2 L_{q_2} L_f h_2 - \dot{\hat{\theta}}_2 L_{q_2} h_2 - \hat{\theta}_2 L_f L_{q_2} h_2 - \hat{\theta}_2^2 L_{q_2}^2 h_2 + \ddot{y}_{\mathrm{r}2} \\ &\quad - k_2(z_4 + \hat{\theta}_2 L_{q_2} h_2 - \dot{y}_{r2}) - e_2 - \tilde{z}_4\end{aligned}$$

而 k_1 和 k_2 为要设计的控制参数。由于

$$\det D(x, \hat{\theta}_2) = -\frac{2M\mu}{\sigma^2 L_{\mathrm{r}}}(R_{\mathrm{rN}} + \hat{\theta}_2)(\psi_a^2 + \psi_b^2)$$

因此，不仅在 $\psi_a^2 + \psi_b^2 = 0$ 时(例如在非自适应情形下)，而且在 $\hat{\theta}_2(t) = -R_{\mathrm{rN}}$ 时，解耦矩阵均为奇异的；在设计自适应算法时, 必须考虑这一附加的奇异性。闭环系统变为

$$\begin{aligned}\dot{e}_1 &= -k_1 e_1 + \tilde{z}_2 + \tilde{\theta}_1 L_{q_1} h_1 \\ \dot{\tilde{z}}_2 &= -\tilde{z}_2 - e_1 + \tilde{\theta}_1 k_1 L_{q_1} h_1 + \tilde{\theta}_2 L_{q_2} L_f h_1 \\ \dot{e}_2 &= -k_2 e_2 + \tilde{z}_4 + \tilde{\theta}_2 L_{q_2} h_2 \\ \dot{\tilde{z}}_4 &= -\tilde{z}_4 - e_2 + \tilde{\theta}_2 (L_{q_2} L_f h_2 + k_2 L_{q_2} h_2 + \hat{\theta}_2 L_{q_2}^2 h_2) \\ \dot{\xi} &= L_f \xi + \theta_2 L_{q_2} \xi\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}L_{q_1} h_1 &= -\frac{1}{J} \\ L_{q_2} L_f h_1 &= -\frac{\mu}{L_{\mathrm{r}}}\Big(1 + \frac{M^2}{\sigma L_{\mathrm{r}}}\Big)(\psi_a i_b - \psi_b i_a) = -\Big(1 + \frac{M^2}{\sigma L_{\mathrm{r}}}\Big)\frac{T}{J L_{\mathrm{r}}} \\ L_{q_2} h_2 &= \frac{2}{L_{\mathrm{r}}}\Big(M(\psi_a i_a + \psi_b i_b) - (\psi_a^2 + \psi_b^2)\Big) \\ L_{q_2} L_f h_2 &\doteq \chi R_{\mathrm{rN}} \\ L_{q_2}^2 h_2 &= \chi \\ \chi &= \frac{4\sigma L_{\mathrm{r}} + 2M^2}{\sigma L_{\mathrm{r}}^3}(\psi_a^2 + \psi_b^2) + \frac{2M^2}{L_{\mathrm{r}}^2}(i_a^2 + i_b^2) \\ &\quad - \frac{6\sigma M L_{\mathrm{r}} + 2M^3}{\sigma L_{\mathrm{r}}^3}(\psi_a i_a + \psi_b i_b) \\ L_f \xi &= n_{\mathrm{p}}\omega + \frac{R_{\mathrm{rN}} M}{L_{\mathrm{r}}}\frac{\psi_a i_b - \psi_b i_a}{\psi_a^2 + \psi_b^2} \\ L_{q_2}\xi &= \frac{M}{L_{\mathrm{r}}}\frac{\psi_a i_b - \psi_b i_a}{\psi_a^2 + \psi_b^2}\end{aligned} \tag{4.82}$$

考虑二次型函数

$$V = \frac{1}{2}(e_1^2 + e_2^2 + \tilde{z}_2^2 + \tilde{z}_4^2) + \frac{1}{2}(\tilde{\theta}_1^2 + \tilde{\theta}_2^2)$$

其对时间的导数为

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= -k_1 e_1^2 - k_2 e_2^2 - \tilde{z}_2^2 - \tilde{z}_4^2 + \tilde{\theta}_1(e_1 L_{q_1} h_1 + \tilde{z}_2 k_1 L_{q_1} h_1 + \dot{\tilde{\theta}}_1) \\ &\quad + \tilde{\theta}_2[\tilde{z}_2 L_{q_2} L_f h_1 + e_2 L_{q_2} h_2 + e_3(L_{q_2} L_f h_2 + k_2 L_{q_2} h_2 + \hat{\theta}_2 L_{q_2}^2 h_2) + \dot{\tilde{\theta}}_2]\end{aligned} \tag{4.83}$$

若定义

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\theta}}_1 &= e_1 L_{q_1} h_1 + \tilde{z}_2 k_1 L_{q_1} h_1 \\ \dot{\hat{\theta}}_2 &= \tilde{z}_2 L_{q_2} L_f h_1 + e_2 L_{q_2} h_2 + e_3(L_{q_2} L_f h_2 + k_2 L_{q_2} h_2 + \hat{\theta}_2 L_{q_2}^2 h_2)\end{aligned}$$

则式(4.83)变为

$$\frac{dV}{dt} = -k_1e_1^2 - k_2e_2^2 - \tilde{z}_2^2 - \tilde{z}_4^2$$

其保证了 $e_1(t), e_2(t), \tilde{z}_2(t)$ 和 $\tilde{z}_4(t)$ 有界，且由推论B.2.1有

$$\lim_{t\to\infty} e_i(t) = 0, \qquad i = 1,2$$

另外，对于相容的初始条件，即 $e_1(0)=0, e_2(0)=0, \tilde{z}_2(0)=0$ 和 $\tilde{z}_4(0)=0$，且对于 $\hat{\theta}_1(0)=0$ 和 $\hat{\theta}_2(0)=0$，参照定理4.5.1的证明有

$$\int_0^t e_1^2(\tau)\,d\tau \leqslant -\frac{1}{2k_1}(\theta_1^2+\theta_2^2)$$

$$\int_0^t e_2^2(\tau)\,d\tau \leqslant -\frac{1}{2k_2}(\theta_1^2+\theta_2^2)$$

□

4.8 结论

本章引入了一个被控制的单输出变量。第2章和第3章研究了状态反馈镇定和模型参考控制的设计，而这一章的重点在于输出跟踪问题，包括定义4.2.2(不含有不确定性的情形)所定义的问题，或者定义4.3.3、定义4.4.1和定义4.5.1 (存在干扰和不确定参数的情形)所定义的问题。为了这一目的，引入了相对阶、零动态、最小相位系统、跟踪动态以及输入–输出线性化的概念，并且给出了定理4.2.3，以解决确定性系统的跟踪问题。当干扰存在时，干扰特征指数的概念对于求解定义4.3.2中干扰解耦问题的充要条件是有帮助的，这些条件由定理4.3.1给出，该定理提供了实现干扰解耦的状态反馈控制的构造方法。带有干扰解耦的跟踪问题的解由定理4.3.2给出。当干扰解耦的必要条件不满足时，定义4.4.1提出了 L_2-增益干扰抑制问题，定理4.4.1和定理4.4.2提供了状态反馈控制设计的构造性充分条件，可以实现干扰的任意衰减。在干扰为常数值的特殊情形下(即不确定参数)，对于由定理4.5.1和定理4.5.2确定的几类系统，跟踪问题可由自适应控制求解。4.6节给出了在多变量系统中的推广。作为输入–输出线性化方法(例4.7.3)和自适应跟踪控制(例4.7.4)的应用实例，我们讨论了感应电机控制的经典问题，其中负载力矩和转子电阻是不确定的。通过计算感应电机和倒立摆(例4.7.2)的跟踪动态，表明它们均为非最小相位系统。

4.9 习题

4.1 试证明系统

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 + \theta[\exp(x_1+2x_2+x_3)-1]\\
\dot{x}_2 &= x_3\\
\dot{x}_3 &= u\\
y &= x_1+2x_2+x_3
\end{aligned}$$

是最小相位的，计算其逆系统和零动态，并判断零动态是否与参数 θ 无关。

4.2 试设计如下系统的一个自适应跟踪控制

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2+\theta_1 x_1^2\\ \dot{x}_2 &= \theta_2 x_3^3+u\\ \dot{x}_3 &= x_1+x_2^3-x_3^3\\ y &= x_1\end{aligned}$$

确定其零动态，并说明系统是全局渐近(而非指数)稳定的。

4.3 试证明系统($\theta>0$)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2-\theta x_2^2 u\\ \dot{x}_2 &= \theta u\\ y &= x_1\end{aligned}$$

是可反馈线性化的，但不是可输入–输出反馈线性化的。设计一个自适应控制，使得原点渐近稳定。

4.4 试设计如下线性系统的一个自适应控制：

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= \theta x_3+u\\ \dot{x}_3 &= x_1+x_2-x_3\\ y &= x_1\end{aligned}$$

使得其渐近跟踪 $y_{\mathrm{r}}(t)=\sin 5t$。

4.5 试设计如下系统的一个自适应跟踪控制：

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2+\theta_2 x_1^2\\ \dot{x}_2 &= \theta_1 x_1^3+\theta_2 x_1^2+u\\ y &= x_1\end{aligned}$$

使得其跟踪参考信号 $y_{\mathrm{r}}(t)=\sin t$。

4.6 试设计如下系统的一个状态反馈控制：

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2+\theta(t)x_1^2\\ \dot{x}_2 &= u\\ y &= x_1\end{aligned}$$

使得闭环系统(初始条件为零)满足

$$\int_0^t y^2(\tau)\,d\tau \leqslant \frac{1}{100}\int_0^t \theta^2(\tau)\,d\tau$$

4.7 试设计如下系统的一个状态反馈控制：

$$\dot{x}_1 = x_2+\theta(t)x_1^3+u$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_2 &= u\\ y &= x_1\end{aligned}$$

在零初始条件下使 $|y(t)| \leqslant 1, \forall t > 0$，其中已知 $|\theta(t)| \leqslant 10, \forall t > 0$。

4.8 试设计如下系统的一个自适应跟踪控制：

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + \theta x_1^2\\ \dot{x}_2 &= u\\ \dot{x}_3 &= x_1 + x_2^2 - x_3\\ y &= x_1\end{aligned}$$

给定的跟踪参考信号为 $y_{\mathrm{r}}(t) = \sin 2t$。

4.9 考虑系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + \theta x_1^2\\ \dot{x}_2 &= \theta x_1^2 + u\\ y &= x_1\end{aligned}$$

试设计一个自适应跟踪控制，使得系统渐近跟踪参考信号 $y_{\mathrm{r}}(t) = \cos t$，且当 $x_1(0) = 1, x_2(0) = 0$ 时有 $\int_0^t [y(\tau) - y_{\mathrm{r}}(\tau)]^2 \, d\tau \leqslant \theta^2/10$。

4.10 试设计如下系统的一个状态反馈干扰解耦控制：

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + x_3^2\theta(t)\\ \dot{x}_2 &= x_3 - \theta(t)x_3^2\\ \dot{x}_3 &= x_3^2\theta(t) + u(t)\\ y &= x_1 + x_2\end{aligned}$$

并确定零动态的稳定性。

4.11 试设计如下线性系统的一个自适应跟踪控制：

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= x_3\\ \dot{x}_3 &= \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + u\\ y &= x_1 + x_2\end{aligned}$$

参考信号为 $y_{\mathrm{r}}(t) = \mathrm{e}^{-t} \sin t$。

4.12 试设计如下系统的一个具有干扰抑制的跟踪控制：

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + \theta(t) \sin x_3\\ \dot{x}_2 &= x_3\\ \dot{x}_3 &= u\end{aligned}$$

$$y = x_1$$

定常参考信号为 y_r。

提示：$|\theta(t)\sin x_3| \leqslant |\theta(t)|$。

4.13 试证明系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + \theta(x_1 + x_2)^2 \\ \dot{x}_2 &= u - \theta(x_1 + x_2)^2 \\ y &= x_2\end{aligned}$$

对于任意的 θ 值是非最小相位的。

4.14 推广定理 4.2.1 和定理 4.2.5，试证明若 $\rho \leqslant n$，

$$\mathcal{G}_i = \text{span}\{g, \cdots, ad_f^i g\}, \qquad 0 \leqslant i \leqslant \rho - \nu, \quad \nu < \rho$$

在 U_0 中是对合的，且具有常数秩 $i+1$，则系统 (4.1) 局部反馈等价于

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= \phi(\xi, z_1, \cdots, z_\nu) \\ \dot{z}_i &= z_{i+1}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant \rho - 1 \\ \dot{z}_\rho &= v \\ y &= z_1\end{aligned}$$

4.15 若系统 (4.1) 为局部可反馈线性化的，且有相对阶 $1 \leqslant \rho \leqslant n$，试证明其可由一个局部微分同胚 $z = T(x)$ 和状态反馈 $u = k(x) + \beta(x)v$ 变换为

$$\begin{aligned}\dot{z}_i &= z_{i+1}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n - 1 \\ \dot{z}_n &= v \\ y &= \eta(z_1, \cdots, z_{n-\rho+1})\end{aligned}$$

其中 η 为一个合适的光滑函数。

4.16 试设计如下系统的一个自适应跟踪控制：

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + \theta_1 \xi^2 \\ \dot{x}_2 &= u \\ \dot{\xi} &= -\xi^3 + \theta_2 x_2 \\ y &= x_1\end{aligned}$$

提示：参考定理 4.5.2 的证明。

4.17 考虑系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= v\cos\delta, \qquad y_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 &= v\sin\delta, \qquad y_2 = x_2 \\ \dot{v} &= u_1\end{aligned}$$

$$\dot{\delta} = u_2$$

其中(x_1, x_2)表示小车位置，v表示小车速度，δ表示小车的方向角。说明该系统是可输入–输出反馈线性化的，并计算解耦矩阵和线性化反馈。

4.18 重新考虑系统(4.38)，其中$\rho = n$且$W_i = 1, 1 \leqslant i \leqslant \rho$，即

$$\begin{aligned} y &= z_1 \\ \dot{z}_i &= z_{i+1} + \theta(t), \qquad 1 \leqslant i \leqslant n-1 \\ \dot{z}_n &= v + \theta(t) \end{aligned}$$

说明控制

$$v = -\alpha_0 k^n z_1 - \alpha_1 k^{n-1} z_2 - \cdots - \alpha_{n-1} k z_n$$

是L_2-增益干扰抑制问题的解，其中参考信号为$y_{\mathrm{r}} = 0$，$s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0$是一个Hurwitz多项式。

提示：采用比例时间$\tau = kt$和函数$V = \bar{z}^{\mathrm{T}} P \bar{z}$，其中$P$为下式的解：

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & \cdots & 0 & -\alpha_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} P + P \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} = -I$$

且$\bar{z} = [z_1, z_2/k, \cdots, z_n/k^{n-1}]^{\mathrm{T}}$。

第二部分　观测器和输出反馈设计

第 5 章 自适应观测器

本章将讨论设计具有线性误差动态的状态观测器的问题。5.1 节回顾了大家熟知的线性系统观测器的构造问题，5.2 节讨论了其在一类非线性系统中的推广，给出了观测器设计的一般步骤。当系统具有未知定常参数时，上述方法一般不再适用于观测器的设计。在这种情况下，应采用自适应方法来设计观测器，而这正是5.3 节的主题。5.4 节则把问题推广到了多输出系统，而5.5 节讨论了实际物理系统的观测器设计实例。第 7 章将使用本章介绍的自适应观测器来设计自适应输出反馈跟踪控制器。

5.1 线性系统的观测器

首先，我们回顾线性系统理论中的一个基本结果，并给出其证明过程，以便推广到一类非线性系统。

定理 5.1.1 对于给定的单输出线性系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Fx, \qquad x \in \mathbb{R}^n \\ y &= hx, \qquad y \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{5.1}$$

以及 ν 对任意复共轭数 $\gamma_i \pm \mathrm{j}\omega_i, 1 \leqslant i \leqslant \nu$ 和 $n-2\nu$ 个任意实数 λ_k，$2\nu+1 \leqslant k \leqslant n$，存在一个线性输出单射变换(**output injection transformation**)，即存在矩阵 T 和 k，将系统 (F,h) 变换为 $(T(F+kh)T^{-1}, hT^{-1}) \triangleq (A,c)$，其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \qquad c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

且

$$\begin{aligned} \det(sI-A) &= s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 \\ &= \prod_{i=1}^{\nu}(s-\gamma_i-\mathrm{j}\omega_i)(s-\gamma_i+\mathrm{j}\omega_i)\prod_{k=2\nu+1}^{n}(s-\lambda_k) \end{aligned}$$

当且仅当对 (F, h) 的 **Kalman 可观性条件(Kalman observability condition)**

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} h \\ hF \\ \vdots \\ hF^{n-1} \end{bmatrix} = n \tag{5.2}$$

成立。 □

评注 5.1.1 由线性系统理论可知，条件(5.2)和所谓的 **Popov-Belevich-Hautus 可观性条件(Popov-Belevich-Hautus observability condition)**

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} h \\ sI - F \end{bmatrix}, \qquad \forall s \in \mathbb{C} \tag{5.3}$$

是等价的。若一个线性系统满足条件(5.2)，或等价地满足式(5.3)，则称之为**可观的(observable)**。 □

证明: 充分性。由假设(5.2)，$n \times n$ 阶可观性矩阵

$$O = \begin{bmatrix} h \\ hF \\ \vdots \\ hF^{n-1} \end{bmatrix} \tag{5.4}$$

是非奇异的，因此如下线性方程存在惟一解向量 r:

$$Or = \begin{bmatrix} h \\ hF \\ \vdots \\ hF^{n-1} \end{bmatrix} r = \begin{bmatrix} hr \\ hFr \\ \vdots \\ hF^{n-1}r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

即

$$r = O^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \tag{5.5}$$

令

$$\det(sI - F) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0$$

为给定矩阵 F 的特征多项式，由 Cayley-Hamilton 定理有

$$F^n = -\alpha_{n-1}F^{n-1} - \cdots - \alpha_1 F - \alpha_0 I$$

根据式(5.5)中 r 的定义有

$$\begin{aligned} hF^i r &= 0, \qquad 0 \leqslant i \leqslant n-2 \\ hF^{n-1} r &= 1 \end{aligned} \tag{5.6}$$

上述各式说明矩阵

$$
\begin{aligned}
N &= \begin{bmatrix} h \\ hF \\ \vdots \\ hF^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \; Fr \; \cdots \; F^{n-1}r \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} hr & hFr & \cdots & hF^{n-1}r \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ hF^{n-2}r & hF^{n-1}r & \cdots & hF^{2n-3}r \\ hF^{n-1}r & hF^{n}r & \cdots & hF^{2n-2}r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & * \\ 1 & * & \cdots & * \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{5.7}
$$

是非奇异的。假设矩阵 O 是非奇异的，因而从式 (5.7) 可知 $n \times n$ 矩阵

$$
T^{-1} = \begin{bmatrix} r & Fr & \cdots & F^{n-1}r \end{bmatrix}
$$

也是非奇异的。令 $r, Fr, \cdots, F^{n-1}r$ 是一组新的基，$z = Tx$ 是相应的坐标变换。在 z 坐标系下，线性系统 $\dot{x} = Fx, y = hx$ 变为

$$
\begin{aligned}
\dot{z} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} z = TFT^{-1}z \\
y &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} z = hT^{-1}z
\end{aligned}
$$

定义

$$
k = T^{-1}(\alpha - a) \tag{5.8}
$$

其中 $(\alpha - a) = [\alpha_0 - a_0, \cdots, \alpha_{n-1} - a_{n-1}]^{\mathrm{T}}$，则有

$$
\begin{aligned}
T(F + kh)T^{-1} &= TFT^{-1} + (\alpha - a)hT^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} = A
\end{aligned} \tag{5.9}
$$

以及 $\det(sI - A) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0$，充分性得证。
必要性。在输出单射变换下，将矩阵对 (F, h) 变换到 $(F + kh, h)$，且当线性坐标变换将 $(F + kh, h)$ 变换到 $(T(F + kh)T^{-1}, hT^{-1})$ 时，可观性条件 (5.2) 是不变的。因此，若 (F, h) 可以变换到可观对 $(T(F + kh)T^{-1}, hT^{-1})$，则 (F, h) 也是可观的。 □

定理 5.1.1 可以重新叙述如下。

推论 5.1.1 当且仅当 Kalman 可观性条件 (5.2) 成立时，矩阵对 (F, h) 可通过输出单射变换变为**Brunovsky观测器型(Brunovsky observer form)**

$$
(A_{\mathrm{o}}, c_{\mathrm{o}}) = (T(F + kh)T^{-1}, hT^{-1})
$$

其中

$$A_o=\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\end{bmatrix},\qquad c_o=\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{bmatrix}$$

□

定义 5.1.1 对于一个给定的多变量非线性系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x,u), \qquad x(0)=x_0,\ x\in\mathbb{R}^n,\ u\in\mathbb{R}^m\\ y &= h(x), \qquad y\in\mathbb{R}^s\end{aligned}$$

所谓全局观测器(observer)是一个动态系统

$$\begin{aligned}\dot{w} &= \alpha_1(w,y,u), \qquad w(0)=w_0, w\in\mathbb{R}^r, r\geqslant n\\ \hat{x} &= \alpha_2(w,y,u), \qquad \hat{x}\in\mathbb{R}^n\end{aligned}$$

对于任意 $x_0\in\mathbb{R}^n, w_0\in\mathbb{R}^r$ 以及任意有界的 $\|x(t)\|$ 和 $\|u(t)\|, \forall t\geqslant 0$，该系统使得误差 $\|x(t)-\hat{x}(t)\|, \forall t\geqslant 0$ 是有界的，且

$$\lim_{t\to\infty}\|x(t)-\hat{x}(t)\|=0$$

□

评注 5.1.2 下面将看到，定义 5.1.1 适合于非线性系统和带有未知参数的系统。对于线性系统，不需要 $\|x(t)\|$ 和 $\|u(t)\|$ 的有界性的限制，这是因为对于不稳定的线性系统同样可以构造观测器。 □

应用定理 5.1.1，可以按如下方式构造线性观测器。

定理 5.1.2 考虑单输出线性系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Fx+Gu=Fx+\sum_{i=1}^{m}g_iu_i, \qquad x\in\mathbb{R}^n, u\in\mathbb{R}^m\\ y &= hx, \qquad y\in\mathbb{R}\end{aligned}\tag{5.10}$$

其中 $\det(sI-F)=s^n+\alpha_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\alpha_1 s+\alpha_0$。若该系统满足可观性条件 (5.2)，则对于系统

$$\dot{\hat{x}}=F\hat{x}+Gu-k(y-h\hat{x}), \qquad \hat{x}\in\mathbb{R}^n\tag{5.11}$$

通过适当选择 k，使得其误差动态 ($\tilde{x}=x-\hat{x}$)

$$\dot{\tilde{x}}=(F+kh)\tilde{x}\triangleq\Lambda\tilde{x}$$

的 Λ 具有任意的特征值 $\gamma_i\pm \mathrm{j}\omega_i, 1\leqslant i\leqslant\nu, \lambda_j, 2\nu+1\leqslant j\leqslant n$，即

$$\begin{aligned}\det(sI-\Lambda) &= s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0\\ &= \prod_{i=1}^{\nu}(s-\gamma_i-\mathrm{j}\omega_i)(s-\gamma_i+\mathrm{j}\omega_i)\prod_{j=2\nu+1}^{n}(s-\lambda_j)\end{aligned}$$

□

证明: 参照定理 5.1.1 的证明过程，在 z 坐标系下系统 (5.10) 变为

$$\begin{aligned}\dot{z} &= TFT^{-1}z + TGu = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} z + TGu \\ y &= hT^{-1}z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} z\end{aligned}$$

其中

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} r & Fr & \cdots & F^{n-1}r \end{bmatrix}$$

O 和 r 的定义见式 (5.4) 和式 (5.5)。考虑系统

$$\dot{\hat{z}} = TFT^{-1}\hat{z} + TGu - k(y - hT^{-1}\hat{z})$$

其误差动态变为($\tilde{z} = z - \hat{z}$)

$$\dot{\tilde{z}} = T(F + kh)T^{-1}\tilde{z}$$

如定理 5.1.1 的证明过程所示，若按照式 (5.8) 选择 k，可得

$$\dot{\tilde{z}} = A\tilde{z}$$

其中 A 如式 (5.9) 所示。又由于 $\hat{x} = T^{-1}\hat{z}$，有

$$\dot{\hat{x}} = F\hat{x} + Gu - T^{-1}k(y - h\hat{x})$$

其中误差动态为($\tilde{x} = T^{-1}\tilde{z}$)

$$\dot{\tilde{x}} = (F + kh)\tilde{x} = \Lambda\tilde{x}$$

这里矩阵 Λ 和矩阵 A 具有相同的特征值，即期望的特征值。 □

评注 5.1.3 按照定义 5.1.1，假设适当选取 k，使得矩阵 Λ 的所有特征值具有负实部 ($\gamma_i < 0, 1 \leqslant i \leqslant \nu, \lambda_k < 0, 2\nu + 1 \leqslant k \leqslant n$)，则系统 (5.11) 是一个全局的线性观测器。 □

关注将可观对 (F, h) 变换到 (TFT^{-1}, hT^{-1}) 的线性坐标变换，可以确定两种标准型。

定理 5.1.3 对于单输出线性系统 (5.1)，其中 $\det(sI - F) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_0$，当且仅当可观性条件 (5.2) 成立时，有下面的性质：

(a) 存在一个线性坐标变换，将系统 (5.1) 变换为如下观测器标准型(**observer form**)：

$$(T_1FT_1^{-1}, hT_1^{-1}) = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \right) \tag{5.12}$$

或等价地表示为

$$(\bar{T}_1 F \bar{T}_1^{-1}, h\bar{T}_1^{-1}) = \left(\begin{bmatrix} -\alpha_{n-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -\alpha_{n-2} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\alpha_0 & 0 & \cdots & 0 & \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \right) \tag{5.13}$$

(b) 存在一个线性坐标变换，将系统(5.1)变换为如下**可观型(observable form)**:

$$(T_2 F T_2^{-1}, hT_2^{-1}) = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \right) \tag{5.14}$$

□

证明: 充分性。

(a) 第一个表达式的证明可参照定理5.1.1的证明。定义向量r与式(5.5)相同，非奇异矩阵$T_1^{-1} = [r\ Fr\ \cdots\ F^{n-1}r]$。在新的坐标$z = T_1 x$下，系统具有式(5.12)的观测器型。通过定义$\bar{T}_1^{-1} = [F^{n-1}r\ F^{n-2}r\ \cdots\ r]$和坐标变换$\bar{z} = \bar{T}_1 x$，可以得到等价的观测器标准型(5.13)。

(b) 定义坐标变换

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = T_2 x = Ox = \begin{bmatrix} h \\ hF \\ \vdots \\ hF^{n-1} \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} hx \\ hFx \\ \vdots \\ hF^{n-1}x \end{bmatrix}$$

则由Cayley-Hamilton定理，得

$$\begin{aligned} hF^n x &= -\alpha_{n-1} hF^{n-1}x - \cdots - \alpha_1 hFx - \alpha_0 hx \\ &= -\alpha_0 z_1 - \cdots - \alpha_{n-1} z_n \end{aligned}$$

在z坐标系下，系统表示为

$$\begin{aligned} \dot{z}_i &= hF^{i-1}\dot{x} = hF^i x = z_{i+1}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n-1 \\ \dot{z}_n &= hF^{n-1}\dot{x} = hF^n x = -\alpha_0 z_1 - \cdots - \alpha_{n-1} z_n \\ y &= hx = z_1 \end{aligned}$$

即为式(5.14)的可观测型。

必要性。在线性坐标变换下，系统的可观性是不变的，并且式(5.12)~式(5.14)均为可观测的系统。 □

5.2 具有线性误差动态的观测器

本节研究单输出非线性系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x,u), \qquad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m \\ y &= h(x), \qquad y \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{5.15}$$

其中 f 和 g 是光滑向量场，且 $g(x,0)=0, \forall x\in\mathbb{R}^n$，$h$ 是光滑函数，$h(0)=0$。首先，将可观性条件 (5.2) 推广到非线性系统。

定义 5.2.1 称系统

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= f(x), \qquad x\in\mathbb{R}^n \\
y &= h(x)
\end{aligned}
\tag{5.16}
$$

在原点的一个邻域 U_0 内是局部可观的(**observable**)，如果

$$
\operatorname{rank}\{dh,\cdots,d(L_f^{n-1}h)\}=n, \qquad \forall x\in U_0 \tag{5.17}
$$

且对于所有 $x\in\mathbb{R}^n$，式 (5.17) 均成立，则称系统 (5.16) 是可观的。 □

评注 5.2.1 事实上，条件 (5.17) 是 Kalman 可观性检验条件 (5.2) 在非线性系统 (5.16) 中的推广。若有 $f(x)=Fx$ 以及 $h(x)=hx$，则条件 (5.17) 变为

$$
\operatorname{rank}\{h,\cdots,hF^{n-1}\}=n
$$

即条件 (5.2)。由于

$$
\frac{d^iy}{dt^i}=L_f^{i-1}h, \qquad i\geqslant 0
$$

所以条件 (5.17) 和逆函数定理 A.1.2 保证了输出函数及其直到 $n-1$ 阶的时间导数 $(h,\cdots,L_f^{n-1}h)$ 是局部状态坐标。 □

现在，我们将定理 5.1.1 推广到如式 (5.15) 所示的一类非线性系统。

定理 5.2.1 对于系统 (5.15)，存在原点一个邻域内的一个局部微分同胚

$$
z=T(x), \qquad T(0)=0, \quad z\in\mathbb{R}^n
$$

将其变换为

$$
\begin{aligned}
\dot{z} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} \gamma_1(y,u) \\ \gamma_2(y,u) \\ \vdots \\ \gamma_n(y,u) \end{bmatrix} \triangleq A_o z+\gamma(y,u) \\
y &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} z \triangleq c_o z
\end{aligned}
\tag{5.18}
$$

当且仅当在原点的一个邻域 U_0 内

(i) $\operatorname{rank}\{dh, d(L_fh),\cdots,d(L_f^{n-1}h)\}=n$,

(ii) $[ad_f^i r,\ ad_f^j r]=0, \quad 0\leqslant i,j\leqslant n-1$,

(iii) $[g,\ ad_f^j r]=0, \quad 0\leqslant j\leqslant n-2, \forall u\in\mathbb{R}^m$

成立，其中 r 为如下方程的解向量场：

$$
\begin{bmatrix} \langle dh,r\rangle \\ \vdots \\ \langle d(L_f^{n-1}h),r\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \tag{5.19}
$$

而且，当且仅当在 $\mathbb{R}^n$ 条件(i)～条件 (iii)全部成立，且同时满足如下条件时：

(iv) $ad_f^i r,\ 0 \leqslant i \leqslant n-1$ 是完备的向量场，

存在一个全局微分同胚。 □

证明: 充分性。定义矩阵

$$N = \begin{bmatrix} \langle dh, r\rangle & \cdots & \langle dh, ad_{(-f)}^{n-1} r\rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle d(L_f^{n-1}h), r\rangle & \cdots & \langle d(L_f^{n-1}h), ad_{(-f)}^{n-1} r\rangle \end{bmatrix}$$

根据向量场 r 的定义式 (5.19)，有

$$\langle dh, r\rangle = \langle d(L_f h), r\rangle = \cdots = \langle d(L_f^{n-2}h), r\rangle = 0, \quad \langle d(L_f^{n-1}h), r\rangle = 1$$

由定理 A.3.1 可知，上式说明矩阵 N 具有三角型结构

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & * & \cdots & * & * \end{bmatrix} \tag{5.20}$$

从而其为非奇异的。故根据假设(i)，在邻域 U_0 内，向量场 $(r, \cdots, ad_{(-f)}^{n-1} r)$ 是线性无关的。再根据同时平整化定理 A.4.5，假设(ii)保证存在一个局部微分同胚

$$z = (z_1, \cdots, z_n) = T(x) = (t_1(x), \cdots, t_n(x))$$

使得向量场 $ad_{(-f)}^i r, 0 \leqslant i \leqslant n-1$ 同时平整化，即

$$ad_{(-f)}^j r = \frac{\partial}{\partial z_{j+1}}, \qquad 0 \leqslant j \leqslant n-1 \tag{5.21}$$

而且当且仅当条件 (iv) 成立时，存在一个全局平整化微分同胚。现在，来确定向量场 $f = (f_1, \cdots, f_n)$ 在 z 坐标系下的分量。令

$$f = f_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \cdots + f_n \frac{\partial}{\partial z_n}$$

由

$$\begin{aligned} ad_{(-f)}^j r &= \left[ad_{(-f)}^{j-1} r, f\right] = \left[\frac{\partial}{\partial z_j}, f\right] \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial z_j} f_i\right) \frac{\partial}{\partial z_i} = \frac{\partial}{\partial z_{j+1}}, \qquad 1 \leqslant j \leqslant n-1 \end{aligned}$$

可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z_j} f_i &= 0, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n, \quad i \neq j+1, \quad 1 \leqslant j \leqslant n-1 \\ \frac{\partial}{\partial z_j} f_{j+1} &= 1, \qquad 1 \leqslant j \leqslant n-1 \end{aligned}$$

这说明

$$
\begin{aligned}
f_1 &= \bar{\gamma}_1(z_n) \\
f_i &= \bar{\gamma}_i(z_n) + z_{i-1}, \qquad 2 \leqslant i \leqslant n
\end{aligned}
$$

下面确定向量场 $g(x, u)$ 在 z 坐标系下的分量

$$
g = \sum_{i=1}^{n} g_i(z, u) \frac{\partial}{\partial z_i}
$$

根据假设(iii)和式(5.21)，有

$$
\left[\frac{\partial}{\partial z_{j+1}}, g\right] = 0, \qquad 0 \leqslant j \leqslant n-2
$$

即

$$
\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial z_{j+1}} g_i\right) \frac{\partial}{\partial z_i} = 0, \qquad 0 \leqslant j \leqslant n-2
$$

这表明

$$
\frac{\partial}{\partial z_{j+1}} g_i = 0, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n, \quad 0 \leqslant j \leqslant n-2
$$

因此

$$
g_i(z, u) = \bar{g}_i(z_n, u), \qquad 1 \leqslant i \leqslant n
$$

另一方面，利用式(5.20)有

$$
\begin{aligned}
\langle dh, ad^i_{(-f)} r \rangle &= \frac{\partial h}{\partial z_{i+1}} = 0, \qquad 0 \leqslant i \leqslant n-2 \\
\langle dh, ad^{n-1}_{(-f)} r \rangle &= \frac{\partial h}{\partial z_n} = 1
\end{aligned}
$$

且 $h(0) = 0$，可得

$$
y = h(x) = z_n
$$

定义

$$
\gamma_i(y, u) = \bar{\gamma}_i(y) + \bar{g}_i(y, u), \qquad 1 \leqslant i \leqslant n
$$

则在 z 坐标系下有

$$
\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= \gamma_1(y, u) \\
\dot{z}_i &= z_{i-1} + \gamma_i(y, u), \qquad 2 \leqslant i \leqslant n \\
y &= z_n
\end{aligned}
$$

即式(5.18)。

必要性。条件(i)~条件(iii)在坐标变换下是不变的，且系统(5.18)满足该条件。 □

评注 5.2.2 定理5.1.1是定理5.2.1的一个推论。实际上，对于线性系统，条件(i)与Kalman可观性条件(5.2)对应，而条件(ii)和条件(iv)自然满足，这是因为线性系统的向量场 $r, \cdots, ad^{n-1}_{(-f)} r$ 是定常的，因此它们可以互相交换，并且是完备的。 □

评注 5.2.3 从概念上讲，定理5.2.1的证明采用了与定理5.1.1证明过程中相同的步骤。在定理5.1.1中，可观性矩阵的可逆性是确定坐标系的充分条件，在该坐标系下向量$r,\cdots,F^{n-1}r$变为$\partial/\partial z_1,\cdots,\partial/\partial z_n$。但是，为了确定存在全局坐标，使得向量场$r,\cdots,ad_{(-f)}^{n-1}r$是同时平整化的，即变为$\partial/\partial z_1,\cdots,\partial/\partial z_n$，还需要在定理5.2.1中附加条件(ii)和条件(iv)，而这两个条件对于定常向量场是自然成立的，这是两个证明之间的技术上的区别。 □

评注 5.2.4 如果条件(iii)由如下更强的条件取代：

(iii') $[g, ad_f^j r] = 0, 0 \leqslant j \leqslant n-1, \forall u \in \mathbb{R}^m$

则向量场g在平整化z坐标系下变为

$$g = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j(u) \frac{\partial}{\partial z_j}$$

□

定义 5.2.2 所谓局部(全局)**非线性输出单射变换(nonlinear output injection transformation)**，是将(f,h)对变换为

$$\left(\frac{dT}{dx}(f + k \circ h) \circ T^{-1}, h \circ T^{-1}\right)$$

对的变换，其中T是一个局部(全局)状态微分同胚，且$T(0) = 0$，k是一个光滑向量映射：$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$。若存在$(f_1, h_1)$到$(f_2, h_2) = ((dT/dx)(f_1 + k \circ h_1) \circ T^{-1}, h_1 \circ T^{-1})$的输出单射变换，则称系统$(f_1, h_1)$和$(f_2, h_2)$是局部(全局)**的输出单射等价(equivalent by output injection)**的。 □

推论5.1.1表明，对于一个线性系统，可观测性输出单射等价于Brunovsky观测器标准型(A_o, c_o)的充分必要条件。下面建立非线性系统输出单射等价于具有Brunovsky观测器标准型的线性可观系统的充要条件。

推论 5.2.1 当且仅当定理5.2.1中的条件(i)、条件(ii)和条件(iv)均成立时，系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) \\ y &= h(x) \end{aligned}$$

其中$h(0) = 0$，全局输出单射等价于具有Brunovsky观测器标准型的线性系统

$$\begin{aligned} \dot{z} &= A_o z \\ y &= c_o z \end{aligned}$$

□

例 5.2.1 考虑系统

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + x_2 + \frac{x_2^2}{2} + (1 + x_1^3)u \\ \dot{x}_2 &= x_2 \end{aligned}$$

$$y = x_1$$

记

$$\begin{aligned} f &= \left(x_1 + x_2 + \frac{x_2^2}{2}\right)\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2} \\ g &= (1 + x_1^3)\frac{\partial}{\partial x_1} \\ h &= x_1 \end{aligned}$$

并计算

$$L_f h = x_1 + x_2 + \frac{x_2^2}{2}$$

为检验定理 5.2.1 是否适用，按照式 (5.19) 计算向量场 r，有

$$\begin{aligned} \langle dh, r\rangle &= 0 \\ \langle d(L_f h), r\rangle &= 1 \end{aligned}$$

可得

$$r = \frac{1}{1 + x_2}\frac{\partial}{\partial x_2}$$

计算

$$ad_{(-f)}r = \frac{\partial}{\partial x_1} + \left(\frac{1}{1 + x_2} + \frac{x_2}{(1 + x_2)^2}\right)\frac{\partial}{\partial x_2}$$

可知，由于 $[ad_{(-f)}r, r] \neq 0$，定理 5.2.1 的条件 (ii) 不成立。 □

例 5.2.2 考虑系统

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + x_1\alpha(x_1) \\ \dot{x}_2 &= u + x_1 x_2\beta(x_1) \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

其中 α 和 β 为光滑函数。令

$$\begin{aligned} f &= (x_2 + x_1\alpha(x_1))\frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 x_2\beta(x_1)\frac{\partial}{\partial x_2} \\ g &= \frac{\partial}{\partial x_2} \\ h &= x_1 \end{aligned}$$

计算

$$\begin{aligned} L_f h &= x_2 + x_1\alpha(x_1) \\ dh &= dx_1 \\ d(L_f h) &= \left(x_1\frac{d\alpha}{dx_1} + \alpha\right)dx_1 + dx_2 \end{aligned}$$

可知定理 5.2.1 的条件(i)在 $\mathbb{R}^2$ 中成立，并且可以根据

$$\begin{bmatrix} \langle dh, r\rangle \\ \langle d(L_f h), r\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

计算向量场 r，得

$$r = \frac{\partial}{\partial x_2}$$

由于

$$\begin{aligned} ad_{(-f)}r &= \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1\beta(x_1)\frac{\partial}{\partial x_2} \\ [r, ad_f r] &= 0 \end{aligned}$$

因此条件(ii)成立。由 $[g,r] = [r,r] = 0$ 可知，条件(iii)成立。条件(iv)亦成立。那么，根据定理5.2.1，存在两个函数 $t_1(x)$ 和 $t_2(x)$ 同时全局平整化向量场 r 和 $ad_{(-f)}r$，即

$$\begin{aligned} \langle dt_1, r\rangle &= 1, \qquad \langle dt_1, ad_{(-f)}r\rangle = 0 \\ \langle dt_2, r\rangle &= 0, \qquad \langle dt_2, ad_{(-f)}r\rangle = 1 \end{aligned} \tag{5.22}$$

若选择

$$\begin{aligned} t_1(x) &= x_2 - \int_0^{x_1} \xi\beta(\xi)d\xi \\ t_2(x) &= x_1 \end{aligned}$$

则该函数满足方程(5.22)。在新的坐标系

$$\begin{aligned} z_1 &= x_2 - \int_0^{x_1} \xi\beta(\xi)d\xi \\ z_2 &= x_1 \end{aligned}$$

下有

$$\begin{aligned} \dot z_1 &= u + x_1x_2\beta(x_1) - x_1\beta(x_1)x_2 - x_1^2\beta(x_1)\alpha(x_1) \\ &= u - z_2^2\beta(z_2)\alpha(z_2) \\ \dot z_2 &= x_2 + x_1\alpha(x_1) = z_1 + \int_0^{z_2} \xi\beta(\xi)d\xi + z_2\alpha(z_2) \\ y &= z_2 \end{aligned}$$

□

如果只限于状态空间坐标变换，则可以提出这样的问题：如何判定那些形如式(5.15)的非线性系统可以通过非线性状态空间局部(全局)微分同胚变为线性观测器标准型(5.12)或可观标准型(5.14)。这一问题可以解决如下。

定理 5.2.2 考虑单输出非线性系统

$$\begin{aligned} \dot x &= f(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n \\ y &= h(x), \qquad y \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{5.23}$$

其中 $f(0) = 0, h(0) = 0$。当且仅当在原点的一个邻域 U_0 内满足：

(i) $\mathrm{rank}\{dh, d(L_fh), \cdots, d(L_f^{n-1}h)\} = n$,

(ii) $[ad_f^i r, ad_f^j r] = 0, \qquad 0 \leqslant i,j \leqslant n$,

其中向量场 r 是方程(5.19)的解，则在原点的一个邻域内存在一个局部微分同胚

$$z = T(x), \qquad T(0) = 0, \quad z \in \mathbb{R}^n$$

将系统(5.23)变换为一个线性观测器标准型

$$\begin{aligned}
\dot{z} &= \frac{dT}{dx} f \circ T^{-1}(z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} z \\
y &= h \circ T^{-1}(z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} z
\end{aligned} \tag{5.24}$$

而且存在一个全局微分同胚，将系统(5.23)变换为一个线性观测器标准型，当且仅当条件(i)和条件(ii)在 $\mathbb{R}^n$ 内成立，且有如下条件：

(iii) $ad_f^i r$，$0 \leqslant i \leqslant n-1$是完备的向量场。

□

评注 5.2.5 推论5.2.1和定理5.2.2之间的差别在于定理5.2.2的条件(ii)更严格，要求下标 i 和 j 可以取到 n，而不是推论5.2.1中的 $n-1$。这意味着输出单射向量 $\gamma(y)$ 是 y 的一个线性函数。 □

评注 5.2.6 全局状态线性化定理2.6.1给出了存在将单输入系统(没有输出)变换为线性可控系统的全局微分同胚的充要条件，而定理5.2.2给出了存在将单输出系统(没有输入)变换为线性可观系统的全局微分同胚的充要条件。需要注意的是向量场 f 和 r 满足定理2.6.1的条件。 □

证明: 充分性。由定理5.2.1的证明过程可知，条件(i)和条件(ii)保证存在局部坐标 $z = T(x)$，使得向量场 $ad_{(-f)}^i r$, $0 \leqslant i \leqslant n-1$ 是同时平整化的，其中

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= \gamma_1(y) \\
\dot{z}_i &= z_{i-1} + \gamma_i(y), \qquad 2 \leqslant i \leqslant n \\
y &= z_n
\end{aligned}$$

由假设 $f(0) = 0$ 可得 $\gamma_i(0) = 0$。条件(ii)除了需要定理5.2.1的条件(ii)外，还要求

$$[ad_f^i r, ad_f^n r] = 0; \qquad 0 \leqslant i \leqslant n-1 \tag{5.25}$$

计算

$$ad_{(-f)}^n r = [ad_{(-f)}^{n-1} r, f] = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial z_n} \gamma_i(z_n) \right) \frac{\partial}{\partial z_i}$$

在 z 坐标系下，条件(5.25)意味着

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial^2}{\partial z_j \partial z_n} \gamma_i(z_n) \right) \frac{\partial}{\partial z_i} = 0, \qquad 1 \leqslant j \leqslant n$$

可得

$$\frac{\partial^2}{\partial z_n^2} \gamma_i(z_n) = 0$$

即，由 $f(0)=0$，有

$$\gamma_i = -\alpha_{i-1}z_n, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n$$

充分性得证。

必要性。条件 (i) 和条件 (ii) 与坐标选择无关，并且对具有观测器标准型的线性系统成立。条件(iii)是存在全局平整化微分同胚的充要条件。 □

评注 5.2.7 对于更一般情形的单输入系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x)+g(x)u \\ y &= h(x)\end{aligned}$$

当且仅当定理 5.2.2 的条件 (i)~条件 (iii) 成立，且有

(iv) $[g, ad_f^i r]=0, \qquad 0 \leqslant i \leqslant n-1$

成立时，系统可全局变换为一个线性可观型。事实上，在平整化坐标系下，条件 (iv) 变为

$$\left[\sum_{j=1}^{n} g_j(z)\frac{\partial}{\partial z_j}, \frac{\partial}{\partial z_i}\right]=0, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n$$

其说明

$$\frac{\partial}{\partial z_i}g_j(z)=0, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant n$$

即向量场 g 是定常的。定理 5.2.1 适用。 □

例 5.2.3 考虑系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 1 \\ y &= x+x^2\end{aligned}$$

令 $f=\dfrac{\partial}{\partial x}, h=x+x^2$。由于 $f(0)\neq 0$，因此定理 5.2.2 不适用。 □

例 5.2.4 考虑系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x \\ y &= x+x^2\end{aligned}$$

令

$$f = x\frac{\partial}{\partial x}, \qquad h=x+x^2$$

由于向量场

$$r=\frac{1}{1+2x}\frac{\partial}{\partial x}$$

使得 $[r, ad_f r]\neq 0$，因此定理 5.2.2 不适用。推论 5.2.1 也只在局部情形下适用。 □

利用定理 5.2.1，可以设计具有线性误差动态的全局观测器。

定理 5.2.3 **全局观测器(Global Observer)** 对于系统(5.15)，若定理5.2.1的条件(i)~条件(iv)成立，则

$$\begin{aligned}\dot{\hat{z}} &= A_o\hat{z} + \gamma(y,u) - k(y - \hat{z}_n), \qquad \hat{z}(0) = \hat{z}_0,\ \hat{z} \in \mathbb{R}^n \\ \hat{x}(t) &= T^{-1}(\hat{z})\end{aligned} \tag{5.26}$$

是其全局观测器，其中 $A_o + kc_o$ 是一个 Hurwitz 矩阵。 □

证明: 定理5.2.1适用，且保证存在一个全局坐标变换 $z = T(x), T(0) = 0, z \in \mathbb{R}^n$，将系统(5.15)变换为式(5.18)。引入误差变量

$$\tilde{z} = z - \hat{z}, \qquad \tilde{x} = x - \hat{x}$$

式(5.18)减去式(5.26)，可得

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{z}} &= (A_o + kc_o)\tilde{z} \\ \tilde{x} &= T^{-1}(z) - T^{-1}(z - \tilde{z})\end{aligned}$$

因此，当 $x(t)$ 和 $u(t)$ 有界时，对于任意的 x_0 或 $z_0 = T(x_0)$ 以及任意 $\hat{z}_0$, $\tilde{z}(t)$ 和 $\tilde{x}(t)$ 亦是有界的，且

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} \tilde{z}(t) &= 0 \\ \lim_{t\to\infty} \tilde{x}(t) &= 0\end{aligned}$$

由定义 5.1.1，证毕。 □

如下例所示，定义 5.1.1 中关于状态 x 有界的假设避免了有限逃逸时间。

例 5.2.5 考虑系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x^2, \qquad x(0) = x_0 \\ y &= x\end{aligned}$$

推论 5.2.1 适用于该系统。系统的解

$$x(t) = \frac{x_0}{1 - tx_0}$$

具有有限逃逸时间，且当 $t \to 1/x_0$ 时 $x(t) \to \infty$。因此即使系统 $(k < 0)$

$$\dot{\hat{x}} = x^2 - k(x - \hat{x})$$

具有线性指数稳定的误差动态

$$\dot{\tilde{x}} = k\tilde{x}$$

当 $x_0 > 0$ 时，该系统也不能提供一个渐近收敛的估计量。 □

5.3 自适应观测器

本节将考虑含有未知定常参数θ_i的单输出非线性系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x,u) + \sum_{i=1}^{p} \theta_i q_i(x,u)\\ y &= h(x)\end{aligned} \tag{5.27}$$

其中$x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, \theta = [\theta_1, \cdots, \theta_p]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^p, y \in \mathbb{R}, f(0) = 0, h(0) = 0, g(x,0) = 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$。我们将仅限于讨论可以通过与$\theta$无关的微分同胚变换为线性可观系统的一类系统，但其输出单射部分仍依赖于θ。根据5.2节得出的结论，这些系统可由下面的定理来描述。

定理 5.3.1　*对于系统(5.27)，存在一个全局微分同胚*

$$z = T(x), \qquad T(0) = 0, \qquad z \in \mathbb{R}^n$$

将其变换为

$$\begin{aligned}\dot{z} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} \gamma_1(y,u)\\ \gamma_2(y,u)\\ \vdots\\ \gamma_n(y,u)\end{bmatrix} + \sum_{i=1}^{p} \theta_i \begin{bmatrix} \psi_{i1}(y,u)\\ \psi_{i2}(y,u)\\ \vdots\\ \psi_{in}(y,u)\end{bmatrix}\\ &\triangleq A_o z + \gamma(y,u) + \Psi(y,u)\theta\\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{bmatrix} z = c_o z\end{aligned} \tag{5.28}$$

当且仅当在$\mathbb{R}^n$中满足：

(i) $\operatorname{rank}\{dh, \cdots .d(L_f^{n-1}h)\} = n$,

(ii) $[ad_f^i r, ad_f^j r] = 0,\ 0 \leqslant i, j \leqslant n-1$,

(iii) $[g, ad_f^j r] = 0,\ 0 \leqslant j \leqslant n-2,\ \forall u \in \mathbb{R}^m$,

(iv) $[q_i, ad_f^j r] = 0,\ 0 \leqslant j \leqslant n-2,\ \forall u \in \mathbb{R}^m,\ 1 \leqslant i \leqslant p$,

(v) *向量场$ad_f^i r, 0 \leqslant i \leqslant n-1$是完备的，*

其中向量场r为式(5.19)的解。 □

证明：采用定理5.2.1证明过程中的论据可证得。 □

例 5.3.1　考虑系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + \theta x_1^2\\ \dot{x}_2 &= x_1 x_2 + x_1^3 u\\ y &= x_1\end{aligned}$$

记

$$h(x) = x_1$$

$$\begin{aligned} f(x) &= x_2\frac{\partial}{\partial x_1}+x_1x_2\frac{\partial}{\partial x_2} \\ g(x) &= x_1^3\frac{\partial}{\partial x_2} \\ q(x) &= x_1^2\frac{\partial}{\partial x_1} \end{aligned}$$

定理5.3.1适用；计算可得$L_fh = x_2$，因此对任意的$x \in \mathbb{R}^2$，条件(i)成立。式(5.19)的解为$r = \partial/\partial x_2$。又由于

$$\begin{aligned} ad_fr &= -\frac{\partial}{\partial x_1}-x_1\frac{\partial}{\partial x_2} \\ [r, ad_fr] &= 0 \end{aligned}$$

因此条件(ii)成立。再由$[g,r] = 0$以及$[q,r] = 0$可知，条件(iii)和条件(iv)也成立。向量场r和ad_fr是完备的。要求的全局微分同胚可通过寻找一个全局坐标变换$z = T(x)$计算，即

$$\begin{aligned} z_1 &= t_1(x), \qquad t_1(0)=0 \\ z_2 &= t_2(x), \qquad t_2(0)=0 \end{aligned}$$

其全局平整向量场为

$$r=\frac{\partial}{\partial x_2}, \qquad ad_{(-f)}r=\frac{\partial}{\partial x_1}+x_1\frac{\partial}{\partial x_2}$$

即

$$\begin{aligned} \langle dt_1, r\rangle &= 1, \qquad \langle dt_1, ad_{(-f)}r\rangle = 0 \\ \langle dt_2, r\rangle &= 0, \qquad \langle dt_2, ad_{(-f)}r\rangle = 1 \end{aligned} \tag{5.29}$$

若选择

$$\begin{aligned} z_1 &= t_1(x)=-\frac{x_1^2}{2}+x_2 \\ z_2 &= t_2(x)=x_1 \end{aligned}$$

则方程(5.29)成立，且$r = \partial/\partial z_1, ad_{(-f)}r = \partial/\partial z_2$。在新坐标系下有

$$\begin{aligned} \dot z_1 &= y^3u-\theta y^3 \\ \dot z_2 &= z_1+\frac{y^2}{2}+\theta y^2 \\ y &= z_2 \end{aligned}$$

□

例 5.3.2 考虑系统

$$\begin{aligned} \dot x_1 &= x_2+\theta\left(\mathrm{e}^{x_1+2x_2+x_3}-1\right) \\ \dot x_2 &= x_3 \\ \dot x_3 &= u \\ y &= x_1+2x_2+x_3 \end{aligned}$$

记

$$h(x) = x_1+2x_2+x_3$$

$$\begin{aligned}
f(x) &= x_2\frac{\partial}{\partial x_1}+x_3\frac{\partial}{\partial x_2}\\
g(x) &= \frac{\partial}{\partial x_3}\\
q(x) &= \left(\mathrm{e}^{x_1+2x_2+x_3}-1\right)\frac{\partial}{\partial x_1}
\end{aligned}$$

定理 5.3.1 适用。实际上，线性坐标变换

$$\begin{aligned}
z_1 &= x_3\\
z_2 &= x_2+2x_3\\
z_3 &= x_1+2x_2+x_3
\end{aligned}$$

将系统变换为

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= u\\
\dot{z}_2 &= z_1+2u\\
\dot{z}_3 &= z_2+u+\theta\left(\mathrm{e}^{z_3}-1\right)\\
y &= z_3
\end{aligned}$$

□

定理 5.3.1 给出了与 θ 无关的将系统 (5.27) 变换为式 (5.28) 的变换。由定义 5.1.1，当参数向量 θ 未知且由估计量 $\hat{\theta}$ 代替时，全局观测器定理 5.2.3 给出的动态系统 (5.26) 一般不是全局观测器。事实上，系统 (5.26) 将变为

$$\dot{\hat{z}}=A_{\mathrm{o}}\hat{z}+\gamma(y,u)+\Psi(y,u)\hat{\theta}-k(y-c_{\mathrm{o}}\hat{\zeta})$$

其中 $\hat{\theta}=[\hat{\theta}_1,\cdots,\hat{\theta}_p]^{\mathrm{T}}$。定义

$$\tilde{\theta}=\theta-\hat{\theta},\qquad \tilde{z}=z-\hat{z}$$

误差动态为

$$\dot{\tilde{z}}=(A_{\mathrm{o}}+kc_{\mathrm{o}})\tilde{z}+\Psi(y,u)\tilde{\theta}$$

适当选择 k 可以任意配置 $A_{\mathrm{o}}+kc_{\mathrm{o}}$ 的具有负实部的特征值，因此能够保证有界输入 $\psi(y,u)\tilde{\theta}$ 产生有界误差 $\tilde{z}$，但一般不能保证 $\lim_{t\to\infty}\|\tilde{z}(t)\|=0$。

对于含有未知参数 θ 的系统 (5.27)，定义 5.1.1 修改如下。

定义 5.3.1 系统 (5.27) 的一个全局**自适应观测器(adaptive observer)** 是由输入 $u(t)$ 和 $y(t)$ 驱动的一个有限维系统

$$\begin{aligned}
\dot{w} &= \alpha_1(w,\hat{\theta},y(t),u(t)), && w(0)=w_0, w\in\mathbb{R}^r, r\geqslant n\\
\dot{\hat{\theta}} &= \alpha_2(w,\hat{\theta},y(t),u(t)), && \hat{\theta}(0)=\hat{\theta}_0, \hat{\theta}\in\mathbb{R}^p\\
\hat{x} &= \alpha_3(w,\hat{\theta},y(t),u(t)), && \hat{x}\in\mathbb{R}^n,
\end{aligned}$$

对于任意$x(0) \in \mathbb{R}^n, w_0 \in \mathbb{R}^r, \hat{\theta}_0 \in \mathbb{R}^p$，未知参数$\theta$的任意值以及任意有界的$\|x(t)\|$和$\|u(t)\|, \forall t \geqslant 0$，该系统满足：

(i) $\|w(t)\|, \|\hat{\theta}(t)\|$和$\|x(t)-\hat{x}(t)\|$是有界的，$\forall t \geqslant 0$；

(ii) $\lim_{t\to\infty}\|x(t)-\hat{x}(t)\| = 0$。

□

定义 5.3.2 自适应观测器型(Adaptive Observer Form) 称系统

$$\begin{aligned} \dot{z} &= A_o z + \gamma(y,u) + b\beta^{\mathrm{T}}(y,u,t)\theta \\ y &= c_o z \end{aligned} \tag{5.30}$$

具有自适应观测器型，其中$z \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}^m, \theta \in \mathbb{R}^p$，当$\gamma$是一个光滑函数映射$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$，向量$b = [b_1, \cdots, b_n]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n, b_n > 0$，使得多项式$b_n s^{n-1} + \cdots + b_1$是Hurwitz的，即其所有零点均具有负实部，$\beta$是一个连续函数映射$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^p$，且$(A_o, c_o)$具有Brunovsky观测器标准型。 □

具有自适应观测器型(5.30)的系统属于系统(5.28)的一个受限子集，这是因为矩阵$\Psi(y,u)$一般不能表示为$b\beta^{\mathrm{T}}(y,u)$。首先，我们说明对于具有自适应观测器标准型并且β有界的系统如何设计自适应观测器，然后说明如何将更一般的系统(5.28)变换为自适应观测器型。

定理 5.3.2 自适应观测器(Adaptive Observer) 给定一个具有自适应观测器型(5.30)的系统，若对所有有界的(y,u)，$\beta(y,u,t)$是一致有界的，则系统

$$\begin{aligned} \dot{\hat{z}} &= (A_o + kc_o)\hat{z} + \gamma(y,u) + b\beta^{\mathrm{T}}(y,u,t)\hat{\theta} - ky \\ \dot{\hat{\theta}} &= \Gamma\beta(y,u,t)(y - c_o\hat{z}) \end{aligned} \tag{5.31}$$

是系统(5.30)的一个全局自适应观测器，其中$\hat{z} \in \mathbb{R}^n, \hat{\theta} \in \mathbb{R}^p$，$\Gamma$是任意对称正定矩阵，$k = [k_1, \cdots, k_n]^{\mathrm{T}}$给定如下：

$$k = -\frac{1}{b_n}(A_o b + \lambda b) \tag{5.32}$$

其中λ是一个任意正数。 □

证明：误差方程为

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{z}} &= A\tilde{z} + b\beta^{\mathrm{T}}(y,u,t)\tilde{\theta} \\ \dot{\tilde{\theta}} &= -\Gamma\beta(y,u,t)c_o\tilde{z} \end{aligned} \tag{5.33}$$

其中$A = A_o + kc_o, \tilde{z} = z - \hat{z}$以及$\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$。由定义5.3.2可知，$b_n > 0$，从而由式(5.32)可得

$$b_n(s^n + k_{n-1}s^{n-1} + \cdots + k_1) = (s+\lambda)(b_n s^{n-1} + \cdots + b_1)$$

上式意味着

$$c_o(sI - A)^{-1}b = \frac{b_n}{s+\lambda} \tag{5.34}$$

式(5.34)中有$n-1$个零极点对消。由$\lambda > 0$且假设多项式$b_n s^{n-1} + \cdots + b_1$是Hurwitz的可知，矩阵$A$是Hurwitz的。因此$(A, b, c_o)$满足严格正实条件(B.12)，且Meyer-Kalman-Yacubovich引理B.2.2适用。将$\beta(y(t), u(t), t)$视为$\gamma(t)$且$\Gamma = \Lambda$，则直接将定理B.2.2应用于系统(5.33)可以得到该定理。 □

利用持续激励引理B.2.3，下面的定理给出了重构未知参数θ的估计值所需的条件。

定理 5.3.3 **具有辨识功能的自适应观测器(Adaptive Observer with Identification)** 给定一个具有自适应观测器型(5.30)的系统，若定理5.3.2的假设条件以及持续激励条件成立，即存在两个正实数T和k_0，使得

$$\int_t^{t+T} \beta(\tau)\beta^{\mathrm{T}}(\tau)d\tau \geqslant k_0 I > 0, \qquad \forall t \geqslant 0$$

则式(5.31)是系统(5.30)的一个自适应观测器，使得对于任意初始条件$\hat{z}(0), \hat{\theta}(0), z(0)$以及任意$\theta$，当时间$t$趋于无穷时，$\|z(t) - \hat{z}(t)\|$和$\|\theta - \hat{\theta}(t)\|$均指数趋近于零。 □

证明: 参考定理5.3.2的证明，按式(5.32)选择k，使得三元组(A, b, c_o)满足严格正实条件(B.12)。从而系统的误差动态(5.33)可重写为

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{z}} &= A\tilde{z} + b\beta^{\mathrm{T}}(y,u,t)\tilde{\theta} \triangleq A\tilde{z} + \bar{\beta}^{\mathrm{T}}(t)\tilde{\theta} \\ \dot{\tilde{\theta}} &= -\Gamma\beta(y,u,t)b^{\mathrm{T}}P\tilde{z} \triangleq -\Gamma\bar{\beta}(t)P\tilde{z}\end{aligned} \tag{5.35}$$

其中P是一个正定对称矩阵。如Meyer-Kalman-Yacubovich引理B.2.2所定义的，$\bar{\beta} = \beta b^{\mathrm{T}}$。由定义5.3.2可知，有$b_n \neq 0$，则持续激励条件说明

$$\int_t^{t+T} \bar{\beta}\bar{\beta}^{\mathrm{T}}d\tau = \int_t^{t+T} b^{\mathrm{T}}b\beta\beta^{\mathrm{T}}d\tau \geqslant k_1 I > 0, \qquad \forall t \geqslant 0 \tag{5.36}$$

其中k_1是一个合适的正数。对于满足条件(5.36)的系统(5.35)，应用持续激励引理B.2.3，定理得证。 □

在讨论不具有自适应观测器标准型系统的自适应观测器设计问题之前，利用定理5.3.1进行特殊化处理，给出存在与θ无关的将系统(5.27)变换为自适应观测器型的变换的条件。

定理 5.3.4 对于系统(5.27)，如果在$\mathbb{R}^n$上有：

(i) $\mathrm{rank}\{dh, \cdots, d(L_f^{n-1}h)\} = n$,

(ii) $\left[ad_f^i r, ad_f^j r\right] = 0, 0 \leqslant i, j \leqslant n-1$,

(iii) $\left[g, ad_f^i r\right] = 0, 0 \leqslant j \leqslant n-2$,

(iv) $\left[q_i, ad_f^j r\right] = 0, 1 \leqslant i \leqslant p, 0 \leqslant j \leqslant n-2$，且对于$1 \leqslant i \leqslant p$有

$$q_i(x,u) = \beta_i(h(x),u)\sum_{j=1}^{n} b_j ad_{(-f)}^{j-1} r(x)$$

其中$b_n \neq 0$，b_j使得多项式$b_n s^{n-1} + \cdots + b_1$是Hurwitz的，

(v) 向量场$ad_f^i r, 0 \leqslant i \leqslant n-1$是完备的，

其中向量场r是方程(5.19)的解，则存在与θ无关的一个全局微分同胚

$$z = T(x), \qquad T(0) = 0, \qquad z \in \mathbb{R}^n$$

将其变换为自适应观测器标准型(5.30)。 □

例 5.3.3 重新考虑例5.3.1。由于

$$q = y^2 ad_{(-f)} r - y^3 r$$

定理5.3.4的条件(iv)不成立。 □

例 5.3.4 定理5.3.4并不适用于例5.3.2中的系统。实际上，尽管满足条件(i)～条件(iii)和条件(v)，但条件(iv)不成立。 □

评注 5.3.1 如果定理5.3.4适用，则定理5.3.2给出了如何建立$z(t)$的自适应观测器，$x(t)$的自适应观测器也可以同样建立，这是因为两者之间存在一个与θ无关的全局微分同胚$z = T(x)$。 □

现在介绍更一般的变换，并说明如何将满足定理5.3.1的条件的系统(5.27)变换为具有自适应观测器标准型的系统。

定义 5.3.3 全局状态空间变换

$$z = T(x,\xi,\theta), \quad z \in \mathbb{R}^n, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \xi \in \mathbb{R}^s, \quad \theta \in \mathbb{R}^p$$

称为**输入–输出滤波变换(input-output filtered transformation)**，其中T是一个光滑映射$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$，当$\xi(t)$是由辅助的线性渐近稳定的滤波器

$$\dot{\xi} = \Lambda\xi + \alpha(y,u), \qquad \xi(0) = 0$$

在已知信号u和y驱动(Λ是一个Hurwitz矩阵)下产生，并且使得存在一个光滑函数$S(z,\xi,\theta)$，满足

$$z = T(S(z,\xi,\theta),\xi,\theta), \qquad \forall\xi \in \mathbb{R}^s, \quad \forall\theta \in \mathbb{R}^p$$

□

定理 5.3.5 给定系统($z \in \mathbb{R}^n$)

$$\begin{aligned}
\dot{z} &= A_o z + \gamma(y,u) + \Psi(y,u)\theta = A_o z + \gamma(y,u) + \sum_{i=1}^{p} \psi_i(y,u)\theta_i \\
y &= c_o z
\end{aligned} \tag{5.37}$$

以及一个向量$b = [b_1, \cdots, b_{n-1}, 1]^{\mathrm{T}}$，使得多项式

$$s^{n-1} + b_{n-1}s^{n-2} + \cdots + b_2 s + b_1$$

是Hurwitz的，则滤波变换

$$\begin{aligned}
\eta_j &= z_j - \sum_{i=1}^{p} \xi_j[i]\theta_i, \qquad 1 \leqslant j \leqslant n-1 \\
\eta_n &= z_n
\end{aligned} \tag{5.38}$$

其中 $\xi[i] \in \mathbb{R}^{n-1}, 1 \leqslant i \leqslant p$ 满足

$$\dot{\xi}[i] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -b_1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -b_2 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -b_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -b_{n-1} \end{bmatrix} \xi[i] + \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & -b_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -b_{n-1} \end{bmatrix} \psi_i(y,u) \tag{5.39}$$

将系统 (5.37) 变换为自适应观测器型

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= A_{\mathrm{o}}\eta + \gamma(y,u) + b\sum_{i-1}^{p}(\xi_{n-1}[i] + \psi_{in}(y,u))\theta_i \\ &\triangleq A_{\mathrm{o}}\eta + \gamma(y,u) + b\beta(y,u,\xi)\theta \\ y &= c_{\mathrm{o}}\eta \end{aligned} \tag{5.40}$$

其中 $\beta = \sum_{i=1}^{p}(\xi_{n-1}[i] + \psi_{in})$ 对所有有界的 u 和 y 有界。 □

证明: 将式 (5.38) 对时间求导并考虑式 (5.37) 和式 (5.39)，可得

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_1 &= \gamma_1 + \sum_{i=1}^{p} b_1(\xi_{n-1}[i] + \psi_{in})\theta_i \\ \dot{\eta}_j &= z_{j-1} + \gamma_j + \sum_{i=1}^{p}(-\xi_{j-1}[i] + b_j(\xi_{n-1}[i] + \psi_{in}))\theta_i \\ &= \eta_{j-1} + \gamma_j + \sum_{i=1}^{p} b_j(\xi_{n-1}[i] + \psi_{in})\theta_i, \qquad 2 \leqslant j \leqslant n \end{aligned}$$

该式也可以以矩阵的形式重写为式 (5.40) 所示的形式。对于所有有界的 y 和 u，$\xi_{n-1}[i], 1 \leqslant i \leqslant p$ 也是有界的，因此矩阵 β 的元是有界的。 □

定理 5.3.5 表明，满足定理 5.3.1 的条件的非线性系统 (5.27) 可以变换为式 (5.40) 所示的自适应观测器型，通过与 θ 相关的滤波变换 (5.38) 和 (5.39)，其状态 η 与状态 z 相关(z 通过一个与 θ 无关的变换与原始状态 x 相关)。如果定理 5.3.2 适用于具有自适应观测器型的系统 (5.40)，则 z 的收敛估计值 $\hat{z}$ 由

$$\hat{z}_j = \hat{\eta}_j + \sum_{i=1}^{p} \xi_j[i]\hat{\theta}_i, \qquad 1 \leqslant j \leqslant n$$

给出。若定理 5.3.2 适用于变换后的系统，则给出了系统 (5.27) 等价状态 η 的一个自适应观测器。

对于含有未知参数的线性系统，作为特例有如下结果。

评注 5.3.2 考虑一个单输入单输出线性系统，表示为

$$y(s) = \frac{g_{n-1}s^{n-1} + \cdots + g_1 s + g_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} u(s) \tag{5.41}$$

或相应的状态空间实现

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -y & 0 & \cdots & 0 & u & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -y & \cdots & 0 & 0 & u & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -y & 0 & 0 & \cdots & u \end{bmatrix} \theta \\
&\triangleq A_o x + \Psi(y,u)\theta \\
y &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} x = c_o x
\end{aligned} \tag{5.42}
$$

其中 $\theta = [a_0, \cdots, a_{n-1}, g_0, \cdots, g_{n-1}]^{\mathrm{T}}$ 是一个具有 $2n$ 个未知定常参数的向量。定理 5.3.5 适用于系统 (5.42)，且保证存在将其变换为自适应观测器型 (5.30) 的滤波变换。应用定理 5.3.2 可建立自适应观测器。 □

例 5.3.5 重新考虑例 5.3.2。定理 5.3.5 的假设成立。显然，定理 5.3.1 适用，但是定理 5.3.4 不适用。作为定理 5.3.5 应用的一个示例，将系统(在例 5.3.2 中所得到的)

$$
\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= u \\
\dot{z}_2 &= z_1 + 2u \\
\dot{z}_3 &= z_2 + u + \theta(\mathrm{e}^{z_3} - 1) \\
y &= z_3
\end{aligned}
$$

变换为自适应观测器型，其中 $b = [1, 2, 1]$，相应的 Hurwitz 多项式为 $(s^2 + 2s + 1)$。参照定理 5.3.5 的证明，令滤波器为(在此例中只有一个参数)

$$
\dot{\xi} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \xi + \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathrm{e}^y - 1 \end{bmatrix}, \qquad \xi \in \mathbb{R}^2
$$

即

$$
\begin{aligned}
\dot{\xi}_1 &= -\xi_2 - (\mathrm{e}^y - 1) \\
\dot{\xi}_2 &= \xi_1 - 2\xi_2 - 2(\mathrm{e}^y - 1)
\end{aligned}
$$

滤波变换为

$$
\begin{aligned}
\eta_1 &= z_1 - \xi_1 \theta \\
\eta_2 &= z_2 - \xi_2 \theta \\
\eta_3 &= z_3
\end{aligned}
$$

而变量 η 的动态描述如下：

$$
\begin{aligned}
\dot{\eta}_1 &= u + \theta(\xi_2 + \mathrm{e}^y - 1) \\
\dot{\eta}_2 &= z_1 + 2u + \theta(-\xi_1 + 2\xi_2 + 2(\mathrm{e}^y - 1)) = \eta_1 + 2u + 2\theta(\xi_2 + \mathrm{e}^y - 1) \\
\dot{\eta}_3 &= z_2 + u + \theta(\mathrm{e}^y - 1) = \eta_2 + u + \theta(\xi_2 + \mathrm{e}^y - 1) \\
y &= \eta_3
\end{aligned}
$$

即

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= A_o\eta + bu + b(\xi_2 + e^y - 1)\\ y &= c_o\eta\end{aligned}$$

其中 $b = [1, 2, 1]^{\mathrm{T}}$。 □

5.4 多变量系统的推广

考虑具有 s 个输出的多输出非线性系统($y = [y_1, \cdots, y_s]^{\mathrm{T}}$)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + q_0(x,u) + \sum_{i=1}^{p}\theta_i q_i(x,u)\\ &\triangleq f(x) + q_0(x,u) + Q(x,u)\theta, \qquad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m\\ y &= H(x) = \begin{bmatrix} h_1(x)\\ \vdots \\ h_s(x)\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{5.43}$$

其中 $h_1, \cdots, h_s$ 是光滑函数，且 $h_i(0) = 0, 1 \leqslant i \leqslant s$，$dh_1, \cdots, dh_s$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中是线性无关的，f 是一个光滑向量场，$f(0) = 0$，$q_i(x,u), 0 \leqslant i \leqslant p$ 是光滑函数，且 $q_i(x,0) = 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, 0 \leqslant i \leqslant p$。本章所给出的大部分结论都可以推广到多输出系统(5.43)。本节只给出主要的定义和结论。

定义 5.4.1 对于线性系统(5.43)，**可观性指数集(observability indices)** $\{k_1, \cdots, k_s\}$ 是当 $u = 0, \theta = 0$，即

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x)\\ y_i &= h_i(x), \qquad 1 \leqslant i \leqslant s\end{aligned} \tag{5.44}$$

时，按如下方式惟一确定的指数

$$k_i = \mathrm{card}\{s_j \geqslant i : j \geqslant 0\}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant s$$

其中

$$\begin{aligned}s_0 &= \mathrm{rank}\{dh_i(x) : 1 \leqslant i \leqslant s\}\\ &\vdots\\ s_k &= \mathrm{rank}\{dh_i(x), \cdots, d(L_f^k h_i(x)) : 1 \leqslant i \leqslant s\}\\ &\quad -\mathrm{rank}\{dh_i(x), \cdots, d(L_f^{k-1} h_i(x)) : 1 \leqslant i \leqslant s\}\\ &\vdots\\ s_{n-1} &= \mathrm{rank}\{dh_i(x), \cdots, d(L_f^{n-1} h_i(x)) : 1 \leqslant i \leqslant s\}\\ &\quad -\mathrm{rank}\{dh_i(x), \cdots, d(L_f^{n-2} h_i(x)) : 1 \leqslant i \leqslant s\}\end{aligned}$$

□

定义 5.4.2 如果对所有 $x \in U_0$ (对所有 $x \in \mathbb{R}^n$)，有

$$\operatorname{rank}\{dh_i(x), \cdots, d(L_f^{k_i-1}h_i) : 1 \leqslant i \leqslant s\} = n$$

则称系统 (5.43) 在 U_0 内是局部可观的(或在 $\mathbb{R}^n$ 中可观的)。 □

在线性系统的情形下，定义 5.4.1 具有如下形式：

定义 5.4.3 对于任意可观的系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Fx \\ y &= Hx \end{aligned}$$

即有

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix} = n$$

成立时，可观性指数集 $\{k_1, \cdots, k_s\}$ 惟一确定如下：

$$k_i = \operatorname{card}\{s_j \geqslant i : j \geqslant 0\}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant s$$

其中

$$\begin{aligned} s_0 &= \operatorname{rank}[H] \\ &\vdots \\ s_k &= \operatorname{rank}\begin{bmatrix} H \\ \vdots \\ HF^k \end{bmatrix} - \operatorname{rank}\begin{bmatrix} H \\ \vdots \\ HF^{k-1} \end{bmatrix} \\ &\vdots \\ s_{n-1} &= \operatorname{rank}\begin{bmatrix} H \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix} - \operatorname{rank}\begin{bmatrix} H \\ \vdots \\ HF^{n-2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

由定义可知 $k_1 \geqslant k_2 \geqslant \cdots \geqslant k_s$，且由于系统是可观的，从而有 $\sum_{i=1}^{s} k_i = n$。 □

定理 5.4.1 对于系统 (5.44)，对其输出 $y_1, \cdots, y_s$ 重新排序，存在一个全局微分同胚

$$z = T(x), \qquad T(0) = 0, \quad z \in \mathbb{R}^n$$

将其变换为

$$\begin{aligned} \dot{z} &= A_o z + \gamma(y) \\ y &= C_o z \end{aligned}$$

其中

$$A_o = \text{block diag}\begin{bmatrix} A_1 & \cdots & A_s \end{bmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
C_o &= \text{block diag}\begin{bmatrix} C_1 & \cdots & C_s \end{bmatrix} \\
A_i &= \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}_{k_i \times k_i}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant s \\
C_i &= \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}_{1 \times k_i}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant s
\end{aligned}
$$

当且仅当在 $\mathbb{R}^n$ 中:

(i) 系统是可观的，且 $s_0, \cdots, s_{n-1}$ ($k_1, \cdots, k_s$ 也如此)是常数;

(ii)

$$
\begin{aligned}
&\text{rank}\{d(L_f^k h_i) : 0 \leqslant k \leqslant k_j - 1, i \neq j, 1 \leqslant i \leqslant s, \\
&\qquad dh_j, \cdots, d(L_f^{k_j-2} h_j)\} \\
&= \text{rank}\{d(L_f^k h_i) : 0 \leqslant k \leqslant \min(k_i, k_j) - 1, i \neq j, 1 \leqslant i \leqslant s, \\
&\qquad dh_j, \cdots, d(L_f^{k_j-2} h_j)\}, \ 1 \leqslant j \leqslant s
\end{aligned}
$$

(iii) 存在 s 个向量场 $g_1, \cdots, g_s$，满足

$$
L_{g_i} L_f^{k-1} h_j = \delta_{i,j} \delta_{k,k_j}, \qquad \begin{array}{l} 1 \leqslant i \leqslant s \\ 1 \leqslant k \leqslant k_j \\ 1 \leqslant j \leqslant s \end{array}
$$

其中对于 $i \neq j$，$\delta_{i,j} = 0$，$\delta_{i,i} = 1$，有

$$
[ad_f^k g_i, ad_f^\ell g_j] = 0, \qquad \begin{array}{l} 1 \leqslant i, j \leqslant s \\ 0 \leqslant k \leqslant k_i - 1 \\ 1 \leqslant \ell \leqslant k_j - 1 \end{array}
$$

(iv) 向量场

$$
ad_f^\ell g_i, \qquad 1 \leqslant i \leqslant s, \ 0 \leqslant \ell \leqslant k_i - 1
$$

是完备的。

□

评注 5.4.1 当所有可观性指数相等，即 $k_1 = k_2 = \cdots = k_s$ 时，条件 (ii) 总是成立的。 □

例 5.4.1 考虑系统

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= x_2 x_3 \\
\dot{x}_3 &= x_2 \\
y_1 &= x_1 \\
y_2 &= x_3
\end{aligned}
$$

记

$$\begin{aligned} f &= x_2\frac{\partial}{\partial x_1}+x_2x_3\frac{\partial}{\partial x_2}+x_2\frac{\partial}{\partial x_3} \\ h_1 &= x_1 \\ h_2 &= x_3 \end{aligned}$$

并计算

$$\begin{aligned} dh_1 &= dx_1 \\ dh_2 &= dx_3 \\ d(L_fh_1) &= dx_2 \\ d(L_fh_2) &= dx_2 \end{aligned}$$

定理5.4.1不适用。实际上，虽然由于可观性指数为$\{2,1\}$，满足条件(i)，但是由于当$j=1$时，有

$$\begin{aligned} \operatorname{rank}\{dh_2,d(L_fh_2),dh_1\} &= \operatorname{rank}\{dx_3,dx_2,dx_1\} \\ &> \operatorname{rank}\{dh_2,dh_1\}=\operatorname{rank}\{dx_3,dx_1\} \end{aligned}$$

因此，条件(ii)不成立。 □

例 5.4.2 考虑系统

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_2x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_1 \\ y_1 &= x_1 \\ y_2 &= x_3 \end{aligned}$$

记

$$\begin{aligned} f &= x_2\frac{\partial}{\partial x_1}+x_2x_3\frac{\partial}{\partial x_2}+x_1\frac{\partial}{\partial x_3} \\ h_1 &= x_1 \\ h_2 &= x_3 \end{aligned}$$

并计算

$$\begin{aligned} dh_1 &= dx_1 \\ dh_2 &= dx_3 \\ d(L_fh_1) &= dx_2 \\ d(L_fh_2) &= dx_1 \end{aligned}$$

选择

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{\partial}{\partial x_2} \\ g_2 &= x_1\frac{\partial}{\partial x_2}+\frac{\partial}{\partial x_3} \end{aligned}$$

由于向量场 g_1, g_2 和 $ad_{(-f)}g_1 = \partial/\partial x_1 + x_3\partial/\partial x_2$ 是可交换的，因此定理5.4.1适用。同时注意，若取向量场

$$
\begin{aligned}
\bar{g}_1 &= \frac{\partial}{\partial x_2} \\
\bar{g}_2 &= \frac{\partial}{\partial x_3}
\end{aligned}
$$

则满足条件(iii)的第一部分，但是不满足条件(ii)的后半部分，这是由于 $\partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3$ 和 $ad_{(-f)}\bar{g}_1 = \partial/\partial x_1 + x_3\partial/\partial x_2$ 不可交换。同时平整向量场 g_1, g_2 和 $ad_{(-f)}g_1$ 的全局微分同胚 $z = T(x)$, $T(0) = 0$ 为

$$
\begin{aligned}
z_1 &= x_2 - x_1x_3 \\
z_2 &= x_1 \\
z_3 &= x_3
\end{aligned}
$$

在新的坐标系下，系统变为

$$
\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= x_2x_3 - x_2x_3 - x_1^2 = -y_1^2 \\
\dot{z}_2 &= z_1 + x_1x_3 = z_1 + y_1y_2 \\
\dot{z}_3 &= y_1 \\
y_1 &= z_2 \\
y_2 &= z_3
\end{aligned}
$$

□

定理5.3.1则可推广如下。

定理 5.4.2 对于系统(5.43)，对其输出 $y_1, \cdots, y_s$ 重新排序，存在一个全局微分同胚

$$z = T(x), \qquad T(0) = 0, \quad z \in \mathbb{R}^n$$

将其变换为

$$
\begin{aligned}
\dot{z} &= A_o z + \gamma(y, u) + \Psi(y, u)\theta \\
y &= C_o z
\end{aligned} \tag{5.45}
$$

当且仅当定理5.4.1的条件(i)~条件(iv)成立，且

(v) $[q_i, ad_f^k g_j] = 0,\ 0 \leqslant i \leqslant p, 0 \leqslant k \leqslant k_j - 2, 1 \leqslant j \leqslant s$

□

定义 5.4.4 给定系统

$$
\begin{aligned}
\dot{z} &= A_o z + \gamma(y, u) + B\Gamma(y, u, t)\theta \\
y &= C_o z
\end{aligned} \tag{5.46}
$$

若 Γ 是 $s \times p$ 的连续函数矩阵，且

$$B = \text{block diag}[b_1, \cdots, b_p]$$

其中 $b_i=[b_{i1},\cdots,b_{ik_i}], 1\leqslant i\leqslant s, b_{ik_i}>0$是常数向量，使得多项式

$$b_{ik_i}s^{k_i-1}+\cdots+b_{i2}s+b_{i1},\qquad 1\leqslant i\leqslant s$$

是Hurwitz的，则称该系统是**多输出自适应观测器型(multi-output adaptive observer form)**的。 □

定理 5.4.3 如果定理5.4.2适用，则存在一个滤波变换，将系统(5.45)变换为多输出自适应观测器型(5.46)，其中向量$b_1,\cdots,b_s$是任意选取的。 □

对于具有多输出观测器型的非线性系统，参照定理5.3.2的证明，同样也可以构造自适应观测器。

5.5 实例

例 5.5.1 (问题1.10.8)考虑单连杆的**柔性关节机器人(robot with flexible joint)**。假设只有连杆的位移q_1是可测量的，其状态空间模型为

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2\\
\dot{x}_2 &= -\frac{F_l}{J_l}x_2-\frac{Mgl}{J_l}\sin x_1-\frac{k}{J_1}(x_1-x_3)\\
\dot{x}_3 &= x_4\\
\dot{x}_4 &= -\frac{F_m}{J_m}x_4+\frac{k}{J_m}(x_1-x_3)+\frac{1}{J_m}u\\
y &= x_1
\end{aligned}$$

记

$$\begin{aligned}
f &= x_2\frac{\partial}{\partial x_1}-\left(\frac{F_1}{J_1}x_2+\frac{Mgl}{J_1}\sin x_1+\frac{k}{J_1}(x_1-x_3)\right)\frac{\partial}{\partial x_2}\\
&\quad +x_4\frac{\partial}{\partial x_3}+\left(-\frac{F_m}{J_m}x_4+\frac{k}{J_m}(x_1-x_3)\right)\frac{\partial}{\partial x_4}\\
g &= \frac{1}{J_m}\frac{\partial}{\partial x_4}\\
h &= x_1
\end{aligned}$$

显然，定理5.2.1的条件(i)成立，且取

$$r=\frac{J_l}{k}\frac{\partial}{\partial x_4}$$

亦满足条件(ii)~条件(iv)。坐标变换$z=T(x)$将单连杆机器人的模型变换为式(5.18)的形式：

$$\begin{aligned}
z_1 &= t_1(x)=\frac{F_lk}{J_lJ_m}x_1+\frac{k}{J_m}x_2+\frac{kF_m}{J_lJ_m}x_3+\frac{k}{J_l}x_4\\
z_2 &= t_2(x)=\left(\frac{F_lF_m}{J_lJ_m}+\frac{k}{J_m}\right)x_1+\frac{F_m}{J_m}x_2+\frac{k}{J_l}x_3\\
z_3 &= t_3(x)=\left(\frac{F_l}{J_l}+\frac{F_m}{J_m}\right)x_1+x_2\\
z_4 &= t_4(x)=x_1
\end{aligned}$$

实际上，在 z 坐标系下，有

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= -\frac{k}{J_{\mathrm{m}}J_{\mathrm{l}}}Mgl\sin z_4 + \frac{k}{J_{\mathrm{l}}J_{\mathrm{m}}}u \\
\dot{z}_2 &= z_1 - (F_{\mathrm{l}} + F_{\mathrm{m}})\frac{k}{J_{\mathrm{l}}J_{\mathrm{m}}}z_4 - \frac{F_{\mathrm{m}}Mgl}{J_{\mathrm{l}}J_{\mathrm{m}}}\sin z_4 \\
\dot{z}_3 &= z_2 - \left(\frac{k}{J_{\mathrm{l}}} + \frac{k}{J_{\mathrm{m}}} + \frac{F_{\mathrm{l}}F_{\mathrm{m}}}{J_{\mathrm{l}}J_{\mathrm{m}}}\right)z_4 - \frac{Mgl}{J_{\mathrm{l}}}\sin z_4 \\
\dot{z}_4 &= z_3 - \left(\frac{F_{\mathrm{l}}}{J_{\mathrm{l}}} + \frac{F_{\mathrm{m}}}{J_{\mathrm{m}}}\right)z_4 \\
y &= z_4
\end{aligned}$$

因此，根据定理 5.2.3 可以给出一个全局观测器。 □

例 5.5.2 (问题 1.10.11) **未知点质量(unknown point mass)** 问题的动态方程可重写为状态空间控制器型

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= v \\
\dot{v} &= -\frac{k_{\mathrm{p}}}{m}x - \frac{k_{\mathrm{v}}}{m}v + \frac{d}{m} + \frac{u}{m} \\
y &= x
\end{aligned}$$

或写为观测器型

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -(k_{\mathrm{p}}/m)y + d/m + u/m \\ z_1 - (k_{\mathrm{v}}/m)y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \\
&\quad + \begin{bmatrix} -y & 1 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_{\mathrm{p}}/m \\ d/m \\ 1/m \\ k_{\mathrm{v}}/m \end{bmatrix} \\
&\triangleq A_{\mathrm{o}}z + \Psi(y,u)\theta \\
y &= z_2 \triangleq c_{\mathrm{o}}z
\end{aligned}$$

由定理 5.3.5，取 $b=[1,1]$，则系统可以变换为自适应观测器型。实际上，滤波器给定如下：

$$\dot{\xi}^{\mathrm{T}} = -\xi^{\mathrm{T}} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -y & 1 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -y \end{bmatrix}, \quad \xi \in \mathbb{R}^4$$

即

$$\begin{aligned}
\dot{\xi}[1] &= -\xi[1] - y \\
\dot{\xi}[2] &= -\xi[2] + 1 \\
\dot{\xi}[3] &= -\xi[3] + u \\
\dot{\xi}[4] &= -\xi[4] + y
\end{aligned}$$

对应的滤波变换 (5.38) 为

$$\begin{aligned}
\eta_1 &= z_1 - \xi[1]\theta_1 - \xi[2]\theta_2 - \xi[3]\theta_3 - \xi[4]\theta_4 \\
\eta_2 &= z_2
\end{aligned}$$

而变换后的系统为

$$
\begin{aligned}
\dot{\eta}_1 &= \xi[1]\theta_1 + \xi[2]\theta_2 + \xi[3]\theta_3 + \xi[4]\theta_4 \\
\dot{\eta}_2 &= \eta_1 + \xi[1]\theta_1 + \xi[2]\theta_2 + \xi[3]\theta_3 + (\xi[4] - y)\theta_4 \\
y &= \eta_2
\end{aligned}
$$

□

例 5.5.3 (问题1.10.7)考虑**点质量卫星(point mass satellite)**模型，假设可测量的变量为点质量的笛卡儿坐标

$$
\begin{aligned}
y_1 &= r\sin\varphi \\
y_2 &= r\cos\varphi
\end{aligned}
$$

记状态

$$x_1 = r,\ \ x_2 = v,\ \ x_3 = \varphi,\ \ x_4 = \omega$$

及参数

$$\theta_1 = \frac{k}{m},\quad \theta_2 = \frac{1}{m}$$

可得

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= x_1 x_4^2 - \theta_1 \frac{1}{x_1^2} + \theta_2 u_1 \\
\dot{x}_3 &= x_4 \\
\dot{x}_4 &= -2\frac{x_2 x_4}{x_1} + \theta_2 \frac{u_2}{x_1} \\
y_1 &= x_1 \sin x_3 \\
y_2 &= x_1 \cos x_3
\end{aligned}
$$

只要 $x_1 > 0$，上述模型就是有效的。令

$$
\begin{aligned}
f &= x_2\frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 x_4^2 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_4 \frac{\partial}{\partial x_3} - 2\frac{x_2 x_4}{x_1}\frac{\partial}{\partial x_4} \\
q_1 &= -\frac{1}{x_1^2}\frac{\partial}{\partial x_2} \\
q_2 &= u_1 \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{u_2}{x_1}\frac{\partial}{\partial x_4} \\
h_1 &= x_1 \sin x_3 \\
h_2 &= x_1 \cos x_3
\end{aligned}
$$

计算得

$$
\begin{aligned}
L_f h_1 &= x_2 \sin x_3 + x_1 x_4 \cos x_3 \\
L_f h_2 &= x_2 \cos x_3 - x_1 x_4 \sin x_3 \\
dh_1 &= \sin x_3 dx_1 + x_1 \cos x_3 dx_3 \\
d(L_f h_1) &= x_4 \cos x_3 dx_1 + \sin x_3 dx_2 + (x_2 \cos x_3 - x_1 x_4 \sin x_3) dx_3
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&\quad +x_1\cos x_3dx_4\\
dh_2 &= \cos x_3dx_1 - x_1\sin x_3dx_3\\
d(L_fh_2) &= -x_4\sin x_3dx_1+\cos x_3dx_2-(x_2\sin x_3+x_1x_4\cos x_3)dx_3\\
&\quad -x_1\sin x_3dx_4
\end{aligned}$$

按照定义5.4.1，对于$x_1>0$，有

$$\begin{aligned}
s_0 &= \text{rank}\{dh_1,dh_2\}=2\\
s_1 &= \text{rank}\{dh_1,d(L_fh_1),dh_2,d(L_fh_2)\}-\text{rank}\{dh_1,dh_2\}=2\\
s_2 &= s_3=0
\end{aligned}$$

说明可观性指数为

$$k_1=2,\quad k_2=2$$

由于对于使$x_1>0$的任意x，有

$$\text{rank}\{dh_1,d(L_fh_1),dh_2,d(L_fh_2)\}=4$$

因此定理5.4.1的条件(i)成立。由可观性指数相互相等可知，条件(ii)也满足。为了验证条件(iii)，我们寻找满足如下条件的两个向量场g_1和g_2:

$$\begin{aligned}
L_{g_1}h_1 &= 0,\quad L_{g_1}(L_fh_1)=1\\
L_{g_1}h_2 &= 0,\quad L_{g_1}(L_fh_2)=0\\
L_{g_2}h_1 &= 0,\quad L_{g_2}(L_fh_1)=0\\
L_{g_2}h_2 &= 0,\quad L_{g_2}(L_fh_2)=1
\end{aligned}$$

其一个解为

$$\begin{aligned}
g_1 &= \sin x_3\frac{\partial}{\partial x_2}+\frac{1}{x_1}\cos x_3\frac{\partial}{\partial x_4}\\
g_2 &= \cos x_3\frac{\partial}{\partial x_2}-\frac{1}{x_1}\sin x_3\frac{\partial}{\partial x_4}
\end{aligned}$$

计算得

$$\begin{aligned}
ad_fg_1 &= -\sin x_3\frac{\partial}{\partial x_1}-x_4\cos x_3\frac{\partial}{\partial x_2}-\frac{\cos x_3}{x_1}\frac{\partial}{\partial x_3}\\
&\quad +\frac{1}{x_1^2}(x_1x_4\sin x_3+x_2\cos x_3)\frac{\partial}{\partial x_4}\\
ad_fg_2 &= -\cos x_3\frac{\partial}{\partial x_1}+x_4\sin x_3\frac{\partial}{\partial x_2}+\frac{\sin x_3}{x_1}\frac{\partial}{\partial x_3}\\
&\quad +\frac{1}{x_1^2}(x_1x_4\cos x_3-x_2\sin x_3)\frac{\partial}{\partial x_4}
\end{aligned}$$

由于$[ad_f^kg_i,ad_f^lg_j]=0$, $1\leqslant i,j\leqslant 2$, $0\leqslant k,l\leqslant 1$，条件(iii)成立。又由于$[q_j,g_i]=0,1\leqslant i,j\leqslant 2$，定理5.4.2中的条件(v)成立，因此微分同胚可计算得

$$\begin{aligned}
z_1 &= x_2\sin x_3+x_1x_4\cos x_3\\
z_2 &= x_1\sin x_3
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
z_3 &= x_2\cos x_3 - x_1x_4\sin x_3\\
z_4 &= x_1\cos x_3
\end{aligned}
$$

只要$x_1>0$，该微分同胚即为有效的，且同时平整向量场$g_1, g_2, ad_{(-f)}g_1, ad_{(-f)}g_2$ 在z坐标系下分别表示为$\partial/\partial z_1, \partial/\partial z_3, \partial/\partial z_2, \partial/\partial z_4$。定理5.4.2仅在$\{x: x_1>0\}$内局部适用。在$z$坐标系下系统变换为

$$
\begin{aligned}
\dot z_1 &= \sin x_3\left(\theta_2 u_1 - \frac{\theta_1}{x_1^2}\right) + u_2\theta_2\cos x_3\\
&= -\frac{y_1}{(y_1^2+y_2^2)^{3/2}}\theta_1 + \frac{u_1y_1+u_2y_2}{(y_1^2+y_2^2)^{1/2}}\theta_2\\
&\triangleq \theta_1\psi_{11}(y) + \theta_2\psi_{12}(y,u)\\
\dot z_2 &= x_2\sin x_3 + x_1x_4\cos x_3 = z_1\\
\dot z_3 &= \cos x_3\left(\theta_2 u_1 - \frac{\theta_1}{x_1^2}\right) - \sin x_3 u_2\theta_2\\
&= -\frac{y_2}{(y_1^2+y_2^2)^{3/2}}\theta_1 + \frac{u_1y_2-u_2y_1}{(y_1^2+y_2^2)^{1/2}}\theta_2\\
&\triangleq \theta_1\psi_{21}(y) + \theta_2\psi_{22}(y,u)\\
\dot z_4 &= x_2\cos x_3 - x_1x_4\sin x_3 = z_3\\
y_1 &= z_2\\
y_2 &= z_4
\end{aligned}
\tag{5.47}
$$

最后，应用定理5.4.3将系统(5.47)变换为多输出自适应观测器型。实际上，考虑滤波器

$$
\begin{aligned}
\dot\xi_1[1] &= -\xi_1[1] + \psi_{11}(y), \quad \dot\xi_1[2] = -\xi_1[2] + \psi_{12}(y,u)\\
\dot\xi_2[1] &= -\xi_2[1] + \psi_{21}(y), \quad \dot\xi_2[2] = -\xi_2[2] + \psi_{22}(y,u)
\end{aligned}
$$

以及滤波变换

$$
\begin{aligned}
\zeta_1 &= z_1 - \theta_1\xi_1[1] - \theta_2\xi_1[2]\\
\zeta_2 &= z_2\\
\zeta_3 &= z_3 - \theta_1\xi_2[1] - \theta_2\xi_2[2]\\
\zeta_4 &= z_4
\end{aligned}
$$

在ζ坐标系下有

$$
\begin{aligned}
\dot\zeta &= \begin{bmatrix} 0&0&0&0\\ 1&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&1&0 \end{bmatrix}\zeta + \begin{bmatrix} 1&0\\ 1&0\\ 0&1\\ 0&1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi_1[1] & \xi_1[2]\\ \xi_2[1] & \xi_2[2] \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \theta_1\\ \theta_2 \end{bmatrix}\\
y &= \begin{bmatrix} 0&1&0&0\\ 0&0&0&1 \end{bmatrix}\zeta
\end{aligned}
$$

□

5.6 结论

本书的第一部分讨论了镇定、模型跟随以及输出跟踪的状态反馈设计问题，本书的第二部分从本章开始，主要讨论输出反馈设计，并建立各种非线性系统的观测器和自适应观测器。定理5.2.1(以及在多输出情形下的推广定理5.4.1)给出了基本的结论，全局观测器定理5.2.3和定义5.1.1给出了设计确定性非线性系统全局观测器的条件。反馈线性化定理2.2.1是极点配置定理2.1.1的推广，与此类似的是，针对一类非线性系统，定理5.2.1将定理5.1.1进行了推广，并由此得到定理5.2.3，它推广了定理5.1.2给出的人们熟知的线性系统的观测器设计方法。在第6章中，只对满足定理5.2.1条件的系统设计输出反馈控制。当系统存在未知参数时，在定理5.2.1的基础上，定理5.3.1给出了对不确定性的限制条件，从而使其在适当状态坐标系下只与已知信号(输入和输出)相关。针对满足定理5.3.1条件的不确定系统，定理5.3.5和定理5.3.2给出了自适应观测器设计的构造过程，这将是第7章设计自适应输出反馈控制的一个基本工具。从所使用的方法来看，定理5.3.2给出的自适应观测器设计利用了重要的Meyer-Kalman-Yacubovich引理B.2.2，它是自适应输出反馈设计的基础。定义5.3.2和定义5.3.3分别给出了自适应观测器型和输入–输出滤波变换这两个重要概念。例5.5.1、例5.5.2和例5.5.3分别说明了如何针对柔性关节机器人、未知点质量和点质量卫星设计观测器。

5.7 习题

5.1 试设计如下系统的观测器：

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_1^2 + x_2 - x_3 + x_3^2 - 2x_1x_3 + \mathrm{e}^{(x_1 - x_3)} \\
\dot{x}_2 &= x_3 \\
\dot{x}_3 &= x_1^2 + x_3^2 - 2x_1x_3 \\
y &= x_1 - x_3
\end{aligned}
$$

5.2 试设计如下系统的观测器：

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 + x_1^3 \\
\dot{x}_2 &= x_1^2 x_2 \\
y &= x_1
\end{aligned}
$$

5.3 试设计如下系统的观测器：

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 + x_1^2 \\
\dot{x}_2 &= 0 \\
y &= x_1
\end{aligned}
$$

5.4 试设计如下系统的观测器：

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 + x_1^3 \\
\dot{x}_2 &= u + x_1^2 x_2 - x_1^3
\end{aligned}
$$

$$y = x_1$$

5.5 试设计如下系统的观测器：

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + \alpha_1(x_1)x_1\\ \dot{x}_2 &= u + x_1x_2\alpha_2(x_1)\\ y &= x_1\end{aligned}$$

其中 α_1 和 α_2 是已知的光滑函数。

5.6 设计如下传递函数表示的线性系统的自适应观测器：

$$y(s) = \frac{s-\theta_1}{s(s+\theta_2)}u(s)$$

其中 θ_1 和 θ_2 是正的未知参数。

5.7 试设计如下系统的自适应观测器：

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \theta \mathrm{e}^{x_2} + u\\ \dot{x}_2 &= x_1 + 2\theta \mathrm{e}^{x_2} + 2u\\ y &= x_2\end{aligned}$$

5.8 试设计如下系统的自适应观测器：

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + \theta x_1^2\\ \dot{x}_2 &= u\\ y &= x_1\end{aligned}$$

5.9 试设计如下系统的自适应观测器：

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + \theta x_1^2\\ \dot{x}_2 &= \theta x_1^2 + u\\ y &= x_1\end{aligned}$$

5.10 试设计如下系统的自适应观测器：

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + \theta x_1\alpha_1(x_1)\\ \dot{x}_2 &= u + x_1x_2\alpha_2(x_1)\\ y &= x_1\end{aligned}$$

其中 α_1 和 α_2 是已知的光滑函数，θ 是一个未知的定常参数。

5.11 设计如下系统的自适应观测器：

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + \theta x_1^3\\ \dot{x}_2 &= x_3 + x_1^2x_2\\ \dot{x}_3 &= 0\\ y &= x_1\end{aligned}$$

5.12 试说明系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= 0\\ \dot{x}_3 &= x_2 + 2x_1x_3 + x_3^2 + x_4\\ \dot{x}_4 &= x_1 + x_1^2 + x_3^3\\ y_1 &= x_1 + x_2^2\\ y_2 &= x_3\end{aligned}$$

不能通过状态微分同胚变换为线性可观系统。

5.13 试设计如下系统的自适应观测器：

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\theta x_1\\ \dot{x}_2 &= \theta x_2 + u\\ y &= x_2\end{aligned}$$

已知 $\theta > 0$，假设 $y(t)$ 和 $u(t)$ 是有界的，并且

$$\int_t^{t+T} y^2(\tau)d\tau \geqslant k_1 > 0, \quad \forall t \geqslant 0$$

提示：首先对子系统设计一个具有辨识机能的自适应观测器。

5.14 考虑系统($f(0) = 0, h(0) = 0$)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u, \qquad x \in \mathbb{R}^n\\ y &= h(x)\end{aligned}$$

说明如果在原点的一个邻域 U_0 内有

(i) $\operatorname{rank}\{dh, \cdots, d(L_f^{n-1}h)\} = n$,

(ii) $d(L_gL_f^ih) \subset \operatorname{span}\{dh, \cdots, d(L_f^ih)\}, \quad 0 \leqslant i \leqslant n-2$,

则该系统可局部变换为

$$\begin{aligned}\dot{z}_i &= z_{i+1} + \psi_i(z_1, \cdots, z_i)u, \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1\\ \dot{z}_n &= \phi(z_1, \cdots, z_n) + \psi_n(z_1, \cdots, z_n)u\\ y &= z_1\end{aligned}$$

5.15 试设计如下系统的自适应观测器：

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= x_3\\ \dot{x}_3 &= u + \theta x_1^2\\ y &= x_1\end{aligned}$$

5.16 考虑系统

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_1x_3 - x_1x_4^2 - x_2x_3^2 + x_2x_3x_4^2 - x_2x_4^4 \\
\dot{x}_2 &= x_1 - x_2x_3 + x_2x_4^2 \\
\dot{x}_3 &= 2x_3x_4 - 2x_4^3 \\
\dot{x}_4 &= x_3 - x_4^2 \\
y_1 &= x_2 \\
y_2 &= x_4
\end{aligned}
$$

(a) 验证可观性指数为$\{2,2\}$。

(b) 验证定理 5.4.1 适用，且全局微分同胚为

$$
\begin{aligned}
z_1 &= x_1 - x_2x_3 + x_2x_4^2 \\
z_2 &= x_2 \\
z_3 &= x_3 - x_4^2 \\
z_4 &= x_4
\end{aligned}
$$

5.17 试说明系统

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_1 + x_2^2 \\
\dot{x}_2 &= x_2 \\
y &= x_1 + x_2^2
\end{aligned}
$$

在原点的任意邻域内都不是局部可观的。

5.18 试说明 SISO 系统

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= f(x) + g(x)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R} \\
y &= h(x), \quad y \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

其中 $f(0)=0, h(0)=0$，可通过一个局部状态微分同胚 $z=T(x)$ 变换为线性可控可观系统，当且仅当 $n\times n$ 矩阵

$$
\begin{bmatrix}
L_gh & L_gL_fh & \cdots & L_gL_f^{n-1}h \\
L_gL_fh & L_gL_f^2h & \cdots & L_gL_f^nh \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
L_gL_f^{n-1}h & L_gL_f^{n+1}h & \cdots & L_gL_f^{2n-2}h
\end{bmatrix}
$$

有定常元，且在原点的一个邻域 U_0 内秩为 n。

提示：见评注 5.2.7。

第 6 章 镇定与指数跟踪

本书第一部分研究了状态反馈控制设计问题，本章则开始讨论输出反馈控制设计问题：在输出变量可量测得到的情形下，镇定系统或使输出渐近跟踪给定的期望轨迹。这个问题具有实际意义，因为很多情形下并不是所有的状态均可通过量测得到。状态不可测的原因很多，如物理上测量非常困难(如鼠笼式感应电机转子电流)；传感器昂贵；传感器失效或受噪声影响。下一章将考虑不确定性，而本章仅限于讨论不含有不确定参数的系统：

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= f(x) + g(x)u, \qquad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R} \\
y &= h(x), \qquad y \in \mathbb{R}
\end{aligned} \tag{6.1}
$$

其中 x 是状态变量，u 是控制，$h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是光滑输出函数且 $h(0) = 0$，f 和 g 是$\mathbb{R}^n$上光滑的向量场且 $f(0) = 0, g(0) \neq 0$。本章中始终假设系统(6.1)在 $u = 0$ 时是可观测的。关于输出反馈线性化的问题，将同时讨论静态输出反馈(见 6.1 节)和更一般的动态输出反馈(见 6.2 节)的情形。6.3 节将给出设计全局镇定输出反馈控制器的充分条件。6.4 节以充分条件的形式给出了针对光滑参考输出信号的指数跟踪问题的解。本章所给出的结论以及上一章所给出的自适应观测器设计方法，将是下一章讨论自适应输出反馈控制设计的基础。

6.1 静态输出反馈线性化

定义 6.1.1 *系统(6.1)称为是局部*可静态输出反馈线性化的(**static output feedback linearizable**)*，当存在局部微分同胚*

$$z = T(x), \qquad T(0) = 0 \tag{6.2}$$

以及一个输出反馈($v \in \mathbb{R}$ 是新的输入)

$$u = k(y) + \beta(y)v \tag{6.3}$$

其中 $k(y), \beta(y) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是光滑函数且 $k(0) = 0, \beta(0) \neq 0$，使得闭环系统

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= f(x) + g(x)k(y) + g(x)\beta(y)v \\
y &= h(x)
\end{aligned} \tag{6.4}
$$

在 z 坐标系下局部地变换为线性观测器标准型

$$\begin{aligned}\dot{z} &= \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix} v \triangleq Az + bv \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} z \triangleq c_c z \end{aligned} \tag{6.5}$$

若微分同胚是全局的且 $\beta(y) \neq 0, \forall y \in \mathbb{R}$，则称系统(6.1)是全局可静态输出反馈线性化的。 □

定理 6.1.1 静态输出反馈线性化(Static Output Feedback Linearization) 系统(6.1)是局部可静态输出反馈线性化的，当且仅当在原点的一个邻域 U_0 内有：

(i) $\text{rank}\{d(L_f^j h) : 0 \leqslant j \leqslant n-1\} = n$,

(ii) $[ad_f^i r, ad_f^j r] = 0,\ 0 \leqslant i, j \leqslant n-1$,

(iii) $[g, ad_f^k r] = 0,\ 0 \leqslant k \leqslant n-2$,

(iv) 存在一个光滑函数 $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 和 n 个实常数 $b_i, 1 \leqslant i \leqslant n$，使得

$$g = (\sigma \circ h) \sum_{j=1}^{n} b_{n-j+1} ad_{(-f)}^{j-1} r$$

(v) 存在一个光滑函数 $\alpha' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 和 n 个实常数 $a_i, 1 \leqslant i \leqslant n$，使得

$$ad_{(-f)}^n r = -\sum_{i=1}^{n} a_{n-i+1} ad_{(-f)}^{i-1} r + (\alpha' \circ h) \sum_{i=1}^{n} b_{n-i+1} ad_{(-f)}^{i-1} r$$

其中 r 是满足下式的向量场：

$$\begin{bmatrix} \langle dh, r \rangle \\ \vdots \\ \langle d(L_f^{n-1} h), r \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \tag{6.6}$$

当且仅当在 $\mathbb{R}^n$ 中除满足条件 (i)～条件 (v) 之外，还满足条件：

(vi) 向量场 $ad_f^i r,\ 0 \leqslant i \leqslant n-1$ 是完备的，

则系统 (6.1) 是全局静态可输出反馈线性化的。 □

证明: 如定理 5.2.1 所示，条件 (i) 和条件 (ii) 是存在如下局部状态空间变换的充要条件：

$$z_i = t_i(x), \qquad t_i(0) = 0, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n \tag{6.7}$$

在新的坐标系下

$$ad_{(-f)}^{i-1} r = \frac{\partial}{\partial z_i}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n \tag{6.8}$$

且系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x)\\ y &= h(x)\end{aligned} \tag{6.9}$$

具有如下形式

$$\begin{aligned}\dot{z} &= A_o z + \psi(y)\\ y &= c_o z\end{aligned} \tag{6.10}$$

如定理5.2.1所示，条件(i)～条件(iii)是局部状态空间微分同胚(6.7)存在的充要条件，在新的坐标下系统(6.1)变换为

$$\begin{aligned}\dot{z} &= A_o z + \beta(y)u + \psi(y)\\ y &= c_o z\end{aligned} \tag{6.11}$$

而条件(iv)意味着式(6.11)中的向量场$\beta(y)$具有如下形式：

$$\beta(y) = \sigma(y)\begin{bmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ \vdots \\ b_2 \\ b_1 \end{bmatrix} \tag{6.12}$$

以上结论的证明很容易由定理5.2.1得出：在坐标$z = T(x)$下，系统(6.9)具有式(6.10)的形式，在z坐标系下式(6.8)和条件(iv)为

$$g = \sigma(y)\sum_{i=1}^{n} b_{n-i+1}\frac{\partial}{\partial z_i}$$

即式(6.12)。由于在z坐标系下向量场f为

$$f = \psi_1(z_n)\frac{\partial}{\partial z_1} + \sum_{i=2}^{n}(\psi_i(z_n) + z_{i-1})\frac{\partial}{\partial z_i} \tag{6.13}$$

利用式(6.8)，在z坐标系下有

$$\begin{aligned} ad_{(-f)}^{n} r &= -[f, ad_{(-f)}^{n-1} r]\\ &= -\left[\sum_{i=2}^{n}(\psi_i(z_n) + z_{i-1})\frac{\partial}{\partial z_i} + \psi_1(z_n)\frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial z_n}\right]\\ &= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \psi_i(z_n)}{\partial z_n}\frac{\partial}{\partial z_i} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \psi_i(z_n)}{\partial z_n} ad_{(-f)}^{i-1} r \end{aligned} \tag{6.14}$$

比较式(6.14)和条件(v)，可得

$$\frac{\partial}{\partial z_n}\psi_i(z_n) = b_{n-i+1}\alpha'(z_n) - a_{n-i+1}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n \tag{6.15}$$

因为$f(0) = 0$，并回顾$\psi_i(0) = 0$，将上式积分，有

$$\psi_i(z_n) = b_{n-i+1}\int_0^{z_n}\alpha'(\xi)d\xi - a_{n-i+1}z_n, \quad 1 \leqslant i \leqslant n \tag{6.16}$$

定义

$$\alpha(z_n) = \int_0^{z_n} \alpha'(\xi) d\xi$$

则有

$$f = (-a_n z_n + b_n \alpha(z_n)) \frac{\partial}{\partial z_1} + \sum_{i=2}^{n} (z_{i-1} - a_{n-i+1} z_n + b_{n-i+1} \alpha(z_n)) \frac{\partial}{\partial z_i}$$

综上所述，系统(6.1)变换为

$$\begin{aligned} \dot{z} &= A_o z + \bar{b}(\alpha(y) + \sigma(y)u) - \bar{a}y \\ y &= c_o z \end{aligned} \tag{6.17}$$

其中 $\bar{a} = [a_n, \cdots, a_1]^T, \bar{b} = [b_n, \cdots, b_1]^T$。系统(6.17)可通过一个静态输出反馈

$$u = \sigma^{-1}(y)(-\alpha(y) + v) \tag{6.18}$$

变换为具有观测器型的线性系统

$$\begin{aligned} \dot{z} &= A_o z - \bar{a}y + \bar{b}v \\ y &= c_o z \end{aligned} \tag{6.19}$$

或者等价地，利用定理5.1.3，通过一个线性状态空间坐标变换，将系统(6.17)变为式(6.5)。

由于条件(i)~条件(v)与坐标选择无关，因此很容易在系统(6.19)中验证其必要性。条件(vi)是上述坐标变换成全局的充要条件。 □

评注 6.1.1 只要 (A, b) 是可控的或者系统是最小相位的，输出反馈线性化之后的系统(6.5)即可应用线性系统理论来设计控制 v。 □

例 6.1.1 考虑系统

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 - \frac{x_1^3}{3} \\ \dot{x}_2 &= x_1^2(1 + x_2) - \frac{x_1^5}{3} + (1 + x_1^2)u \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

记

$$\begin{aligned} f &= \left(x_2 - \frac{x_1^3}{3}\right) \frac{\partial}{\partial x_1} + \left(x_1^2(1 + x_2) - \frac{x_1^5}{3}\right) \frac{\partial}{\partial x_2} \\ g &= (1 + x_1^2) \frac{\partial}{\partial x_2} \\ h &= x_1 \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} dh &= dx_1 \\ d(L_f h) &= dx_2 - x_1^2 dx_1 \end{aligned}$$

定理6.1.1的条件(i)成立。由式(6.6)取 $r = \partial/\partial x_2$，条件(ii)~条件(iv)亦成立，即定理6.1.1适用。全局微分同胚

$$z_1 = x_1$$

$$z_2 = x_2 - \frac{x_1^3}{3}$$

定义了全局坐标系，在其上向量场 $r, ad_{(-f)}r = \partial/\partial x_1 + x_1^2\partial/\partial x_2$ 变为 $r = \partial/\partial z_2, ad_{(-f)}r = \partial/\partial z_1$，且系统变为

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_1^2 + (1+z_1^2)u \\ y &= z_1 \end{aligned}$$

因此，通过输出反馈控制

$$u = -\frac{y^2}{1+y^2} + \frac{1}{1+y^2}v$$

该系统可以线性化。 □

6.2 动态输出反馈线性化

现在，我们通过引入滤波输出反馈变换的概念将输出反馈变换的概念推广，这一推广对于动态输出反馈补偿器也成立。这是对于前一章给出的输入–输出滤波变换定义 5.3.3 的一个限制。

定义 6.2.1 所谓**滤波输出反馈变换(filtered output feedback transformation)**是指时变的全局状态微分同胚

$$z = T(x, \xi(t)), \qquad z \in \mathbb{R}^n,\ x \in \mathbb{R}^n,\ \xi \in \mathbb{R}^s \tag{6.20}$$

和输出反馈

$$u = k(y, \xi) + \beta(y)v \tag{6.21}$$

其中 β 和 k 是光滑函数，且 $\beta(y) \neq 0, \forall y \in \mathbb{R}$。它使得存在一个光滑函数 $S(z, \xi(t))$ 满足

$$z = T(S(z, \xi(t)), \xi(t)), \qquad \forall \xi(t) \in \mathbb{R}^s \tag{6.22}$$

其中 $\xi(t)$ 是辅助线性渐近稳定滤波器

$$\dot{\xi} = \Lambda\xi + \delta(y(t)), \qquad \xi(0) = \xi_0 \tag{6.23}$$

在输出信号 y 的非线性光滑函数 $\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^s$ 驱动下产生的信号(Λ 是 Hurwitz 矩阵)。式(6.23)和式(6.21)定义了一个**动态输出反馈控制(dynamic output feedback control)**。 □

定义 6.2.2 称系统(6.1)是**可动态输出反馈线性化的(dynamic output feedback linearizable)**，当存在一个滤波输出反馈变换

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \Lambda\xi + \delta(y), \qquad \xi(0) = \xi_0, \xi \in \mathbb{R}^s \\ u &= k(y, \xi) + \beta(y)v \\ z &= T(x, \xi(t)), \qquad z \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{6.24}$$

使得在 z 坐标系下的动态是线性的

$$\begin{aligned} \dot{z} &= A_c z + ay + bv \\ y &= c_c z \end{aligned} \tag{6.25}$$

其中

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad c_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

且a和b是$n \times 1$的定常向量。 □

定义 6.2.3 Hurwitz向量(Hurwitz Vector) 称$\mathbb{R}^n$中的一个向量$d = [0, \cdots, 0, d_\rho, \cdots, d_n]$是Hurwitz的，当多项式($\rho \geqslant 1$)

$$d_\rho s^{n-\rho} + \cdots + d_{n-1}s + d_n$$

是Hurwitz的，即多项式的所有零点均具有负实部。 □

引理 6.2.1 考虑系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_c x + \gamma(y,u) + \psi(y,u) \\ y &= c_c x \end{aligned} \tag{6.26}$$

其中

$$\psi = \begin{bmatrix} 0_{(\rho-1)\times 1} \\ \bar{\psi}_{(n-\rho+1)\times 1} \end{bmatrix} \tag{6.27}$$

即$\psi_j(y,u) = 0, \forall y, u \in \mathbb{R}, 1 \leqslant j \leqslant \rho - 1 < n$。滤波变换

$$\begin{aligned} z_j &= x_j, \qquad 1 \leqslant j \leqslant \rho \\ z_j &= x_j - \xi_j, \qquad \rho + 1 \leqslant j \leqslant n \end{aligned} \tag{6.28}$$

其中$\xi(t) = [\xi_{\rho+1}, \cdots, \xi_n]^{\mathrm{T}}$满足

$$\dot{\xi} = \begin{bmatrix} -\dfrac{d_{\rho+1}}{d_\rho} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\dfrac{d_{n-1}}{d_\rho} & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\dfrac{d_n}{d_\rho} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \xi + \begin{bmatrix} -\dfrac{d_{\rho+1}}{d_\rho} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\dfrac{d_{n-1}}{d_\rho} & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ -\dfrac{d_n}{d_\rho} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \bar{\psi} \tag{6.29}$$

将式(6.26)变换为

$$\begin{aligned} \dot{z} &= A_c z + \gamma(y,u) + d\beta(y,u,\xi) \\ y &= c_c z \end{aligned} \tag{6.30}$$

其中$d = [0, \cdots, 0, d_\rho, \cdots, d_n]^{\mathrm{T}}$是一个Hurwitz向量，且

$$\beta(y,u,\xi) = \frac{1}{d_\rho}(\psi_\rho(y,u) + \xi_{\rho+1}) \tag{6.31}$$

□

证明: 求式(6.28)对时间的微分，并考虑式(6.26)和式(6.27)，则有

$$\begin{aligned}
\dot{z}_j &= x_{j+1}+\gamma_j(y,u)=z_{j+1}+\gamma_j(y,u), \quad 1\leqslant j\leqslant \rho-1\\
\dot{z}_\rho &= x_{\rho+1}+\gamma_\rho(y,u)+\psi_\rho(y,u)=z_{\rho+1}+\gamma_\rho(y,u)+(\xi_{\rho+1}+\psi_\rho(y,u))\\
\dot{z}_j &= x_{j+1}+\gamma_j(y,u)-\xi_{j+1}+\frac{d_j}{d_\rho}(\xi_{\rho+1}+\psi_\rho(y,u))\\
&= z_{j+1}+\gamma_j(y,u)+\frac{d_j}{d_\rho}(\xi_{\rho+1}+\psi_\rho(y,u)), \quad \rho+1\leqslant j\leqslant n-1\\
\dot{z}_n &= \gamma_n(y,u)+\frac{d_n}{d_\rho}(\xi_{\rho+1}+\psi_\rho(y,u))\\
y &= z_1
\end{aligned}$$

上式可重写为

$$\begin{aligned}
\dot{z} &= A_c z+\gamma(y,u)+d\,\frac{\xi_{\rho+1}+\psi_\rho(y,u)}{d_\rho}\\
y &= c_c z
\end{aligned}$$

其中 $d=[0,\cdots,0,d_\rho,\cdots,d_n]^{\mathrm{T}}$，$\beta(y,u,\xi)=[\xi_{\rho+1}+\psi_\rho(y,u)]/d_\rho$。 □

定理 6.2.1 动态输出反馈线性化(Dynamic Output Feedback Linearization) 设系统(6.1)具有相对阶ρ。若在$\mathbb{R}^n$中有下列条件成立:

(i) $\operatorname{rank}\{d(L_f^j h):0\leqslant j\leqslant n-1\}=n$,

(ii) $[ad_f^i r, ad_f^j r]=0,\quad 0\leqslant i,j\leqslant n-1$,

(iii) $[g, ad_f^k r]=0,\quad 0\leqslant k\leqslant n-2$,

(iv) 存在一个光滑函数$\sigma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$以及$n-\rho+1$个实数$(d_\rho,\cdots,d_n)$，使得

$$g=\sigma\circ h\sum_{j=1}^{n-\rho+1} d_{n-j+1}ad_{(-f)}^{j-1}r$$

其中 $d_\rho s^{n-\rho}+\cdots+d_{n-1}s+d_n$ 是一个Hurwitz多项式,

(v) 向量场 $ad_f^i r, 0\leqslant i\leqslant n-1$ 是完备的,

(vi) 当 $\rho\geqslant 2$ 时，$L^2_{ad_f^{n-1}r}L_f^j h(x)=0,\quad 1\leqslant j\leqslant \rho-1$,

其中r是满足式(6.6)的向量场，则系统(6.1)是可动态输出反馈线性化的。 □

证明: 由定理6.1.1的证明过程可知，条件(i)~条件(v)意味着存在一个全局微分同胚$\zeta=T(x), T(0)=0$，可将系统(6.1)变换为

$$\begin{aligned}
\dot{\zeta} &= A_c\zeta+d\sigma(y)u+\psi(y)\\
y &= c_c\zeta
\end{aligned}\tag{6.32}$$

其中 $d=[0,\cdots,0,d_\rho,\cdots,d_n]^{\mathrm{T}}$ 是一个Hurwitz向量。在ζ坐标系下，有 $ad_{(-f)}^i r=\partial/\partial\zeta_{n-i}, 0\leqslant i\leqslant n-1$。若$\rho=1$，即$d_1\neq 0$，则引理6.2.1适用，其中$\gamma(y,u)=d\sigma(y)u, \psi(y,u)=\psi(y)$，且保证存在一个滤波变换，将系统(6.32)变为

$$\dot{z} = A_c z+d[\sigma(y)u+\beta(y,\xi)]$$

$$y = c_c z$$

由于$\sigma(y) \neq 0$，定义

$$u = \sigma(y)^{-1}[-\beta(y,\xi) + v]$$

可得

$$\begin{aligned} \dot{z} &= A_c z + dv \\ y &= c_c z \end{aligned}$$

从而当$\rho = 1$且式(6.25)中$a = 0$时，定理得证。若$\rho \geqslant 2$，则定理6.1.1可保证存在一个全局微分同胚$\zeta = T(x), T(0) = 0$，将系统(6.1)变换为

$$\begin{aligned} \dot{\zeta} &= A_c\zeta + d\sigma(y)u + \psi(y) \\ y &= c_c\zeta \end{aligned} \tag{6.33}$$

其中$d = [0, \cdots, 0, d_\rho, \cdots, d_n]^{\mathrm{T}}$。特别地

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_i &= \zeta_{i+1} + \psi_i(y), \qquad 1 \leqslant i \leqslant \rho - 1 \\ y &= \zeta_1 \end{aligned}$$

命题 条件(vi)意味着

$$\psi_i(y) = a_i y, \qquad 1 \leqslant i \leqslant \rho - 1 \tag{6.34}$$

命题的证明: 在ζ坐标系下，有$ad^i_{(-f)}r = \partial/\partial\zeta_{n-i}, 0 \leqslant i \leqslant n-1$，特别地，$ad^{n-1}_{(-f)}r = \partial/\partial\zeta_1$。由于

$$L_f h = \zeta_2 + \psi_1(y)$$

条件(iv)对于$j = 1$意味着$\psi_1(y) = a_1 y$，即对于$i = 1$式(6.34)成立。使用归纳法，假设式(6.34)对于$1 \leqslant i \leqslant j \leqslant \rho - 1$成立，由条件(iv)可知$\psi_{j+1}(y) = a_{j+1}y$成立，命题得证。

因此，式(6.33)变为

$$\begin{aligned} \dot{\zeta} &= A_c\zeta + d\sigma(y)u + ay + \psi(y) \\ y &= c_c\zeta \end{aligned} \tag{6.35}$$

其中$a = [a_1, \cdots, a_{\rho-1}, 0, \cdots, 0]^{\mathrm{T}}$，且$\psi(y) = [0, \cdots, 0, \psi_\rho(y), \cdots, \psi_n(y)]^{\mathrm{T}}$。取

$$\gamma(y, u) = d\sigma(y)u + ay$$

引理6.2.1适用，并可保证存在一个滤波变换，将系统(6.35)变为

$$\begin{aligned} \dot{z} &= A_c z + ay + d(\sigma(y)u + \beta(y,\xi)) \\ y &= c_c z \end{aligned}$$

由于$\sigma(y) \neq 0$，定义

$$u = \sigma^{-1}(y)[-\beta(y,\xi) + v]$$

最终可得

$$\begin{aligned}\dot{z} &= A_c z + ay + dv \\ y &= c_c z\end{aligned}$$

□

评注 6.2.1 由于根据定理 6.2.1 的假设 (iv)，向量 d 是 Hurwitz 的，线性化后的系统 (6.25) 在 $b = d$ 时是最小相位且可观的，因此镇定和跟踪问题可解。定义控制 v 为

$$v = k_c \hat{z} \tag{6.36}$$

选择矩阵 k_c，使得 $(A_c + bk_c + ac_c)$ 是一个 Hurwitz 矩阵。因为闭环系统是可观且最小相位的，从而也是可镇定的，故存在满足要求的 k_c。式 (6.36) 中出现的估计 $\hat{z}$ 由线性观测器

$$\dot{\hat{z}} = A_c\hat{z} + ay + bv - k_o(y - c_c\hat{z}) \tag{6.37}$$

给出，其中 k_o 使得 $(A_c + k_o c_c)$ 是一个 Hurwitz 矩阵。由式 (6.25)，式 (6.36) 和式 (6.37) 以及滤波方程，可得增广动态($\tilde{z} = z - \hat{z}$)

$$\begin{aligned}\dot{z} &= (A_c + bk_c + ac_c)z - bk_c\tilde{z} \\ \dot{\tilde{z}} &= (A_c + k_o c_c)\tilde{z} \\ \dot{\xi} &= \Lambda\xi + \delta(y) \\ y &= c_c z\end{aligned} \tag{6.38}$$

由于假设 $f(x)$ 是光滑的且 $f(0) = 0$，故式 (6.38) 中的 $\delta(y)$ 是光滑的，且 $\delta(0) = 0$(见引理 6.2.1)。利用定理 B.1.7，式 (6.38) 中前两个线性方程的平衡点 $(z, \tilde{z}) = 0$ 是全局指数稳定的，这说明整个系统 (6.38) 的平衡点 $(z, \tilde{z}, \xi) = 0$ 是稳定的。利用拉普拉斯变换的性质很容易证明：如果 $y(t)$ 是有界的且 $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$，则 $\lim_{t\to\infty} \|\xi(t)\| = 0$，这意味着 $(z, \tilde{z}, \xi) = 0$ 的吸引性。因此，原点 $(z, \tilde{z}, \xi) = 0$ 是式 (6.38) 的一个全局渐近稳定平衡点，由于滤波变换和微分同胚 $\zeta = T(x)$ 是全局有定义的且保持原点不变，从而对系统 (6.1) 有 $\lim_{t\to\infty} \|x(t)\| = 0$。

为将输出反馈镇定控制器推广到跟踪问题，我们引入参考模型

$$\begin{aligned}\dot{z}_r &= (A_c + ac_c + bk_c)z_r + bv_r, \quad z_r \in \mathbb{R}^n, v_r \in \mathbb{R} \\ y_r &= c_c z_r\end{aligned} \tag{6.39}$$

其中 $v_r(t)$ 是有界的输入，它保证期望的参考输出 $y_r(t)$。控制律变为

$$v = k_c\hat{z} + v_r$$

增广动态($e = z - z_r$)为

$$\begin{aligned}\dot{e} &= (A_c + bk_c + ac_c)e - bk_c\tilde{z} \\ \dot{\tilde{z}} &= (A_c + k_o c_c)\tilde{z} \\ \dot{\xi} &= \Lambda\xi + \delta(y)\end{aligned} \tag{6.40}$$

由定理 B.1.7 可知，$(e, \tilde{z}) = 0$ 是式 (6.40) 中前两个方程的一个全局指数稳定平衡点，这说明 $y(t) - y_r(t) = c_c e(t)$ 是有界的，且 $\lim_{t\to\infty}[y(t) - y_r(t)] = 0$。由于 $\delta(y)$ 是有界的，由式 (6.40) 可得 $\xi(t)$，相应地，$x(t)$ 对于所有的 $t \geqslant 0$ 是有界的。 □

例 6.2.1 考虑系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + x_1^2 + u(1+x_1^2)\\ \dot{x}_2 &= x_1^2 - 2x_1^3 - 2x_1x_2 + (1+x_1^2)(1-2x_1)u\\ y &= x_1\end{aligned}$$

记

$$\begin{aligned}f &= (x_2+x_1^2)\frac{\partial}{\partial x_1} + (x_1^2 - 2x_1^3 - 2x_1x_2)\frac{\partial}{\partial x_2}\\ g &= (1+x_1^2)\frac{\partial}{\partial x_1} + (1+x_1^2)(1-2x_1)\frac{\partial}{\partial x_2}\\ h &= x_1\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}dh &= dx_1\\ d(L_fh) &= 2x_1dx_1 + dx_2\end{aligned}$$

定理6.2.1的条件(i)成立。当$r=\partial/\partial x_2, \sigma = 1+x_1^2, d=[1,1]^{\mathrm{T}}$时，条件(ii)~条件(v)亦成立，而当$\rho=1$时不需要验证条件(vi)。全局坐标变换

$$\begin{aligned}\zeta_1 &= x_1\\ \zeta_2 &= x_2 + x_1^2\end{aligned}$$

将系统变为

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}_1 &= \zeta_2 + (1+\zeta_1^2)u\\ \dot{\zeta}_2 &= \zeta_1^2 + (1+\zeta_1^2)u\\ y &= \zeta_1\end{aligned}$$

而滤波输出反馈变换

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_2 &= -\xi_2 + y^2\\ z_1 &= \zeta_1\\ z_2 &= \zeta_2 - \xi_2\\ u &= -\frac{\xi_2}{1+y^2} + \frac{1}{1+y^2}v\end{aligned}$$

则将系统变为

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2 + v\\ \dot{z}_2 &= v\\ y &= z_1\end{aligned}$$

□

6.3 输出反馈镇定

本节讨论输出反馈镇定问题，即如下定义的输出反馈镇定控制的设计问题。

定义 6.3.1 对于系统(6.1)，全局**输出反馈镇定控制**(output feedback stabilizing control)是一个有限维系统

$$
\begin{aligned}
\dot{w} &= \mu(w, y(t)), \quad \mu(0,0) = 0, w(0) = w_0, w \in \mathbb{R}^r \\
u &= u(w, y(t)), \quad u(0,0) = 0, u \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

使得 $(x = 0, w = 0)$ 是闭环系统的一个全局渐近稳定平衡点。 □

下面的定理说明对于一类非线性系统如何求解输出反馈镇定问题。

定理 6.3.1 输出反馈镇定(Output Feedback Stabilization) 令系统(6.1)的相对阶为 ρ。若在 $\mathbb{R}^n$ 中下列条件成立：

(i) $\operatorname{rank}\{d(L_f^j h): 0 \leqslant j \leqslant n-1\} = n$,

(ii) $[ad_f^i r, ad_f^j r] = 0, \quad 0 \leqslant i, j \leqslant n-1$,

(iii) $[g, ad_f^k r] = 0, \quad 0 \leqslant k \leqslant n-2$,

(iv) 存在一个光滑函数 $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 和 $n - \rho + 1$ 个实数 $(d_\rho, \cdots, d_n)$，使得

$$
g = \sigma \circ h \sum_{j=1}^{n-\rho+1} d_{n-j+1} ad_{(-f)}^{j-1} r
$$

其中 $d_\rho s^{n-\rho} + \cdots + d_{n-1}s + d_n$ 是一个Hurwitz多项式，

(v) 向量场 $ad_f^i r, 0 \leqslant i \leqslant n-1$ 是完备的，

其中 r 是满足式(6.6)的向量场，则对于系统(6.1)，存在一个 $\rho - 1$ 阶全局输出反馈镇定控制。 □

评注 6.3.1 对于系统(6.1)，在定理6.2.1和定理6.3.1的情形下，条件(i)～条件(v)是完全相同的，但由于定理6.3.1并不要求定理6.2.1的条件(iv)，因此当 $\rho \geqslant 2$ 时定理6.3.1适用于更一般的系统。 □

评注 6.3.2 满足定理6.3.1的条件(i)～条件(v)的形如(6.1)的系统是最小相位的、具有满足有界输入–有界状态性质的跟踪动态，且由状态反馈可同时全局输入–输出线性化和部分状态反馈线性化为三角型系统。因此，如果反馈所需的状态可量测，则镇定问题和跟踪问题全局可解。这些性质很容易验证。条件(i)～条件(v)保证系统可全局变换为

$$
\begin{aligned}
\dot{\zeta} &= A_c\zeta + d\sigma(y)u + \psi(y) \\
y &= c_c\zeta
\end{aligned}
$$

其中由于 $f(0) = 0$，有 $\psi(0) = 0$。并且由于

$$
\begin{aligned}
\mathcal{G}_0 &= \operatorname{span}\{d\} \\
\mathcal{G}_1 &= \operatorname{span}\{d, A_c d\} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

$$\mathcal{G}_{\rho-1} = \text{span}\{d, \cdots, A_c^{\rho-1}d\}$$

在 $\mathbb{R}^n$ 中分布 $\mathcal{G}_i$, $0 \leqslant i \leqslant \rho-1$ 是对合的，且具有定常秩 $i+1$，所以定理 2.4.3 适用，它保证存在一个坐标变换

$$\begin{aligned} z_1 &= \zeta_1, \quad \cdots, \quad z_i = \zeta_i + \mu_i(\zeta_1, \cdots, \zeta_{i-1}), \quad 2 \leqslant i \leqslant \rho \\ \eta_1 &= t_1\zeta, \quad \cdots, \quad \eta_{n-\rho} = t_{n-\rho}\zeta \end{aligned} \tag{6.41}$$

使得

$$t_j A_c^i d = 0, \qquad 0 \leqslant i \leqslant \rho-1, 1 \leqslant j \leqslant n-\rho$$

同时存在一个状态反馈控制

$$u = \frac{1}{d_\rho \sigma(y)}(k(\zeta) + v)$$

使得在 (z, η) 坐标系下闭环系统变为

$$\begin{aligned} y &= z_1 \\ \dot{z}_i &= z_{i+1}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant \rho-1 \\ \dot{z}_\rho &= v \\ \dot{\eta} &= \Gamma\eta + \beta y + \bar{\psi}(y) \end{aligned} \tag{6.42}$$

其中 $\bar{\psi}(0) = 0$，且

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -d_{\rho+1}/d_\rho & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ -d_{n-1}/d_\rho & 0 & \cdots & 1 \\ -d_n/d_\rho & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

注意坐标变换 (6.41) 是全局的。由于 d 是一个 Hurwitz 向量，系统的零动态

$$\dot{\eta} = \Gamma\eta$$

是渐近稳定的，而系统的跟踪动态

$$\dot{\eta} = \Gamma\eta + \beta y_r + \bar{\psi}(y_r)$$

具有对于任意有界 $y_r(t)$ 相应的 $\eta(t)$ 亦有界的性质。根据定理 4.2.3，跟踪问题由状态反馈全局可解。 □

定理 6.3.1 的证明: 由于条件(i)~条件(v)成立，定理 6.1.1 的论据同样适用，且保证系统 (6.1) 可全局变换为

$$\begin{aligned} \dot{\zeta} &= A_c\zeta + d\sigma(y)u + \psi(y) \\ y &= c_c\zeta \end{aligned} \tag{6.43}$$

根据假设条件 (iv)，d 是一个 Hurwitz 向量。首先考虑 $\rho = 1$ 的情形，不失一般性，假设 $d_1 = 1$。由于假设 $f(x)$ 是光滑的，且 $f(0) = 0$，所以式 (6.43) 中的 $\psi(y)$ 也是光滑的，且 $\psi(0) = 0$，因此可得

$$\psi(y) = y\phi(y) \tag{6.44}$$

其中 $\phi(y)$ 是一个光滑函数。利用式 (6.44)，系统 (6.43) 变为

$$
\begin{aligned}
\dot{\zeta} &= A_c\zeta + d\sigma(y)u + y\phi(y) \\
y &= c_c\zeta
\end{aligned} \tag{6.45}
$$

实施线性坐标变换 $\zeta \to (\eta_1, \cdots, \eta_{n-1}, y) \triangleq (\eta, y)$

$$
\begin{aligned}
\eta_1 &= \zeta_2 - d_2\zeta_1 \\
&\vdots \\
\eta_{n-1} &= \zeta_n - d_n\zeta_1 \\
y &= \zeta_1
\end{aligned} \tag{6.46}
$$

则在新的坐标系下有

$$
\begin{aligned}
\dot{\eta} &= \begin{bmatrix} -d_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -d_3 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -d_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -d_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}\eta + y\begin{bmatrix} d_3 - d_2^2 \\ d_4 - d_3d_2 \\ \vdots \\ d_n - d_{n-1}d_2 \\ -d_nd_2 \end{bmatrix} \\
&\quad + y\begin{bmatrix} \phi_2 - d_2\phi_1 \\ \phi_3 - d_3\phi_1 \\ \vdots \\ \phi_{n-1} - d_{n-1}\phi_1 \\ \phi_n - d_n\phi_1 \end{bmatrix} \triangleq \Gamma\eta + y\beta + y\gamma(y) \\
\dot{y} &= \eta_1 + d_2y + y\phi_1(y) + \sigma(y)u
\end{aligned} \tag{6.47}
$$

其中 ϕ_i 表示向量 ϕ 的第 i 个分量。由于 $\rho = 1$，定义 u (回想由于 $g(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$，因此有 $\sigma(y) \neq 0, \forall y \in \mathbb{R}^n$)为

$$
u = -\sigma^{-1}(y)y[\phi_1(y) + d_2 + k + \gamma^{\mathrm{T}}(y)P^2\gamma(y) + \beta^{\mathrm{T}}P^2\beta] \tag{6.48}
$$

其中 k 是一个正实数，P 是下面 Lyapunov 方程(由于 d 是 Hurwitz 的，因此 Γ 是一个 Hurwitz 矩阵) 的正定对称解

$$
\Gamma^{\mathrm{T}}P + P\Gamma = -3I \tag{6.49}
$$

则系统 (6.47) 变为

$$
\begin{aligned}
\dot{\eta} &= \Gamma\eta + y\beta + y\gamma(y) \\
\dot{y} &= \eta_1 - ky - y\gamma^{\mathrm{T}}(y)P^2\gamma(y) - y\beta^{\mathrm{T}}P^2\beta
\end{aligned} \tag{6.50}
$$

考虑 Lyapunov 函数

$$
V(y, \eta) = \eta^{\mathrm{T}}P\eta + \frac{1}{2}y^2 \tag{6.51}
$$

其对时间的导数为

$$
\begin{aligned}
\dot{V} &= y\eta_1 - ky^2 - y^2[\gamma^{\mathrm{T}}(y)P^2\gamma(y) + \beta^{\mathrm{T}}P^2\beta] - 3\eta^{\mathrm{T}}\eta \\
&\quad + 2\eta^{\mathrm{T}}P\beta y + 2\eta^{\mathrm{T}}P\gamma(y)y \\
&= -\eta^{\mathrm{T}}\eta - ky^2 - (\eta - P\gamma(y)y)^{\mathrm{T}}(\eta - P\gamma(y)y) - (\eta - P\beta y)^{\mathrm{T}}(\eta - P\beta y)
\end{aligned}
$$

$$\leqslant \quad -ky^2 - \eta^{\mathrm{T}}\eta \tag{6.52}$$

按照定理B.1.6，式(6.51)和式(6.52)说明平衡点 $(y, \eta) = 0$ 的全局指数稳定性。由于微分同胚 $\zeta = T(x)$ 和式(6.46)是全局有定义的且保持原点不变，所以控制(6.48)是系统(6.1)的一个全局静态输出反馈镇定控制，从而定理 $\rho = 1$ 的情形证毕。

现在考虑 $\rho \geqslant 2$ 的情形。按照假设(iv)，向量 d 是 Hurwitz 的且 $d_\rho \neq 0$(不失一般性，假设 $d_\rho = 1$)。引入 $(\rho - 1)$ 阶滤波器($\lambda_i > 0, 1 \leqslant i \leqslant \rho - 1$)

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \\ \vdots \\ \dot{\xi}_{\rho-1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\lambda_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda_{\rho-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_{\rho-1} \end{bmatrix} \\
&\quad + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \sigma(y) u \\
&\triangleq \Lambda\xi + b_{\mathrm{f}}\sigma(y)u, \quad \xi(0) = \xi_0
\end{aligned} \tag{6.53}$$

并定义向量 $d[i] \in \mathbb{R}^n, 1 \leqslant i \leqslant \rho$，

$$\begin{aligned}
d[\rho] &= \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & d_{\rho+1} & \cdots & d_n \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = d \\
d[i-1] &= A_{\mathrm{c}}d[i] + \lambda_{i-1}d[i], \qquad \rho \geqslant i \geqslant 2
\end{aligned} \tag{6.54}$$

从而由向量的构造可知向量 $d[1] = [d_1[1], \cdots, d_n[1]]^{\mathrm{T}}$ 满足

$$\begin{aligned}
& d_1[1]s^{n-1} + d_2[1]s^{n-2} + \cdots + d_{n-1}[1]s + d_n[1] \\
&= (d_\rho[\rho]s^{n-\rho} + \cdots + d_{n-1}[\rho]s + d_n[\rho]) \prod_{i=1}^{\rho-1}(s + \lambda_i)
\end{aligned} \tag{6.55}$$

由于所有 λ_i 是正数，并且 $d_\rho[\rho] = d_\rho = 1$，因此 $d[1]$ 是一个 Hurwitz 向量且 $d_1[1] = 1$。考虑滤波变换

$$z = \zeta - \sum_{i=2}^{\rho} d[i]\xi_{i-1} \tag{6.56}$$

将式(6.56)对时间求导，并考虑式(6.43)、式(6.53)和式(6.54)，得

$$\begin{aligned}
\dot{z} &= A_{\mathrm{c}}\zeta + d[\rho]\sigma(y)u + \psi(y) - \sum_{i=2}^{\rho-1} d[i](\xi_i - \lambda_{i-1}\xi_{i-1}) \\
&\quad + d[\rho]\lambda_{\rho-1}\xi_{\rho-1} - d[\rho]\sigma(y)u \\
&= A_{\mathrm{c}}z + \psi(y) + \sum_{i=2}^{\rho}(A_{\mathrm{c}}d[i] + \lambda_{i-1}d[i])\xi_{i-1} - \sum_{i=2}^{\rho-1} d[i]\xi_i \\
&= A_{\mathrm{c}}z + d[1]\xi_1 + \psi(y) \\
y &= c_{\mathrm{c}}\zeta = c_{\mathrm{c}}z
\end{aligned} \tag{6.57}$$

利用式(6.44)，将式(6.57)中的第一个方程重写为

$$\dot{z} = A_{\mathrm{c}}z + d[1]\xi_1 + y\phi(y) \tag{6.58}$$

与 $\rho=1$ 时的情形一样，实施坐标变换

$$\begin{aligned}\eta_1 &= z_2-d_2[1]z_1\\ &\vdots\\ \eta_{n-1} &= z_n-d_n[1]z_1\\ y &= z_1\end{aligned}\tag{6.59}$$

在新的坐标系下有

$$\begin{aligned}\dot\eta &= \Gamma\eta+\beta y+\gamma(y)y\\ \dot y &= \eta_1+d_2[1]y+\phi_1(y)y+\xi_1\end{aligned}\tag{6.60}$$

其中 Γ,β 和 γ 见式 (6.47)，只是 d 由 $d[1]$ 代替。考虑由式 (6.60) 和式 (6.53) 的第一个方程

$$\dot\xi_1=-\lambda_1\xi_1+\xi_2\tag{6.61}$$

构成的增广系统，称其为 (S_1)，对其实施坐标变换

$$\tilde\xi_1=\xi_1-\xi_1^*\tag{6.62}$$

其中

$$\xi_1^*=-y(\phi_1(y)+d_2[1]+k+\gamma^{\mathrm T}(y)P^2\gamma(y)+\beta^{\mathrm T}P^2\beta)\triangleq\xi_1^*(y)\tag{6.63}$$

其中 $k>0$ 且 P 满足式 (6.49)。则系统 (6.60) 和系统 (6.61) 变为

$$\begin{aligned}\dot\eta &= \Gamma\eta+\beta y+\gamma(y)y\\ \dot y &= \eta_1-ky-(\gamma^{\mathrm T}(y)P^2\gamma(y)+\beta^{\mathrm T}P^2\beta)y+\tilde\xi_1\\ \dot{\tilde\xi}_1 &= -\lambda_1\tilde\xi_1-\dot\xi_1^*-\lambda_1\xi_1^*+\xi_2\end{aligned}\tag{6.64}$$

考虑函数

$$V_1=\frac12y^2+\eta^{\mathrm T}P\eta+\frac12\tilde\xi_1^2\tag{6.65}$$

现在，确定一个函数 $\xi_2^*(y,\xi_1)$，使得当式 (6.64) 中 $\xi_2=\xi_2^*(y,\xi_1)$ 时 $\dot V_1$ 是负定的。回顾式 (6.52)，V_1 对时间的导数满足不等式

$$\dot V_1\leqslant -ky^2-\eta^{\mathrm T}\eta+y\tilde\xi_1-\lambda_1\tilde\xi_1^2+\tilde\xi_1(\xi_2-\dot\xi_1^*-\lambda_1\xi_1^*)\tag{6.66}$$

由式 (6.63) 可得

$$\dot\xi_1^*=\frac{\partial\xi_1^*}{\partial y}(\eta_1+d_2[1]y+\phi_1(y)y+\xi_1)\tag{6.67}$$

定义

$$\xi_2^*=\lambda_1\xi_1^*+\frac{\partial\xi_1^*}{\partial y}(d_2[1]y+\phi_1(y)y+\xi_1)-\tilde\xi_1\left(\frac{\partial\xi_1^*}{\partial y}\right)^2\tag{6.68}$$

从而由式 (6.66) 和式 (6.68)，且令 $\xi_2=\xi_2^*$，可得

$$\begin{aligned}\dot V_1 &\leqslant -ky^2-\eta^{\mathrm T}\eta-\lambda\tilde\xi_1^2-\tilde\xi_1\frac{\partial\xi_1^*}{\partial y}\eta_1-\tilde\xi_1^2\left(\frac{\partial\xi_1^*}{\partial y}\right)^2\\ &\leqslant -ky^2-\frac34\eta^{\mathrm T}\eta-\lambda\tilde\xi_1^2-\left(\frac12\eta_1+\tilde\xi_1\frac{\partial\xi_1^*}{\partial y}\right)^2\\ &\leqslant -ky^2-\frac34\eta^{\mathrm T}\eta-\lambda\tilde\xi_1^2\end{aligned}\tag{6.69}$$

如果 $\rho=2$，则一阶输出镇定控制为

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= -\lambda_1\xi_1+\sigma(y)u \\ u &= \sigma^{-1}(y)\xi_2^*(y,\xi_1)\end{aligned}$$

如果 $\rho\geqslant 2$，则使用归纳法可证得。

命题 假设对于给定的下标 $i<\rho-1$，对于由式 (6.60) 和

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= -\lambda_1\xi_1+\xi_2 \\ &\vdots \\ \dot{\xi}_i &= -\lambda_i\xi_i+\xi_{i+1}\end{aligned} \tag{6.70}$$

构成的增广系统 (S_i)，存在 $i+1$ 个函数

$$\xi_1^*(y),\xi_2^*(y,\xi_1),\cdots,\xi_{i+1}^*(y,\xi_1,\cdots,\xi_i),\ \xi_j(0,\cdots,0)=0,\quad 1\leqslant j\leqslant i+1 \tag{6.71}$$

和一个坐标变换

$$(y,\eta,\xi_1,\cdots,\xi_i)\to(y,\eta,\tilde{\xi}_1,\cdots,\tilde{\xi}_i)=(y,\eta,\xi_1-\xi_1^*,\cdots,\xi_i-\xi_i^*) \tag{6.72}$$

使得函数

$$V_i=\eta^{\mathrm{T}}P\eta+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{i}\tilde{\xi}_j^2 \tag{6.73}$$

对时间的导数(当 (S_i) 中 $\xi_{i+1}=\xi_{i+1}^*$ 时)满足不等式

$$\dot{V}_i\leqslant -k_1y^2-k_2\eta^{\mathrm{T}}\eta-\sum_{j=1}^{i}\lambda_j\tilde{\xi}_j^2 \tag{6.74}$$

其中 k_1 和 k_2 是正实数，则对于由式 (6.60) 以及

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= -\lambda_1\xi_1+\xi_2 \\ &\vdots \\ \dot{\xi}_{i+1} &= -\lambda_{i+1}\xi_{i+1}+\xi_{i+2}\end{aligned} \tag{6.75}$$

构成的增广系统 (S_{i+1})，存在一个函数

$$\xi_{i+2}^*=\xi_{i+2}^*(y,\xi_1,\cdots,\xi_{i+1})$$

和坐标变换

$$(y,\eta,\xi_1,\cdots,\xi_{i+1})\to(y,\eta,\tilde{\xi}_1,\cdots,\tilde{\xi}_{i+1})=(y,\eta,\xi_1-\xi_1^*,\cdots,\xi_{i+1}-\xi_{i+1}^*) \tag{6.76}$$

使得函数

$$V_{i+1}=\eta^{\mathrm{T}}P\eta+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{i+1}\tilde{\xi}_j^2 \tag{6.77}$$

对时间的导数(当 (S_{i+1}) 中 $\xi_{i+2}=\xi_{i+2}^*$ 时)满足不等式

$$\dot{V}_{i+1}\leqslant -k_1y^2-\frac{3}{4}k_2\eta^{\mathrm{T}}\eta-\sum_{j=1}^{i+1}\lambda_j\tilde{\xi}_j^2 \tag{6.78}$$

命题的证明: 考虑对增广系统(S_{i+1})。对其实施坐标变换(6.76)。由式(6.74)可知，式(6.77)给出的函数V_{i+1}对时间的导数满足

$$\dot{V}_{i+1} \leqslant -k_1 y^2 - k_2 \eta^{\mathrm{T}} \eta - \sum_{j=1}^{i} \lambda_j \tilde{\xi}_j^2 + \tilde{\xi}_i \tilde{\xi}_{i+1} + \tilde{\xi}_{i+1} \dot{\tilde{\xi}}_{i+1} \tag{6.79}$$

回顾式(6.60)给出的$\dot{y}$表达式，由于

$$\dot{\tilde{\xi}}_{i+1} = -\lambda_{i+1}\tilde{\xi}_{i+1} - \lambda_{i+1}\xi_{i+1}^* - \sum_{j=1}^{i} \frac{\partial \xi_{i+1}^*}{\partial \xi_j}\dot{\xi}_j - \frac{\partial \xi_{i+1}^*}{\partial y}\dot{y} + \xi_{i+2}$$

定义

$$\begin{aligned} \xi_{i+2}^* \quad = \quad & -\tilde{\xi}_i + \lambda_{i+1}\xi_{i+1}^* + \sum_{j=1}^{i} \frac{\partial \xi_{i+1}^*}{\partial \xi_j}\dot{\xi}_j \\ & + \frac{\partial \xi_{i+1}^*}{\partial y}(d_2[1]y + \phi_1(y)y + \xi_1) - \frac{1}{k_2}\tilde{\xi}_{i+1}\left(\frac{\partial \xi_{i+1}^*}{\partial y}\right)^2 \end{aligned}$$

得(其中$\xi_{i+2} = \xi_{i+2}^*$)

$$\dot{V}_{i+1} \leqslant -k_1 y^2 - \frac{3}{4}k_2 \eta^{\mathrm{T}}\eta - \sum_{j=1}^{i+1} \lambda_j \tilde{\xi}_j^2 - \left(\frac{\sqrt{k_2}}{2}\eta_1 + \frac{1}{\sqrt{k_2}}\tilde{\xi}_{i+1}\frac{\partial \xi_{i+1}^*}{\partial y}\right)^2$$

命题得证。

如上所示，系统(S_1)满足命题的假设。应用命题$\rho - 2$次，迭代地建立一个函数$\xi_\rho^*(y, \xi_1, \cdots, \xi_{\rho-1})$，从而可定义由滤波器(6.53)驱动的动态控制

$$u = \sigma^{-1}(y)\xi_\rho^*(y, \xi_1, \cdots, \xi_{\rho-1}) \tag{6.80}$$

在坐标系$(y, \eta, \tilde{\xi}_1, \cdots, \tilde{\xi}_{\rho-1})$(回想$\tilde{\xi}_i = \xi_i - \xi_i^*(y, \xi_1, \cdots, \xi_{i-1})$)下，径向无界函数

$$V_{\rho-1} = \eta^{\mathrm{T}} P \eta + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\rho-1} \tilde{\xi}_j^2$$

对于闭环系统是一个 Lyapunov 函数，且

$$\dot{V}_{\rho-1} \leqslant -ky^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^{\rho-1} \eta^{\mathrm{T}}\eta - \sum_{j=1}^{\rho-1} \lambda_j \tilde{\xi}_j^2$$

根据定理B.1.6，这证明了$(y, \eta, \xi) = 0$是系统(6.53)和系统(6.60)的一个全局指数稳定平衡点，相应地$(x, \xi) = 0$是系统(6.1)和系统(6.53)的一个全局渐近稳定平衡点。 □

评注 6.3.3 现在，我们简单地给出定理6.3.1的另一个证明途径，它提供了一个不同的输出反馈控制算法，其设计基于降阶观测器。若$\rho = 1$，在式(6.47)中令$(\hat{\eta} \in \mathbb{R}^{n-1})$

$$\begin{aligned} u \quad &= \quad -\sigma^{-1}(y)y[d_2 + \phi_1(y) + k] - \sigma^{-1}(y)\hat{\eta}^{\mathrm{T}} 2P(\gamma(y) + \beta) \\ \dot{\hat{\eta}} \quad &= \quad \Gamma\hat{\eta} + y\beta + y\gamma(y) + y(\gamma(y) + \beta) \end{aligned} \tag{6.81}$$

其中$k > 0$，P是 Lyapunov 方程

$$\Gamma^{\mathrm{T}} P + P\Gamma = -I \tag{6.82}$$

的正定对称解(回顾前述内容，由 d 是 Hurwitz 向量可知矩阵 Γ 是 Hurwitz 的)。该控制算法是基于 $\rho-1$ 阶降阶观测器的，且只在闭环下给出收敛的估计。

考虑函数($\tilde{\eta}=\eta-\hat{\eta}$)

$$V=\eta^{\mathrm{T}}P\eta+\frac{1}{2}y^2+\tilde{\eta}P\tilde{\eta}$$

闭环系统表示为

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= \Gamma\eta+y\beta+y\gamma(y)\\ \dot{y} &= \eta_1-2\hat{\eta}^{\mathrm{T}}P(\gamma(y)+\beta)-ky\\ \dot{\tilde{\eta}} &= \Gamma\tilde{\eta}-y(\gamma(y)+\beta)\end{aligned}$$

下面计算

$$\begin{aligned}\dot{V} &= -\eta^{\mathrm{T}}\eta+\eta^{\mathrm{T}}2P(y\beta+y\gamma(y))+y\eta_1-ky^2-\hat{\eta}^{\mathrm{T}}2P(y\beta+y\gamma(y))\\ &\quad+\tilde{\eta}^{\mathrm{T}}P(-2y(\beta+\gamma(y))-\tilde{\eta}^{\mathrm{T}}\tilde{\eta}\\ &= -\eta^{\mathrm{T}}\eta+y\eta_1-ky^2-\tilde{\eta}^{\mathrm{T}}\tilde{\eta}\end{aligned}$$

如果适当地选择 k，则 $\dot{V}$ 是负定的，因此由定理 B.1.6 可知，原点 $(y,\eta,\tilde{\eta})=0$ 是全局指数稳定的。

如果 $\rho>1$，对式 (6.60) 和式 (6.61) 实施坐标变换 $\tilde{\xi}_1=\xi_1-\xi_1^*$，其中($\hat{\eta}\in\mathbb{R}^{n-1}$)

$$\begin{aligned}\xi_1^* &= -y(\phi_1(y)+d_2[1]+k)-2\hat{\eta}P(\gamma(y)+\beta)\\ \dot{\hat{\eta}} &= \Gamma\hat{\eta}+y\beta+y\gamma(y)+y(\gamma(y)+\beta)+\alpha(t)\end{aligned}$$

这里 P 是方程 (6.82) 的解，$\alpha(t)$ 是一个待定函数。系统 (6.60) 和系统 (6.61) 变为

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= \Gamma\eta+\beta y+y\gamma(y)\\ \dot{\tilde{\eta}} &= \Gamma\tilde{\eta}-y(\beta+\gamma(y))-\alpha(t)\\ \dot{y} &= \eta_1-ky+\tilde{\xi}_1-\hat{\eta}2P(\gamma(y)+\beta)\\ \dot{\tilde{\xi}}_1 &= -\lambda_1\tilde{\xi}_1-\lambda_1\xi_1^*-\dot{\xi}_1^*+\xi_2\end{aligned}$$

考虑函数

$$V_1 = \eta^{\mathrm{T}}P\eta+\frac{1}{2}y^2+\tilde{\eta}^{\mathrm{T}}P\tilde{\eta}+\frac{1}{2}\tilde{\xi}_1^2$$

其对时间的导数为

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 &= -\eta^{\mathrm{T}}\eta+2\eta^{\mathrm{T}}P(y\beta+y\gamma(y))+y\eta_1-ky^2+y\tilde{\xi}_1-2\hat{\eta}^{\mathrm{T}}P(y\beta+y\gamma(y))\\ &\quad+2\tilde{\eta}^{\mathrm{T}}P(-2(y\gamma(y)+\beta y))-\tilde{\eta}^{\mathrm{T}}\tilde{\eta}-2\tilde{\eta}^{\mathrm{T}}P\alpha\\ &\quad-\lambda_1\tilde{\xi}_1^2-\lambda_1\tilde{\xi}_1\xi_1^*-\tilde{\xi}_1\dot{\xi}_1^*+\tilde{\xi}_1\xi_2\end{aligned}$$

如果能够取

$$\xi_2 = \lambda_1\xi_1^*+\dot{\xi}_1^*-y$$

则在降阶观测器中令 $\alpha=0$ 可得

$$\dot{V}_1 = -\eta^{\mathrm{T}}\eta+y\eta_1-ky^2-\tilde{\eta}^{\mathrm{T}}\tilde{\eta}-\lambda_1\tilde{\xi}_1^2$$

由于

$$\dot{\xi}_1^* = \frac{\partial\xi_1^*}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial\xi_1^*}{\partial\hat{\eta}}\dot{\hat{\eta}} \triangleq \mu(\hat{\eta}, y) + \frac{\partial\xi_1^*}{\partial y}\eta_1$$

因此 ξ_2 是未知状态 η_1 的一个函数，是不可实现的。故取

$$\xi_2 = \lambda_1\xi_1^* + \mu(\hat{\eta}, y) + \frac{\partial\xi_1^*}{\partial y}\hat{\eta}_1 - y$$

使得

$$\dot{V}_1 = -\eta^{\mathrm{T}}\eta + y\eta_1 - ky^2 - \tilde{\eta}^{\mathrm{T}}\tilde{\eta} - \lambda_1\tilde{\xi}_1^2 - \tilde{\xi}_1\frac{\partial\xi_1^*}{\partial y}\tilde{\eta}_1 - 2\tilde{\eta}^{\mathrm{T}}P\alpha$$

如果在降阶观测器中选择修正项 α 为

$$\alpha = P^{-1}\begin{bmatrix} \frac{\partial\xi_1^*}{\partial y} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\tilde{\xi}_1$$

则有

$$\dot{V}_1 = -\eta^{\mathrm{T}}\eta + y\eta_1 - ky^2 - \tilde{\eta}^{\mathrm{T}}\tilde{\eta} - \lambda_1\tilde{\xi}_1^2$$

当 $\rho = 2$时，由于 $\dot{V}_1$ 是负定的(对于合适的 k)，则基于降阶观测器的全局镇定控制为

$$\begin{aligned}
\xi_1^* &= -y(\phi_1(y) + d_2[1] + k) - 2\hat{\eta}^{\mathrm{T}}P(\gamma(y) + \beta) \\
\dot{\hat{\eta}} &= \Gamma\hat{\eta} + 2y(\beta + \gamma(y)) + \alpha \\
\dot{\xi}_1 &= -\lambda_1\xi_1 + \sigma(y)u \\
u &= \left(\lambda_1\xi_1^* + \mu(\hat{\eta}, y) + \frac{\partial\xi_1^*}{\partial y}\hat{\eta}_1 - y\right)\sigma^{-1}(y)
\end{aligned}$$

当 $\rho > 2$时，与定理6.3.1的证明一样，可通过归纳法证明。 □

例 6.3.1　考虑系统(θ 是一个已知参数)

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 + u \\
\dot{x}_2 &= \theta x_1^3 + u \\
y &= x_1
\end{aligned}$$

记

$$f = x_2\frac{\partial}{\partial x_1} + \theta x_1^3\frac{\partial}{\partial x_2}, \quad g = \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad h = x_1$$

由于 $L_fh = x_2$，定理6.3.1的条件(i)成立，满足式(6.6)，即

$$\begin{bmatrix} \langle dh, r\rangle \\ \langle d(L_fh), r\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

的向量场 r 为 $r = \partial/\partial x_2$。因为

$$ad_{(-f)}r = \left[\frac{\partial}{\partial x_2}, x_2\frac{\partial}{\partial x_1} + \theta x_1^3\frac{\partial}{\partial x_2}\right] = \frac{\partial}{\partial x_1}$$

从而定理6.3.1的条件(ii)~条件(v)成立，其中 $d_1 = 1, d_2 = 1, \sigma = 1$ (相对阶 $\rho = 1$)。实际上，系统已具有式(6.43)的形式，其中 $d = [1,1]^{\mathrm{T}}, \sigma = 1, \psi(y) = [0, \theta y^3]^{\mathrm{T}}$。在新的坐标

系 (6.46) 下，即

$$\begin{aligned}\eta &= x_2 - x_1\\ y &= x_1\end{aligned}$$

系统变为

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= -\eta - y + \theta y^3\\ \dot{y} &= \eta + y + u\end{aligned}$$

根据定理 6.3.1 的证明，由式 (6.48) 可知，静态输出反馈镇定控制为

$$u = -ky - y - \frac{9}{4}y(1+\theta^2 y^4)$$

其中 $k > 0$，由式 (6.49)可知 $P = 3/2$。另外，由评注 6.3.3 和式 (6.81)可得动态输出反馈控制

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\eta}} &= -\hat{\eta} - y + \theta y^3 + y(-1+\theta y^2)\\ u &= -ky - y - \hat{\eta}(-1+\theta y^2)\end{aligned}$$

回顾式 (6.82)，其中 $P = 1/2$。 □

例 6.3.2 考虑系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 - \frac{1}{3}x_1^3 + x_1^2\\ \dot{x}_2 &= u + x_1^2 x_2 - \frac{1}{3}x_1^5 + x_1^4\\ y &= x_1\end{aligned}$$

记

$$\begin{aligned}f &= \left(x_2 - \frac{1}{3}x_1^3 + x_1^2\right)\frac{\partial}{\partial x_1} + \left(x_1^2 x_2 - \frac{1}{3}x_1^5 + x_1^4\right)\frac{\partial}{\partial x_2}\\ g &= \frac{\partial}{\partial x_2}, \qquad h = x_1\end{aligned}$$

计算得

$$L_f h = x_2 - \frac{1}{3}x_1^3 + x_1^2$$

并且可以验证，对于所有的 $x \in \mathbb{R}^2$，$dh = dx_1$ 和 $d(L_f h) = dx_2 + (-x_1^2 + 2x_1)dx_1$ 是线性无关的，因此定理 6.3.1 的条件 (i) 成立。且满足式 (6.6)，即

$$\begin{bmatrix}\langle dx_1, r\rangle\\ \langle(-x_1^2 + 2x_1)dx_1 + dx_2, r\rangle\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

的向量场 r 为 $r = \partial/\partial x_2$，从而条件 (iii) 和条件 (iv) 也成立，其中 $\rho = 2$ 且 $d_1 = 0, d_2 = 1$。计算可得

$$\begin{aligned}ad_{(-f)}r &= \left[\frac{\partial}{\partial x_2}, (x_2 - \frac{1}{3}x_1^3 + x_1^2)\frac{\partial}{\partial x_1} + (x_1^2 x_2 - \frac{1}{3}x_1^5 + x_1^4)\frac{\partial}{\partial x_2}\right]\\ &= \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1^2\frac{\partial}{\partial x_2}\end{aligned}$$

由于 $g = r$ 且

$$[ad_{(-f)}r, g] = \left[\frac{\partial}{\partial x_1} + x_1^2\frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right] = 0$$

因此条件 (ii) 成立。又由于微分方程

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 1\\ \dot{x}_2 &= x_1^2\end{aligned}$$

无有限的逃逸时间，$ad_{(-f)}r$ 是一个完备的向量场，因此满足条件 (v)。定理 6.3.1 适用。现在，寻找一个全局微分同胚 $\zeta = T(x), T(0) = 0$，同时平整化 r 和 $ad_{(-f)}r$，即

$$r = \frac{\partial}{\partial \zeta_2}, \quad ad_{(-f)}r = \frac{\partial}{\partial \zeta_1}$$

也即

$$\begin{aligned}\langle d\zeta_1, ad_{(-f)}r\rangle &= 1, \quad \langle d\zeta_1, r\rangle = 0\\ \langle d\zeta_2, ad_{(-f)}r\rangle &= 0, \quad \langle d\zeta_2, r\rangle = 1\end{aligned} \tag{6.83}$$

积分正则微分

$$\begin{aligned}d\zeta_1 &= dx_1\\ d\zeta_2 &= -x_1^2dx_1 + dx_2\end{aligned}$$

得式 (6.83) 的解为

$$\begin{aligned}\zeta_1 &= x_1\\ \zeta_2 &= -\frac{x_1^3}{3} + x_2\end{aligned}$$

在 ζ 坐标系下，系统表示为形如式 (6.43)，即

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}_1 &= \zeta_2 + \zeta_1^2\\ \dot{\zeta}_2 &= u\\ y &= \zeta_1\end{aligned} \tag{6.84}$$

根据式 (6.53)，引入一阶滤波器 ($\lambda_1 = 1$)

$$\dot{\xi} = -\xi + u \tag{6.85}$$

从而按照式 (6.54) 有 $d[2] = [0, 1]^{\mathrm{T}}$ 和 $d[1] = [1, 1]^{\mathrm{T}}$。参见式 (6.56)，滤波变换

$$\begin{aligned}z_1 &= \zeta_1\\ z_2 &= \zeta_2 - \xi\end{aligned}$$

将系统 (6.84) 变换为式 (6.57) 的形式，即

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2 + z_1^2 + \xi\\ \dot{z}_2 &= \xi\\ y &= z_1\end{aligned}$$

而在新的坐标系(见式 (6.59))

$$\begin{aligned}\eta &= z_2 - z_1\\ y &= z_1\end{aligned}$$

下有

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= -\eta - y - y^2\\ \dot{y} &= \eta + y + y^2 + \xi\end{aligned}$$

同时，参照定理 6.3.1 的证明(见式 (6.63))，令

$$\xi^* = -y(1+k+y) - \frac{9}{4}y(1+y^2) \tag{6.86}$$

从而在新的坐标系$(\eta, y, \tilde{\xi} = \xi - \xi^*)$下有

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= -\eta - y - y^2\\ \dot{y} &= \eta + \tilde{\xi} - ky - \frac{9}{4}y(1+y^2)\\ \dot{\tilde{\xi}} &= -\tilde{\xi} - \xi^* + \left(\frac{13}{4} + k + 2y + \frac{27}{4}y^2\right)(\eta + y + y^2 + \xi) + u\end{aligned}$$

根据式 (6.68)，可以选择

$$\begin{aligned}u &= \xi^* - y - \left(\frac{13}{4} + k + 2y + \frac{27}{4}y^2\right)(y + y^2 + \xi)\\ &\quad -\tilde{\xi}\left(\frac{13}{4} + k + 2y + \frac{27}{4}y^2\right)^2\end{aligned} \tag{6.87}$$

综上所述，镇定控制由动态补偿器 (6.85) 和 (6.87) 给出，其中ξ^* 由式 (6.86) 定义，且$k > 0$。由评注 6.3.3可得另一个镇定控制。 □

6.4 输出反馈指数跟踪

针对上述各节所研究的同类系统，现在讨论如何设计如下定义的全局输出反馈指数跟踪控制。

定义 6.4.1 对于系统 (6.1)，全局**输出反馈指数跟踪(output feedback exponential tracking)**控制是一个有限维系统

$$\begin{aligned}\dot{w} &= \mu(w, y, y_{\mathrm{r}}, \cdots, y_{\mathrm{r}}^{(\rho)}), \quad w(0) = w_0, w \in \mathbb{R}^s\\ u &= u(w, y, y_{\mathrm{r}}, \cdots, y_{\mathrm{r}}^{(\rho)}), \quad u \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

使得对任意的$x(0), w_0$ 以及任意有界光滑且具有直到ρ阶有界时间导数的输出参考轨迹$y_{\mathrm{r}}(t)$，闭环系统的$\|x(t)\|$ 和$\|w(t)\|, \forall t \geqslant 0$ 是有界的，且对于某正实数k和α，有

$$|y(t) - y_{\mathrm{r}}(t)| \leqslant k|y(0) - y_{\mathrm{r}}(0)|\mathrm{e}^{-\alpha t}, \qquad \forall t \geqslant 0 \tag{6.88}$$

□

定理 6.4.1 **输出反馈指数跟踪(Output Feedback Exponential Tracking)** 令系统 (6.1) 具有相对阶ρ。若定理 6.3.1 的条件成立，则存在一个ρ阶的全局输出反馈指数跟踪控制。 □

证明: 由于定理6.3.1的条件成立，如定理6.3.1证明的开始部分所示，系统(6.1)可以变换为式(6.43)。首先，考虑$\rho = 1$(不失一般性，假设$d_1 = 1$)。实施坐标变换$\zeta \to (\eta_1, \cdots, \eta_{n-1}, y) \triangleq (\eta, y)$

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \zeta_2 - d_2\zeta_1 \\ &\vdots \\ \eta_{n-1} &= \zeta_n - d_n\zeta_1 \\ y &= \zeta_1 \end{aligned} \tag{6.89}$$

则在新的坐标系下有

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= \begin{bmatrix} -d_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -d_3 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -d_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -d_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \eta + y \begin{bmatrix} d_3 - d_2^2 \\ d_4 - d_3 d_2 \\ \vdots \\ d_n - d_{n-1}d_2 \\ -d_n d_2 \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} \psi_2 - d_2\psi_1 \\ \psi_3 - d_3\psi_1 \\ \vdots \\ \psi_{n-1} - d_{n-1}\psi_1 \\ \psi_n - d_n\psi_1 \end{bmatrix} \triangleq \Gamma\eta + y\beta + \nu(y) \\ \dot{y} &= \eta_1 + d_2 y + \psi_1(y) + \sigma(y)u \end{aligned} \tag{6.90}$$

这里ψ_i表示ψ的第i个分量。引入由系统

$$\dot{\eta}_{\mathrm{r}} = \Gamma\eta_{\mathrm{r}} + \beta y_{\mathrm{r}} + \nu(y_{\mathrm{r}}) \tag{6.91}$$

产生的**参考动态(reference dynamics)**，其中y_{r}是期望的输出轨迹。定义误差$e = y - y_{\mathrm{r}}$和$\tilde{\eta} = \eta - \eta_{\mathrm{r}}$，可得

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \eta_1 + d_2 y + \psi_1(y) - \dot{y}_{\mathrm{r}} + \sigma(y)u \\ \dot{\tilde{\eta}} &= \Gamma\tilde{\eta} + \beta e + \tilde{\nu}(y_{\mathrm{r}}, e) \end{aligned} \tag{6.92}$$

其中

$$\tilde{\nu}(y_{\mathrm{r}}, e) = \nu(y) - \nu(y_{\mathrm{r}}) = \nu(e + y_{\mathrm{r}}) - \nu(y_{\mathrm{r}})$$

又由于$\tilde{\nu}$是一个光滑函数，y_{r}是光滑有界的，且$\tilde{\nu}(y_{\mathrm{r}}, 0) = 0$，可以写出

$$\tilde{\nu}(y_{\mathrm{r}}, e) = e\gamma(y_{\mathrm{r}}, e) \tag{6.93}$$

其中$\gamma(y_{\mathrm{r}}, e)$是一个光滑函数。取$u$为

$$\begin{aligned} u &= \sigma^{-1}(y)[-d_2 y - \psi_1(y) + \dot{y}_{\mathrm{r}} - \eta_{\mathrm{r}_1} - ke \\ &\quad - e(\beta^{\mathrm{T}} P^2 \beta + \gamma^{\mathrm{T}}(y_{\mathrm{r}}, e) P^2 \gamma(y_{\mathrm{r}}, e))] \end{aligned} \tag{6.94}$$

其中k是正实数，η_{r_1}是向量η_{r}的第一个分量，P是方程(6.49)的解，可得

$$\dot{e} = \tilde{\eta}_1 - ke - e[\beta^{\mathrm{T}} P^2 \beta + \gamma^{\mathrm{T}}(y_{\mathrm{r}}, e) P^2 \gamma(y_{\mathrm{r}}, e)]$$

$$\dot{\tilde{\eta}} = \Gamma\tilde{\eta} + \beta e + e\gamma(y_r, e) \tag{6.95}$$

与式 (6.50) 一致。因此，参照定理 6.3.1 的证明可证得，式 (6.95) 的平衡点 $(e, \tilde{\eta}) = 0$ 是全局指数稳定的，特别有式 (6.88) 成立。由于 $y_r(t)$ 是有界的，从式 (6.91) 可知 $\|\eta_r(t)\|$ 有界，这意味着 $\|\eta(t)\|$ 有界。

现在，考虑 $\rho \geqslant 2$ 的情形。参照定理 6.3.1 的证明，可以构造滤波变换 (6.53)，将系统 (6.43) 变换为系统 (6.57)，其中向量 $d[1]$ 满足式 (6.55)。实施坐标变换

$$\begin{aligned} \eta_1 &= z_2 - d_2[1]z_1 \\ &\vdots \\ \eta_{n-1} &= z_n - d_n[1]z_1 \\ y &= z_1 \end{aligned} \tag{6.96}$$

可得

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= \Gamma\eta + \beta y + \nu(y) \\ \dot{y} &= \eta_1 + d_2[1]y + \psi_1(y) + \xi_1 \end{aligned} \tag{6.97}$$

其中 Γ, β 和 ν 见式 (6.90)，但用 $d[1]$ 代替 d。引入参考动态

$$\dot{\eta}_r = \Gamma\eta_r + \beta y_r + \nu(y_r) \tag{6.98}$$

如式 (6.95)，可以写出

$$\dot{\tilde{\eta}} = \Gamma\tilde{\eta} + \beta e + e\gamma(y_r, e) \tag{6.99}$$

其中 $e = y - y_r, \tilde{\eta} = \eta - \eta_r$，$\gamma$ 由式 (6.93) 定义。考虑如下增广系统:

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \eta_1 + d_2[1]y + \psi_1(y) - \dot{y}_r + \xi_1 \\ \dot{\tilde{\eta}} &= \Gamma\tilde{\eta} + \beta e + e\gamma(y_r, e) \\ \dot{\xi}_1 &= -\lambda_1\xi_1 + \xi_2 \end{aligned} \tag{6.100}$$

实施坐标变换

$$\tilde{\xi}_1 = \xi_1 - \xi_1^* \tag{6.101}$$

其中

$$\begin{aligned} \xi_1^* &= -d_2[1]y - \psi_1(y) + \dot{y}_r - \eta_{r_1} - ke - e[\beta^T P^2\beta + \gamma^T(y_r, e)P^2\gamma(y_r, e)] \\ &\triangleq \xi_1^*(e, y_r, \dot{y}_r, \eta_{r_1}) \end{aligned} \tag{6.102}$$

则系统 (6.100) 变为

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \tilde{\eta}_1 - ke - e[\beta^T P^2\beta + \gamma^T(y_r, e)P^2\gamma(y_r, e)] \\ \dot{\tilde{\eta}} &= \Gamma\tilde{\eta} + \beta e + e\gamma(y_r, e) \\ \dot{\tilde{\xi}}_1 &= -\lambda_1\tilde{\xi}_1 - \dot{\xi}_1^* - \lambda_1\xi_1^* + \xi_2 \end{aligned} \tag{6.103}$$

以下可以应用定理 6.3.1 的证明确定一个动态控制

$$u = \sigma^{-1}(y)\xi_\rho^*(e, y_r, \cdots, y_r^{(\rho)}, \eta_r, \xi_1, \cdots, \xi_{\rho-1}) \tag{6.104}$$

和一个坐标变换

$$(e,\eta,\tilde{\eta},\xi_1,\cdots,\xi_{\rho-1}) \to (e,\eta,\tilde{\eta},\tilde{\xi}_1,\cdots,\tilde{\xi}_{\rho-1})$$

以及函数

$$V_{\rho-1} = \tilde{\eta}^{\mathrm{T}} P\tilde{\eta} + \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\rho-1}\tilde{\xi}_j^2$$

使得

$$\dot{V}_{\rho-1} \leqslant -ke^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^{\rho-1}\tilde{\eta}^{\mathrm{T}}\tilde{\eta} - \sum_{j=1}^{\rho-1}\lambda_j\tilde{\xi}_j^2$$

由定理B.1.6可知，这说明$e(t), \|\tilde{\eta}(t)\|$以及$\tilde{\xi}_i(t), 1 \leqslant i \leqslant \rho-1$是有界的，且指数收敛到零。由于$\|\eta_{\mathrm{r}}(t)\|$有界，所以$\|\eta(t)\|$也是有界的，从而定理得证。 □

例 6.4.1 系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + x_1^3 + \cos x_1\\ \dot{x}_2 &= u\\ y &= x_1\end{aligned}$$

满足定理6.4.1的条件且相对阶为$\rho=2$，因此可以构造一个阶数为1的全局输出反馈跟踪控制。按照式(6.53)，引入滤波器

$$\dot{\xi} = -\xi + u$$

其中$\lambda=1$。在新的坐标系

$$\begin{aligned}z_1 &= x_1\\ z_2 &= x_2 - \xi\end{aligned}$$

下有

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2 + \xi + z_1^3 + \cos z_1\\ \dot{z}_2 &= \xi\\ \dot{\xi} &= -\xi + u\end{aligned}$$

即系统具有式(6.57)所示的形式。按照定理6.4.1的证明，实施坐标变换

$$\begin{aligned}\eta &= z_2 - z_1\\ y &= z_1\end{aligned}$$

可得

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= -\eta - y - y^3 - \cos y\\ \dot{y} &= \eta + y + y^3 + \cos y + \xi\end{aligned}$$

其中(见式(6.97))

$$\begin{aligned}d_2[1] &= 1, \quad \psi_1(y) = y^3 + \cos y, \quad \Gamma = -1\\ \beta &= -1, \quad \nu(y) = -y^3 - \cos y\end{aligned}$$

$$\gamma(y_{\mathrm{r}},e) = \left[-(e+y_{\mathrm{r}})^3 - \cos(e+y_{\mathrm{r}}) + y_{\mathrm{r}}^3 + \cos y_{\mathrm{r}}\right]/e$$

引入参考动态(见式(6.98))

$$\dot{\eta}_{\mathrm{r}} = -\eta_{\mathrm{r}} - y_{\mathrm{r}} - y_{\mathrm{r}}^3 - \cos y_{\mathrm{r}}$$

则误差动态系统同式(6.99)。定义

$$\xi^* = -y - \psi_1(y) + \dot{y}_{\mathrm{r}} - \eta_{\mathrm{r}} - ke - \frac{9}{4}e(\beta^2 + \gamma^2(y_{\mathrm{r}},e)) \triangleq \xi^*(e, y_{\mathrm{r}}, \dot{y}_{\mathrm{r}}, \eta_{\mathrm{r}})$$

其中 $k > 0$。根据式(6.103)和式(6.104)可知，动态输出反馈跟踪控制器为

$$\begin{aligned}
\dot{\xi} &= -\xi + u \\
u &= \xi^* - e + \frac{\partial \xi^*}{\partial e}(\eta_{\mathrm{r}} + y + \psi_1(y) - \dot{y}_{\mathrm{r}} + \xi) + \frac{\partial \xi^*}{\partial y_{\mathrm{r}}}\dot{y}_{\mathrm{r}} \\
&\quad + \frac{\partial \xi^*}{\partial \dot{y}_{\mathrm{r}}}\ddot{y}_{\mathrm{r}} + \frac{\partial \xi^*}{\partial \eta_{\mathrm{r}}}\dot{\eta}_{\mathrm{r}} - \tilde{\xi}\left(\frac{\partial \xi^*}{\partial e}\right)^2
\end{aligned}$$

□

6.5 实例

例 6.5.1 (问题 1.10.8)考虑单连杆**柔性关节机器人**(**robot with flexible joint**)的模型

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= -\frac{Mgl}{J_{\mathrm{l}}}\sin x_1 - \frac{k}{J_{\mathrm{l}}}(x_1 - x_3) - \frac{F_{\mathrm{l}}}{J_{\mathrm{l}}}x_2 \\
\dot{x}_3 &= x_4 \\
\dot{x}_4 &= \frac{k}{J_{\mathrm{m}}}(x_1 - x_3) - \frac{F_{\mathrm{m}}}{J_{\mathrm{m}}}x_4 + \frac{1}{J_{\mathrm{m}}}u \\
y &= x_1
\end{aligned} \tag{6.105}$$

该系统满足定理 6.3.1 和定理 6.4.1 的假设条件，且相对阶 $\rho = 4$，但是定理 6.2.1 不适用，这是因为其条件(vi)不成立。 □

例 6.5.2 (问题 1.10.7)在例 5.5.3 中确定了状态坐标系，在该坐标下**点质量卫星**(**point mass satellite**)的动态模型变为

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= \theta_1\psi_{11}(y) + \frac{1}{(y_1^2 + y_2^2)^{1/2}}(u_1 y_1 + u_2 y_2)\theta_2 \\
\dot{z}_2 &= z_1 \\
\dot{z}_3 &= \theta_1\psi_{21}(y) + \frac{1}{(y_1^2 + y_2^2)^{1/2}}(u_1 y_2 - u_2 y_1)\theta_2 \\
\dot{z}_4 &= z_3 \\
y_1 &= z_2 \\
y_2 &= z_4
\end{aligned} \tag{6.106}$$

其中

$$\psi_{11}(y) = -\frac{y_1}{(y_1^2 + y_2^2)^{3/2}}$$

$$\psi_{21}(y) = -\frac{y_2}{(y_1^2+y_2^2)^{3/2}}$$

若 θ_1 和 θ_2 已知，则输出反馈控制

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \frac{\theta_2}{(y_1^2+y_2^2)^{1/2}} \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_2 & -y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \theta_1 \begin{bmatrix} \psi_{11}(y) \\ \psi_{21}(y) \end{bmatrix}$$

使得闭环系统变为线性系统

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= v_1, \quad \dot{z}_2 = z_1, \quad y_1 = z_2 \\ \dot{z}_3 &= v_2, \quad \dot{z}_4 = z_3, \quad y_2 = z_4 \end{aligned}$$

因此，该系统是可静态输出反馈线性化的。故可利用线性系统理论来设计 v_1 和 v_2。 □

例 6.5.3 (问题 1.10.9)**重新考虑同步发电机(synchronous generator)的降阶模型**。假设只有 δ 和 ω 可以通过测量得到，我们将设计一个基于测量量 δ 和 ω 的反馈控制 $u = v_{\rm f} - v_{\rm fe}$，驱动状态 $(\delta, \omega, \psi_{\rm f})$ 到稳定的工作点 $(\delta_{\rm e}, \omega_{\rm s}, \psi_{\rm fe})$，即下面代数方程的解：

$$\begin{aligned} \theta_1 - \theta_2\omega_{\rm s}\psi_{\rm fe}\sin\delta_{\rm e} + \theta_3\sin\delta_{\rm e}\cos\delta_{\rm e} &= 0 \\ v_{\rm fe} - \theta_4\omega_{\rm s}\psi_{\rm fe} + \theta_5\cos\delta_{\rm e} &= 0 \end{aligned}$$

定义 $\tilde{\delta} = \delta - \delta_{\rm e}$ 和 $\tilde{\omega} = \omega - \omega_{\rm r}$，其中

$$\omega_{\rm r} = -k_1\tilde{\delta} + \omega_{\rm s}$$

从而

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\delta}} &= -k_1\tilde{\delta} + \tilde{\omega} \\ \dot{\tilde{\omega}} &= \theta_1 - \theta_2\omega\psi_{\rm f}\sin\delta + \theta_3\sin\delta\cos\delta + k_1(\omega - \omega_{\rm s}) \end{aligned}$$

令 $\hat{\psi}_{\rm f}$ 为 $\psi_{\rm f}$ 的估计值，其动态定义为

$$\dot{\hat{\psi}}_{\rm f} = v_{\rm f} - \theta_4\omega\hat{\psi}_{\rm f} + \theta_5\cos\delta + \alpha$$

其中 α 是一个待设计的函数。磁通的估计误差表示为 $e_\psi = \psi_{\rm f} - \hat{\psi}_{\rm f}$，其动态为

$$\dot{e}_\psi = -\theta_4\omega e_\psi - \alpha$$

令

$$\psi_{\rm fr} = \frac{1}{\theta_2\omega\sin\delta}[\theta_1 + \theta_3\sin\delta\cos\delta + k_1(\omega - \omega_{\rm s}) + k_2\tilde{\omega}]$$

以及 $\tilde{\psi}_{\rm f} = \hat{\psi}_{\rm f} - \psi_{\rm fr}$，则有

$$\dot{\tilde{\omega}} = -k_2\tilde{\omega} - \theta_2\omega\tilde{\psi}_{\rm f}\sin\delta - \theta_2\omega e_\psi\sin\delta$$

以及

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\psi}}_{\rm f} = {} & v_{\rm fe} - \theta_4\omega\hat{\psi}_{\rm f} + \theta_5\cos\delta + u + \alpha \\ & - \frac{1}{\theta_2\omega\sin\delta}[\theta_3(\cos^2\delta - \sin^2\delta)(\omega - \omega_{\rm s}) \\ & + (k_1 + k_2)(\theta_1 - \theta_2\omega\psi_{\rm f}\sin\delta + \theta_3\sin\delta\cos\delta) + k_1k_2(\omega - \omega_{\rm s})] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+(\theta_1+\theta_3\sin\delta\cos\theta+k_1(\omega-\omega_s)+k_2\tilde{\omega})\left[-\frac{1}{\theta_2\omega^2\sin\delta}(\theta_1-\theta_2\omega\psi_f\sin\delta\right.\\
&\left.+\theta_3\sin\delta\cos\delta)-\frac{\cos\delta}{\theta_2\omega\sin^2\delta}(\omega-\omega_s)\right]\\
\triangleq\ & w_0(\delta,\omega,\hat{\psi}_f)+\psi_f\left[k_1+k_2+\frac{1}{\omega}(\theta_1+\theta_3\sin\delta\cos\delta\right.\\
&\left.+k_1(\omega-\omega_s)+k_2\tilde{\omega})\right]+u\\
\triangleq\ & w_0(\delta,\omega,\hat{\psi}_f)+w_1(\delta,\omega)\psi_f+u
\end{aligned}
$$

取

$$
u = -w_0(\delta,\omega,\hat{\psi}_f)-w_1(\delta,\omega)\hat{\psi}_f+\theta_2\omega\tilde{\omega}\sin\delta-k_3(\hat{\psi}_f-\psi_{fr})
$$

从而有

$$
\dot{\tilde{\psi}}_f=-k_3\tilde{\psi}_f+\theta_2\omega\tilde{\omega}\sin\delta+w_1(\delta,\omega)e_\psi
$$

整个闭环动态为

$$
\begin{aligned}
\dot{\tilde{\delta}} &= -k_1\tilde{\delta}+\tilde{\omega}\\
\dot{\tilde{\omega}} &= -k_2\tilde{\omega}-\theta_2\omega\tilde{\psi}_f\sin\delta-(\theta_2\omega\sin\delta)e_\psi\\
\dot{\tilde{\psi}}_f &= -k_3\tilde{\psi}_f+\theta_2\omega\tilde{\omega}\sin\delta\\
&\quad+\left[k_1+k_2+\frac{1}{\omega}(\theta_1+\theta_3\sin\delta\cos\delta+k_1(\omega-\omega_s)+k_2\tilde{\omega})\right]e_\psi\\
\dot{e}_\psi &= -\theta_4\omega e_\psi-\alpha
\end{aligned}
$$

考虑函数

$$
V=\frac{1}{2}(\tilde{\delta}^2+\tilde{\omega}^2+\tilde{\psi}_f^2+e_\psi^2)
$$

选择

$$
\begin{aligned}
\alpha &= -(\theta_2\omega\sin\delta)\tilde{\omega}\\
&\quad+\left[k_1+k_2+\frac{1}{\omega}(\theta_1+\theta_3\sin\delta\cos\delta+k_1(\omega-\omega_s)+k_2\tilde{\omega})\right]\tilde{\psi}_f
\end{aligned}
$$

则有

$$
\dot{V}=-k_1\tilde{\delta}^2-k_2\tilde{\omega}^2+\tilde{\delta}\tilde{\omega}-\theta_4\omega e_\psi^2
$$

□

例 6.5.4 (问题 1.10.1)感应电机(induction motor) 的降阶模型(电流反馈)为

$$
\begin{aligned}
\frac{d\omega}{dt} &= \frac{n_pM}{JL}(\psi_a i_b-\psi_b i_a)-\frac{T_L}{J}\\
\frac{d\psi_a}{dt} &= \frac{-R}{L}\psi_a-n_p\omega\psi_b+\frac{R}{L}Mi_a\\
\frac{d\psi_b}{dt} &= \frac{-R}{L}\psi_b+n_p\omega\psi_a+\frac{R}{L}Mi_b
\end{aligned}
\tag{6.107}
$$

其中 R, L 和 M 是电机的参数。由于 (i_a, i_b) 是两个独立的控制输入，因此这是一个多输入控

制问题。假设只有角速度 ω 是可测量得到的。要控制的输出量为

$$y_1 = \omega, \qquad y_2 = \sqrt{\psi_a^2 + \psi_b^2}$$

注意，可测量得到的输出与要控制的输出不一致。虽然这个系统并不属于本章所讨论的系统类型，但仍可用目前为止所给出的方法来设计跟踪控制。令 ω_{r} 和 Ψ_{r} 分别为 y_1 和 y_2 的期望参考值，考虑函数

$$V = \frac{1}{2}\tilde{\omega}^2 + \frac{1}{2}\tilde{\psi}_a^2 + \frac{1}{2}\tilde{\psi}_b^2 + \frac{1}{4}\tilde{\Psi}^2 \tag{6.108}$$

其中 $\tilde{\omega} = \omega - \omega_{\mathrm{r}}, \tilde{\psi}_a = \psi_a - \hat{\psi}_a, \tilde{\psi}_b = \psi_b - \hat{\psi}_b$，$\hat{\psi}_a$ 和 $\hat{\psi}_b$ 是适当的待定估计值，$\tilde{\Psi} = \hat{\psi}_a^2 + \hat{\psi}_b^2 - \Psi_{\mathrm{r}}^2$。利用式 (6.107) 和式 (6.108) 可得

$$\begin{aligned}
\frac{dV}{dt} &= \tilde{\omega}\left(\frac{n_{\mathrm{p}}M}{JL}(\psi_a i_b - \psi_b i_a) - \frac{T_{\mathrm{L}}}{J} - \dot{\omega}_{\mathrm{r}}\right) \\
&\quad + \tilde{\psi}_a\left(-\frac{R}{L}\psi_a - n_{\mathrm{p}}\omega\psi_b + \frac{R}{L}Mi_a - \dot{\hat{\psi}}_a\right) \\
&\quad + \tilde{\psi}_b\left(-\frac{R}{L}\psi_b + n_{\mathrm{p}}\omega\psi_a + \frac{R}{L}Mi_b - \dot{\hat{\psi}}_b\right) \\
&\quad + \tilde{\Psi}(\hat{\psi}_a\dot{\hat{\psi}}_a + \hat{\psi}_b\dot{\hat{\psi}}_b - \Psi_{\mathrm{r}}\dot{\Psi}_{\mathrm{r}})
\end{aligned}$$

上式可重写为

$$\begin{aligned}
\frac{dV}{dt} &= \frac{n_{\mathrm{p}}M}{JL}\tilde{\omega}\left((\hat{\psi}_a i_b - \hat{\psi}_b i_a) - \frac{LT_{\mathrm{L}}}{n_{\mathrm{p}}M} - \frac{JL}{n_{\mathrm{p}}M}\dot{\omega}_{\mathrm{r}}\right) \\
&\quad + \tilde{\psi}_a\left(-\frac{R}{L}\psi_a - n_{\mathrm{p}}\omega\psi_b + \frac{R}{L}Mi_a + \frac{n_{\mathrm{p}}M}{JL}\tilde{\omega}i_b - \dot{\hat{\psi}}_a\right) \\
&\quad + \tilde{\psi}_b\left(-\frac{R}{L}\psi_b + n_{\mathrm{p}}\omega\psi_a + \frac{R}{L}Mi_b - \frac{n_{\mathrm{p}}M}{JL}\tilde{\omega}i_a - \dot{\hat{\psi}}_b\right) \\
&\quad + \tilde{\Psi}(\hat{\psi}_a\dot{\hat{\psi}}_a + \hat{\psi}_b\dot{\hat{\psi}}_b - \Psi_{\mathrm{r}}\dot{\Psi}_{\mathrm{r}})
\end{aligned} \tag{6.109}$$

定义降阶观测器动态(只在闭环系统下提供收敛估计值)为

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{\psi}}_a &= -\frac{R}{L}\hat{\psi}_a - n_{\mathrm{p}}\omega\hat{\psi}_b + \frac{R}{L}Mi_a + \frac{n_{\mathrm{p}}M}{JL}\tilde{\omega}i_b \\
\dot{\hat{\psi}}_b &= -\frac{R}{L}\hat{\psi}_b + n_{\mathrm{p}}\omega\hat{\psi}_a + \frac{R}{L}Mi_b - \frac{n_{\mathrm{p}}M}{JL}\tilde{\omega}i_a
\end{aligned} \tag{6.110}$$

将其代入式 (6.109)，有

$$\begin{aligned}
\frac{dV}{dt} &= \frac{n_{\mathrm{p}}M}{JL}\tilde{\omega}\left((\hat{\psi}_a i_b - \hat{\psi}_b i_a) - \frac{LT_{\mathrm{L}}}{n_{\mathrm{p}}M} - \frac{JL}{n_{\mathrm{p}}M}\dot{\omega}_{\mathrm{r}}\right) \\
&\quad + \tilde{\Psi}\left(\hat{\psi}_a\frac{R}{L}Mi_a + \hat{\psi}_b\frac{R}{L}Mi_b + \hat{\psi}_a\frac{n_{\mathrm{p}}M}{JL}\tilde{\omega}i_b - \hat{\psi}_b\frac{n_{\mathrm{p}}M}{JL}\tilde{\omega}i_a\right. \\
&\quad \left. - \frac{R}{L}(\hat{\psi}_a^2 + \hat{\psi}_b^2) - \Psi_{\mathrm{r}}\dot{\Psi}_{\mathrm{r}}\ \right) - \frac{R}{L}\tilde{\psi}_a^2 - \frac{R}{L}\tilde{\psi}_b^2
\end{aligned} \tag{6.111}$$

定义输出反馈控制律为

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} \hat{\psi}_a - n_{\mathrm{p}}/(RJ)\tilde{\omega}\hat{\psi}_b & \hat{\psi}_b + n_{\mathrm{p}}/(RJ)\tilde{\omega}\hat{\psi}_a \\ -\hat{\psi}_b & \hat{\psi}_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \end{bmatrix} \triangleq D(\hat{\psi}_a, \hat{\psi}_b) \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{M}\begin{bmatrix} \hat{\psi}_a^2 + \hat{\psi}_b^2 + (L/R)\Psi_{\mathrm{r}}\dot{\Psi}_{\mathrm{r}} - k_\psi(L/R)(\hat{\psi}_a^2 + \hat{\psi}_b^2 - \Psi_{\mathrm{r}}^2) \\ (L/n_{\mathrm{p}})(T_{\mathrm{L}} + J\dot{\omega}_{\mathrm{r}} - k_\omega J(\omega - \omega_{\mathrm{r}})) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{6.112}$$

由于

$$\det\left[D(\hat{\psi}_a,\hat{\psi}_b)\right]=(\hat{\psi}_a^2+\hat{\psi}_b^2)$$

假设 $\hat{\psi}_a^2+\hat{\psi}_b^2\neq 0$，则控制律 (6.112) 是有明确定义的。将式 (6.112) 代入式 (6.111)，可得

$$\frac{dV}{dt}=-k_\omega\tilde{\omega}^2-k_\psi\tilde{\Psi}^2-\frac{R}{L}\tilde{\psi}_a^2-\frac{R}{L}\tilde{\psi}_b^2 \tag{6.113}$$

故只要满足

$$\hat{\psi}_a^2+\hat{\psi}_b^2\neq 0,\qquad \forall t\geqslant 0 \tag{6.114}$$

则从式 (6.108) 和式 (6.113) 可知当 t 趋于无穷时，$V(t)$ 以及相应的 $\tilde{\omega}(t),\tilde{\psi}_a(t),\tilde{\psi}_b(t)$ 和 $\tilde{\Psi}(t)$ 指数收敛到零。由于

$$\frac{d}{dt}(\hat{\psi}_a^2+\hat{\psi}_b^2-\Psi_{\rm r}^2)=-2k_\psi(\hat{\psi}_a^2+\hat{\psi}_b^2-\Psi_{\rm r}^2)$$

若降阶观测器 (6.110) 初始值满足

$$\hat{\psi}_a^2(0)+\hat{\psi}_b^2(0)>0$$

则条件 (6.114) 满足。从而方程 (6.110) 和方程 (6.112) 给出了一个只基于速度测量的动态输出反馈跟踪控制。 □

6.6 结论

本章针对不含有不确定性的非线性系统设计了输出反馈控制。定理 6.1.1 和定理 6.2.1 分别界定了可静态输出反馈线性化的(见定义 6.1.1)以及可动态输出反馈线性化的(见定义 6.2.2)非线性系统。点质量卫星(见例 6.5.2) 给出了一个可输出反馈线性化的实例。在相对放宽的条件下，定理 6.3.1 和定理 6.4.1 分别说明了如何设计输出反馈镇定控制和指数跟踪控制。定理 6.3.1 和定理 6.4.1 的充分条件大部分是基于定理 5.2.1 中设计全局观测器所用的条件。此外，还要求在适当的坐标系下与单输入相乘的向量场只含有一个标量非线性，可参见定理 6.3.1 的条件 (iv)。在例 6.5.3 和例 6.5.4 中，分别设计了同步发电机和感应电机的输出反馈控制。

6.7 习题

6.1 试证明系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=x_2+\mathrm{e}^{x_1}+u\\ \dot{x}_2&=x_1^3+2u\\ y&=x_1\end{aligned}$$

是可动态输出反馈线性化的，并计算线性化控制。

6.2 试设计如下系统的一个镇定控制:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=x_2+x_1^2\\ \dot{x}_2&=u\end{aligned}$$

$$y = x_1$$

6.3 试设计如下系统的一个镇定控制：

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + x_1\\ \dot{x}_2 &= \sin x_1 + u\\ y &= x_1\end{aligned}$$

6.4 试设计如下系统的一个跟踪控制：

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + x_1\\ \dot{x}_2 &= x_3 + x_1 + \sin x_1\\ \dot{x}_3 &= x_4 + x_1 + \sin x_1\\ \dot{x}_4 &= \sin x_1 + u\\ y &= x_1\end{aligned}$$

指数跟踪参考输出 $y_{\mathrm{r}} = 1$。

6.5 试设计如下系统的一个镇定控制：

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + x_1^3\\ \dot{x}_2 &= x_1^2 x_2 + u\\ y &= x_1\end{aligned}$$

采用评注 6.3.3 给出的设计步骤。

6.6 试设计如下系统的一个镇定控制：

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + x_1 \sin x_1\\ \dot{x}_2 &= u + x_1^3 x_2\\ y &= x_1\end{aligned}$$

6.7 试设计如下线性系统的一个跟踪控制：

$$y(s) = \frac{s+1}{s^3+s+1}u(s)$$

指数跟踪参考输出 $y_{\mathrm{r}}(t) = \sin t$。

6.8 试设计如下系统的一个镇定控制：

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + x_1 - x_3 + \sin(x_1 - x_3)\\ \dot{x}_2 &= x_3 + (x_1 - x_3)^2\\ \dot{x}_3 &= \sin(x_1 - x_3) + u\\ y &= x_1 - x_3\end{aligned}$$

6.9 试设计如下系统的一个镇定控制：

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 + x_1^3 \\
\dot{x}_2 &= x_3 + x_1^2 \\
\dot{x}_3 &= u \\
y &= x_1
\end{aligned}
$$

6.10 试设计如下系统的一个镇定控制：

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= \frac{1}{2}(x_3 - x_1) + \frac{1}{2}(x_4 - x_2) + \frac{1}{2}u \\
\dot{x}_3 &= x_4 \\
\dot{x}_4 &= x_1 - x_3 + x_2 - x_4 \\
y &= x_1
\end{aligned}
$$

6.11 试设计如下系统的一个镇定控制：

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -x_1 + x_2^3 \\
\dot{x}_2 &= u + x_1 x_2^3 \\
y &= x_2
\end{aligned}
$$

提示：使用函数 $V = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + (x_1 - \hat{x}_1)^2)$。

6.12 试设计如下系统的一个镇定控制：

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 + x_1^2 \\
\dot{x}_2 &= -x_2 + x_1^3 + u \\
y &= x_1
\end{aligned}
$$

提示：参考例 6.5.3。

6.13 计算状态反馈控制和全局微分同胚，将满足定理 6.3.1 的条件 (i)~ (v) 的系统 (6.1) 变换为系统 (6.42)。
提示：参考评注 6.3.2 所列出的步骤。

第 7 章　鲁棒调节与自适应跟踪

这一章考虑单输入单输出**不确定**(uncertain)系统

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= f(x,\theta)+g(x,\theta)u, \qquad x\in\mathbb{R}^n, u\in\mathbb{R}, \theta\in\Omega\subset\mathbb{R}^p \\
y &= h(x,\theta), \qquad y\in\mathbb{R}
\end{aligned}
\tag{7.1}
$$

其中x是状态向量，u是控制，θ是定常的不确定参数向量，属于已知或未知的紧集Ω，h是光滑的输出函数且$h(x_\theta,\theta)=0$，$\forall\theta\in\Omega$，f 和 g是光滑的向量场且$g(x,\theta)\neq 0$，$\forall x\in\mathbb{R}^n,\forall\theta\in\Omega$。假设只有输出$y$是可量测的。基于第6章已得到的结论，在7.1节中将给出界定本章所研究系统所需的几何条件。假设Ω已知，$h(0,\theta)=0$，$\forall\theta\in\Omega$，且平衡点与θ无关(不失一般性，假设平衡点为原点$x=0$，即$f(0,\theta)=0,\forall\theta\in\Omega$)，7.2节求解鲁棒镇定问题，式(7.1)中的不确定性可以是不确定参数(可以表现为非线性)或者是其界函数已知的不确定非线性。7.3节给出鲁棒控制的自校正算法，它不要求有关Ω的信息已知(当θ表现为非线性时)，并且讨论定点调节问题。假设θ是线性加入系统的，7.4节设计一个自适应控制器解决跟踪问题，并且将含有未知参数的线性系统自适应结果推广到一类非线性系统。7.5节讨论一些实例。

7.1　结构几何条件

基于定理6.3.1，下面首先描述所研究的一类非线性系统。

定理 7.1.1　*设系统*(7.1)*对于所有的*$\theta\in\Omega$*具有全局相对阶*ρ，*则系统*(7.1)*可由一个全局状态空间微分同胚*

$$
\zeta=T(x,\theta), \qquad T(x_\theta,\theta)=0, \qquad \forall\theta\in\Omega \tag{7.2}
$$

变换为

$$
\begin{aligned}
\dot{\zeta} &= A_c\zeta+b(\theta)\sigma(y)u+\psi(y,\theta) \\
y &= c_c\zeta
\end{aligned}
\tag{7.3}
$$

其中(A_c,b,c_c)*是最小相位的且具有观测器标准型*

$$
A_c=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\\0&0&0&\cdots&0\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}0\\\vdots\\b_\rho\\\vdots\\b_n\end{bmatrix}
$$

$$c_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

并且对于所有的$\theta \in \Omega$，$b_\rho(\theta)$具有已知且不变的符号，当且仅当对于所有的$\theta \in \Omega$和所有的$x \in \mathbb{R}^n$有：

(i) $\mathrm{rank}\,\{dh, \cdots, d(L_f^{n-1}h)\} = n$,

(ii) $[ad_f^i r, ad_f^j r] = 0, \qquad 0 \leqslant i, j \leqslant n-1$,

(iii) $[g, ad_f^k r] = 0, \qquad 0 \leqslant k \leqslant n-2$,

(iv) 存在一个光滑函数$\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$和$n-\rho+1$个与$\theta$相关的实数$b_\rho(\theta), \cdots, b_n(\theta)$，使得

$$g = (\sigma \circ h) \sum_{j=1}^{n-\rho+1} b_{n-j+1}(\theta) ad_{(-f)}^{j-1} r$$

其中$b_\rho(\theta)s^{n-\rho} + \cdots + b_n(\theta)$是一个Hurwitz多项式，且对于所有的$\theta \in \Omega$，$b_\rho(\theta)$具有已知且不变的符号，

(v) 向量场$ad_f^i r, 0 \leqslant i \leqslant n-1$是完备的，

其中向量场r满足

$$\begin{bmatrix} \langle dh, r \rangle \\ \vdots \\ \langle d(L_f^{n-1}h), r \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \tag{7.4}$$

□

评注 7.1.1 满足定理7.1.1的条件(i)～条件(v)的这类系统(7.1)是最小相位的，其中$f(0,\theta) = 0, \forall \theta \in \Omega$，且具有如下性质：在适当的全局坐标下，其零动态可表示为一个线性渐近稳定的系统

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} -b_{\rho+1}/b_\rho & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -b_{\rho+2}/b_\rho & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -b_{n-1}/b_\rho & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -b_n/b_\rho & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} z, \qquad z \in \mathbb{R}^{n-\rho}$$

□

评注 7.1.2 任意可观、最小相位、线性时不变且具有已知相对阶ρ的系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Fx + gu, \qquad x \in \mathbb{R}^n \\ y &= hx, \qquad y \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

其传递函数为

$$W(s) = \frac{b_\rho s^{n-\rho} + \cdots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n}$$

通过一个线性坐标变换可变换为具有观测器型的系统

$$
\begin{aligned}
\dot{\zeta} &= \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \zeta + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ b_\rho \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} u \\
&\triangleq A_c\zeta - ay + bu \\
y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \zeta = c_c\zeta
\end{aligned} \tag{7.5}
$$

事实上，对于线性系统，定理 7.1.1 的条件 (i) 相当于 Kalman 可观性条件，只要系统是最小相位的，且**高频增益(high frequency gain)** b_ρ 的符号是已知的，则条件 (ii)~条件 (v) 就是自然成立的。 □

例 7.1.1 考虑系统

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= u + \theta_1 x_1 x_2 + \theta_2 x_1^2 \\
y &= x_1
\end{aligned} \tag{7.6}
$$

其中 $\theta = [\theta_1, \theta_2]^{\mathrm{T}} \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是不确定的定常参数向量。记

$$
\begin{aligned}
f(x,\theta) &= x_2\frac{\partial}{\partial x_1} + (\theta_1 x_1 x_2 + \theta_2 x_1^2)\frac{\partial}{\partial x_2} \\
g(x) &= \frac{\partial}{\partial x_2}, \qquad h(x) = x_1
\end{aligned}
$$

由于 $L_g h = 0$ 和 $L_g L_f h = 1$，对于所有的 $\theta \in \Omega$，全局相对阶为 $\rho = 2$，因此定理 7.1.1 的条件 (i) 成立，且满足式 (7.4) 的向量场 r 为 $r = \partial/\partial x_2$。故条件 (iii) 和条件 (iv) 也成立，其中 $b_2(\theta) = 1$ 且 $\sigma = 1$。计算得

$$
ad_{(-f)}r = \frac{\partial}{\partial x_1} + \theta_1 x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}
$$

由 $[r, ad_{(-f)}r] = 0$ 可知满足条件 (ii)。又由于向量场 r 和 $ad_{(-f)}r$ 是完备的，条件 (v) 成立。与 θ 相关的全局微分同胚

$$
\begin{aligned}
z_1 &= x_1 \\
z_2 &= x_2 - \frac{\theta_1}{2}x_1^2
\end{aligned}
$$

使得在 z 坐标系下系统 (7.6) 变为

$$
\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= z_2 + \frac{\theta_1}{2}z_1^2 \\
\dot{z}_2 &= \theta_2 z_1^2 + u \\
y &= z_1
\end{aligned}
$$

此时 $ad_{(-f)}r = \partial/\partial z_1$ 且 $r = \partial/\partial z_2$。 □

7.2 鲁棒镇定

定义 7.2.1 对于系统(7.1)，所谓全局**鲁棒输出反馈镇定控制(robust output feedback stabilizing control)**是一个有限维系统

$$\begin{aligned} \dot{w} &= \mu(w, y(t)), \qquad \mu(0,0) = 0, w(0) = w_0, w \in \mathbb{R}^s \\ u &= u(w, y(t)), \qquad u(0,0) = 0, u \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

它使得对于取值于 $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ 中的任意 θ，$(x, w) = 0$ 是闭环系统的全局渐近稳定平衡点。 □

若定理 7.1.1 的假设成立且 $\rho = 1$，则条件 (iv) 中的 b 使得 $b_1 \neq 0$。在这种情形下，下面的结论说明如何设计一个全局(静态)鲁棒镇定输出反馈控制。

定理 7.2.1 **鲁棒输出反馈镇定**：$\rho = 1$ **(Robust Output Feedback Stabilization:** $\rho = 1$**)** 令系统(7.1)具有全局相对阶 $\rho = 1$，且假设 $f(0,\theta) = 0$，$h(0,\theta) = 0$，$\forall \theta \in \Omega$，其中 Ω 是一个已知的紧集。若定理 7.1.1 的条件 (i)～条件 (v) 成立，则对于系统(7.1)存在一个全局鲁棒静态输出反馈镇定控制。 □

证明: 由于定理 7.1.1 的条件 (i)～条件 (v) 成立，定理 7.1.1 适用且保证系统(7.1)可全局变换为式(7.3)。由于 $\rho = 1$，因此对于任意的 $\theta \in \Omega$，$b_1(\theta) \neq 0$。实施坐标变换 $\zeta \to (\eta_1, \cdots, \eta_{n-1}, y) \triangleq (\eta, y)$

$$\begin{aligned} \eta_i &= \zeta_{i+1} - \frac{b_{i+1}(\theta)}{b_1(\theta)}\zeta_1, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n-1 \\ y &= \zeta_1 \end{aligned} \tag{7.7}$$

在新的坐标系下有

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= \begin{bmatrix} -b_2/b_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -b_3/b_1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -b_{n-1}/b_1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -b_n/b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \eta + y \begin{bmatrix} b_3/b_1 - b_2^2/b_1^2 \\ b_4/b_1 - b_3 b_2/b_1^2 \\ \vdots \\ b_n/b_1 - b_{n-1}b_2/b_1^2 \\ -b_n b_2/b_1^2 \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} \psi_2 - (b_2/b_1)\psi_1 \\ \psi_3 - (b_3/b_1)\psi_1 \\ \vdots \\ \psi_{n-1} - (b_{n-1}/b_1)\psi_1 \\ \psi_n - (b_n/b_1)\psi_1 \end{bmatrix} \triangleq \Gamma(\theta)\eta + y\beta(\theta) + \bar{\psi}(y,\theta) \\ \dot{y} &= \eta_1 + \frac{b_2(\theta)}{b_1(\theta)} y + \psi_1(y,\theta) + b_1(\theta)\sigma(y)u \end{aligned} \tag{7.8}$$

其中 ψ_i 表示向量 ψ 的第 i 个分量。由于假设 $f(x,\theta)$ 是光滑的且 $f(0,\theta) = 0, \forall \theta \in \Omega$，因此式(7.3)中的 $\psi(y,\theta)$ 也是光滑的，且 $\psi(0,\theta) = 0, \forall \theta \in \Omega$，故

$$\psi(y,\theta) = y\phi(y,\theta), \qquad \forall \theta \in \Omega \tag{7.9}$$

其中 $\phi(y,\theta)$ 是一个光滑向量。利用式(7.9)，系统(7.8)变为

$$\dot{\eta} = \Gamma(\theta)\eta + y\beta(\theta) + y\gamma(y,\theta)$$

$$\dot{y} = \eta_1 + \frac{b_2(\theta)}{b_1(\theta)}y + y\phi_1(y,\theta) + b_1(\theta)\sigma(y)u$$

其中

$$\gamma(y,\theta) = \begin{bmatrix} \phi_2 - (b_2/b_1)\phi_1 \\ \phi_3 - (b_3/b_1)\phi_1 \\ \vdots \\ \phi_{n-1} - (b_{n-1}/b_1)\phi_1 \\ \phi_n - (b_n/b_1)\phi_1 \end{bmatrix} \tag{7.10}$$

且 ϕ_i 表示向量 ϕ 的第 i 个分量。由于 $\theta \in \Omega$ 且假设 Ω 是一个已知的紧集，故存在两个光滑函数 $\alpha_1(y)$ 和 $\alpha_2(y)$ (可以计算得出)，使得对于任意的 $\theta \in \Omega$ 有

$$\begin{aligned} \alpha_1(y) &\geqslant |\phi_1(y,\theta)| \\ \alpha_2(y) &\geqslant \|\gamma(y,\theta)\| \end{aligned} \tag{7.11}$$

令静态输出反馈控制

$$u = -\sigma^{-1}(y)y[k_1 + k_2\alpha_1(y) + k_3\alpha_2^2(y)] \tag{7.12}$$

其中 $k_i, 1 \leqslant i \leqslant 3$ 是正的常数(不失一般性，假设 $b_1(\theta)$ 是正的)。考虑函数

$$V(y,\eta) = \eta^{\mathrm{T}}P(\theta)\eta + \frac{1}{2}y^2 \tag{7.13}$$

其中 $P(\theta)$ 是如下 Lyapunov 方程的对称正定解(对于所有的 $\theta \in \Omega$，$\Gamma(\theta)$ 是渐近稳定的)

$$\Gamma^{\mathrm{T}}(\theta)P + P\Gamma(\theta) = -2I \tag{7.14}$$

其对时间的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V} = {} & y\eta_1 + y^2\frac{b_2}{b_1} + y^2\phi_1 - b_1k_1y^2 - b_1k_2y^2\alpha_1 - b_1k_3y^2\alpha_2^2 \\ & -2\eta^{\mathrm{T}}\eta + 2\eta^{\mathrm{T}}P\beta y + 2\eta^{\mathrm{T}}P\gamma y \end{aligned}$$

且满足不等式

$$\begin{aligned} \dot{V} \leqslant {} & -\begin{bmatrix} |y| \\ \|\eta\| \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} b_1k_1 - b_2/b_1 & -(\frac{1}{2} + \|P\|\|\beta\|) \\ -(\frac{1}{2} + \|P\|\|\beta\|) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |y| \\ \|\eta\| \end{bmatrix} \\ & -\begin{bmatrix} |y| \\ \|\eta\| \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} b_1k_3\alpha_2^2 & -\|P\|\|\gamma\| \\ -\|P\|\|\gamma\| & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |y| \\ \|\eta\| \end{bmatrix} \\ & -y^2(b_1k_2\alpha_2 - \phi_1) \end{aligned}$$

若选择 k_1, k_2 和 k_3，使得对于所有的 $\theta \in \Omega$ (Ω 是一个已知紧集)满足

$$\begin{aligned} k_1 &> \left[\left(\frac{1}{2} + \|P(\theta)\|\|\beta(\theta)\|\right)^2 + \frac{b_2(\theta)}{b_1(\theta)}\right]\frac{1}{b_1(\theta)} \\ k_2 &\geqslant \frac{1}{b_1(\theta)} \\ k_3 &\geqslant \|P(\theta)\|^2\frac{1}{b_1(\theta)} \end{aligned} \tag{7.15}$$

则有

$$\dot{V} \leqslant -\varepsilon \left\| \begin{bmatrix} y \\ \eta \end{bmatrix} \right\|^2 \tag{7.16}$$

其中ε是一个正实数。从式(7.13)和式(7.16)以及定理B.1.6可知，平衡点$(y,\eta)=0$是全局指数稳定的。由于微分同胚(7.2)和(7.7)是全局有定义的且保持原点不变，因此式(7.12)即为系统(7.1)的一个全局静态输出反馈镇定控制。 □

评注 7.2.1 定理7.2.1可以推广到$\sigma(y)$未知且与参数向量θ相关的情形。假设对于任意的$y \in \mathbb{R}$，$b_1(\theta)\sigma(y,\theta)$ 的符号是正的，且有

$$0 < \alpha_3(y) \leqslant |\sigma(y,\theta)|, \qquad \forall \theta \in \Omega$$

利用与定理7.2.1的证明中相同的论据，可给定鲁棒输出反馈镇定控制如下：

$$u \;=\; -\alpha_3^{-1}(y)y[k_1 + k_2\alpha_1(y) + k_3\alpha_2^2(y)]$$

□

对于具有未知系数的线性系统，以下结论是定理7.2.1的特例。

定理 7.2.2 *考虑一个线性时不变系统，由传递函数表示为*

$$W(s) \;=\; \frac{b_1 s^{n-1} + \cdots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n}$$

*其中$\theta = [b_1,\cdots,b_n,a_1,\cdots,a_n]^{\mathrm{T}}$是未知系数。假设系统阶数$n$的(有限的)上界已知，参数向量$\theta$的范数的(有限的)上界已知，向量$b=[b_1,\cdots,b_n]^{\mathrm{T}}$是Hurwitz的，$b_1 \neq 0$且具有已知定常的符号，则对于该线性系统存在一个静态***鲁棒线性输出反馈(robust linear output feedback)***镇定控制器。* □

证明: 注意评注7.1.2，选择$W(s)$如式(7.5)所示的观测器型实现，则在新的坐标系(7.7)下，可得式(7.8)，即

$$\begin{aligned}
\dot{\eta} \;&=\; \begin{bmatrix} -b_2/b_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -b_3/b_1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -b_{n-1}/b_1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -b_n/b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \eta + y \begin{bmatrix} b_3/b_1 - b_2^2/b_1^2 \\ b_4/b_1 - (b_3 b_2)/b_1^2 \\ \vdots \\ b_n/b_1 - (b_{n-1}b_2)/b_1^2 \\ -(b_n b_2)/b_1^2 \end{bmatrix} \\
&\quad + y \begin{bmatrix} -a_2 + (a_1 b_2)/b_1 \\ -a_3 + (a_1 b_3)/b_1 \\ \vdots \\ -a_{n-1} + (a_1 b_{n-1})/b_1 \\ -a_n + (a_1 b_n)/b_1 \end{bmatrix} \\
&\triangleq\; \Gamma(\theta)\eta + y\beta(\theta) \\
\dot{y} \;&=\; \eta_1 + \left(\frac{b_2}{b_1} - a_1\right) y + b_1 u \triangleq \eta_1 + \frac{\bar{b}_2}{b_1} y + b_1 u
\end{aligned} \tag{7.17}$$

以下即可按照定理 7.2.1 的证明进行。在这种情形下，式 (7.11) 中的 $\alpha_1(y)$ 和 $\alpha_2(y)$ 取为零(由于 $\phi=0,\gamma=0$)以及 $\sigma(y)=1$，u 简化为 $u=-k_1y$，其中 k_1 满足式 (7.15) 的第一个不等式，但由 $\bar{b}_2$ 代替 b_2。 □

评注 7.2.2 众所周知，一个线性静态输出反馈可以镇定任何最小相位且相对阶 $\rho=1$ 的线性时不变系统。定理 7.2.1 将该经典结论推广到了一类非线性系统。 □

评注 7.2.3 若式 (7.3) 中的非线性部分满足全局 Lipschitz 假设，即不等式 (7.11) 替换为

$$\begin{aligned}|\phi_1(y,\theta)| &\leqslant k_\phi, \qquad \forall\theta\in\Omega,\forall y\in\mathbb{R}\\ \|\gamma(y,\theta)\| &\leqslant k_\gamma, \qquad \forall\theta\in\Omega,\forall y\in\mathbb{R}\end{aligned} \tag{7.18}$$

则按照定理 7.2.2 的证明和评注 7.2.1，可以证明线性静态输出反馈 $u=-ky$ 是一个鲁棒镇定控制器。 □

评注 7.2.4 控制 (7.12) 是针对最坏情形设计的。它不需要精确已知函数 $\phi_1(y,\theta)$ 和 $\gamma(y,\theta)$ ，而只需要已知式 (7.11) 给出的函数的界。在这种意义下，该控制律对于不确定非线性部分是鲁棒的。 □

下面将定理 7.2.1 和定理 7.2.2 推广到相对阶 $\rho>1$ 的系统。

定理 7.2.3 **鲁棒输出反馈镇定：$\rho>1$(Robust Output Feedback Stabilization: $\rho>1$)** *设系统 (7.1) 具有全局相对阶 ρ, $2\leqslant\rho\leqslant n,\forall\theta\in\Omega$，且假设 $f(0,\theta)=0,h(0,\theta)=0,\forall\theta\in\Omega$，$\Omega$ 为已知紧集。若定理 7.1.1 的条件 (i)～条件 (v) 成立，则对于系统 (7.1) 存在一个 $\rho-1$ 阶全局鲁棒输出反馈镇定控制。* □

证明：由于条件(i)～条件(v)均成立，因此应用定理 7.1.1 可将系统 (7.1) 变换为式 (7.3)，其中 b 是一个 Hurwitz 向量，$b_\rho\neq0,\forall\theta\in\Omega$,且具有已知定常的符号。引入滤波器($\lambda_i>0,1\leqslant i\leqslant\rho-1$)

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\dot{\xi}_1\\ \dot{\xi}_2\\ \vdots\\ \dot{\xi}_{\rho-1}\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}-\lambda_1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & -\lambda_2 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda_{\rho-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \vdots\\ \xi_{\rho-1}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\ \vdots\\1\end{bmatrix}\sigma(y)u\\ &\triangleq \Lambda\xi+b_{\mathrm{f}}\sigma(y)u, \qquad \xi(0)=\xi_0\end{aligned} \tag{7.19}$$

由 $d[i](\theta)\in\mathbb{R}^n$，$1\leqslant i\leqslant\rho$，按如下方式递归地定义 ρ 表示的定常向量：

$$d[\rho](\theta) = b(\theta) \tag{7.20}$$

$$d[i-1](\theta) = A_{\mathrm{c}}d[i](\theta)+\lambda_{i-1}d[i]\theta, \qquad \rho\geqslant i\geqslant 2 \tag{7.21}$$

其中 $b(\theta)$ 是式 (7.3) 中的 Hurwitz 向量。引入

$$z=\zeta-\sum_{i=2}^{\rho}d[i]\xi_{i-1} \tag{7.22}$$

求其对时间的导数，由式 (7.3) 和式 (7.19) 可得

$$\dot{z} = A_{\mathrm{c}}\zeta+b\sigma(y)u+\psi(y,\theta)$$

$$\begin{aligned}
& -\sum_{i=2}^{\rho-1} d[i](-\lambda_{i-1}\xi_{i-1}+\xi_i)+\lambda_{\rho-1}d[\rho]\xi_{\rho-1}-d[\rho]\sigma(y)u \\
= \;& A_c z+\psi(y,\theta)+\sum_{i=2}^{\rho}(A_c d[i]+\lambda_{i-1}d[i])\xi_{i-1}-\sum_{i=2}^{\rho-1}d[i]\xi_i \\
= \;& A_c z+d[1]\xi_1+\psi(y,\theta) \\
y = \;& c_c z
\end{aligned} \tag{7.23}$$

其中构造$d[1]$为(回顾式(7.20)和式(7.21))一个阶数为1的Hurwitz向量，且第一个分量$d_1[1]=b_\rho$。根据定理7.2.1的证明，实施坐标变换

$$\begin{aligned}
\eta_i &= z_{i+1}-\frac{d_{i+1}[1](\theta)}{d_1[1](\theta)}z_1, \qquad 1\leqslant i\leqslant n-1 \\
y &= z_1
\end{aligned} \tag{7.24}$$

在新的坐标系下有

$$\begin{aligned}
\dot\eta &= \Gamma(\theta)\eta+\beta(\theta)y+\bar\psi(y,\theta) \\
\dot y &= \eta_1+\frac{d_2[1](\theta)}{d_1[1](\theta)}y+\psi_1(y,\theta)+d_1[1](\theta)\xi_1
\end{aligned} \tag{7.25}$$

其中Γ,β和$\bar\psi$与式(7.8)中的定义相同，且由$d[1](\theta)$代替$b(\theta)$。利用式(7.9)，系统(7.25)变为

$$\begin{aligned}
\dot\eta &= \Gamma(\theta)\eta+\beta(\theta)y+\gamma(y,\theta)y \\
\dot y &= \eta_1+\frac{d_2[1](\theta)}{d_1[1](\theta)}y+\phi_1(y,\theta)y+d_1[1](\theta)\xi_1
\end{aligned} \tag{7.26}$$

其中γ定义与式(7.10)中的定义相同。现在考虑由式(7.26)和式(7.19)的第一个方程

$$\dot\xi_1=-\lambda_1\xi_1+\xi_2 \tag{7.27}$$

所构成的增广系统，称为(S_1)。实施坐标变换

$$\tilde\xi_1=\xi_1-\xi_1^*$$

其中(不失一般性，假设$b_\rho>0$，从而有$d_1[1]=b_\rho>0$)

$$\xi_1^*=-k_1y-k_2\alpha_1(y)y-k_3\alpha_2^2(y)y\triangleq y\phi_{\xi_1}(y)\triangleq\xi_1^*(y) \tag{7.28}$$

这里

$$\phi_{\xi_1}(y)=-k_1-k_2\alpha_1(y)-k_3\alpha_2^2(y)$$

其中$k_i, 1\leqslant i\leqslant 3$满足式(7.15)，$\alpha_1$和$\alpha_2$是满足式(7.11)的光滑函数，其中用$d[1]$代替$b$。那么，系统(7.26)和系统(7.27)变为

$$\begin{aligned}
\dot\eta &= \Gamma(\theta)\eta+\beta(\theta)y+\gamma(y,\theta)y \\
\dot y &= \eta_1+y\frac{d_2[1](\theta)}{d_1[1](\theta)}+y\phi_1(y,\theta)+d_1[1](\theta)\xi_1^*+d_1[1](\theta)\tilde\xi_1 \\
\dot{\tilde\xi}_1 &= -\lambda_1\tilde\xi_1-\dot\xi_1^*-\lambda_1\xi_1^*+\xi_2
\end{aligned} \tag{7.29}$$

考虑函数

$$V_1=\frac{1}{2}y^2+\eta^{\mathrm T}P(\theta)\eta+\tilde\xi_1^2 \tag{7.30}$$

其中P是方程(7.14)的解。现在，寻找一个函数$\xi_2^*(y,\xi_1)$，使得当式(7.29)中$\xi_2=\xi_2^*(y,\xi_1)$时$\dot{V}_1$是负定的。回顾定理7.2.1的证明，V_1对时间的导数满足不等式

$$\dot{V}_1 \leqslant -\varepsilon\left\|\begin{bmatrix} y \\ \eta \end{bmatrix}\right\|^2 + yd_1[1]\tilde{\xi}_1 - 2\lambda_1\tilde{\xi}_1^2 + 2\tilde{\xi}_1(\xi_2 - \dot{\xi}_1^* - \lambda_1\xi_1^*) \tag{7.31}$$

根据式(7.28)可得

$$\dot{\xi}_1^* = \frac{\partial \xi_1^*}{\partial y}\dot{y} \tag{7.32}$$

回顾式(7.29)给出的$\dot{y}$的表达式，定义

$$\xi_2^* = \lambda_1\xi_1^* - \frac{\partial \xi_1^*}{\partial y}\mu_1(y,\xi_1) - k_1[1]\tilde{\xi}_1 \triangleq \xi_2^*(y,\xi_1) \tag{7.33}$$

其中$k_1[1]$是一个正实数，$\mu_1(y,\xi_1)$是一个待定函数，从而当$\xi_2=\xi_2^*$时，根据式(7.28)、式(7.31)、式(7.32)和式(7.33)，可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 \quad \leqslant \quad & -\varepsilon\left\|\begin{bmatrix} y \\ \eta \end{bmatrix}\right\|^2 - 2\lambda_1\tilde{\xi}_1^2 - 2k_1[1]\tilde{\xi}_1^2 + d_1[1]y\tilde{\xi}_1 - 2\tilde{\xi}_1\frac{\partial \xi_1^*}{\partial y}\Big[\mu_1(y,\xi_1) \\ & +\eta_1 + \frac{d_2[1]}{d_1[1]}y + \phi_1(y,\theta)y + d_1[1]y\phi_{\xi_1}(y) + d_1[1]\tilde{\xi}_1\ \Big] \end{aligned} \tag{7.34}$$

现在令$\mu_1(y,\xi_1)$为

$$\mu_1(y,\xi_1) = \frac{1}{2}\tilde{\xi}_1\frac{\partial \xi_1^*}{\partial y}(k_2[1] + k_3[1]\alpha_1^2(y) + k_4[1]\phi_{\xi_1}^2(y)) \tag{7.35}$$

根据式(7.34)和式(7.35)，可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 \quad \leqslant \quad & -\frac{\varepsilon}{4}\left\|\begin{bmatrix} y \\ \eta \end{bmatrix}\right\|^2 - 2\lambda_1\tilde{\xi}_1^2 \\
& - \begin{bmatrix} \left|\tilde{\xi}_1\frac{\partial \xi_1^*}{\partial y}\right| \\ |y| \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} k_{2a}[1] & -\left|\frac{d_2[1]}{d_1[1]}\right| \\ -\left|\frac{d_2[1]}{d_1[1]}\right| & \frac{\varepsilon}{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left|\tilde{\xi}_1\frac{\partial \xi_1^*}{\partial y}\right| \\ |y| \end{bmatrix} \\
& - \begin{bmatrix} \left|\tilde{\xi}_1\frac{\partial \xi_1^*}{\partial y}\right| \\ |y| \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} k_3[1]\alpha_1^2 & -|\phi_1| \\ -|\phi_1| & \frac{\varepsilon}{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left|\tilde{\xi}_1\frac{\partial \xi_1^*}{\partial y}\right| \\ |y| \end{bmatrix} \\
& - \begin{bmatrix} \left|\tilde{\xi}_1\frac{\partial \xi_1^*}{\partial y}\right| \\ |y| \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} k_4[1]\phi_{\xi_1}^2 & -|d_1[1]\phi_{\xi_1}| \\ -|d_1[1]\phi_{\xi_1}| & \frac{\varepsilon}{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left|\tilde{\xi}_1\frac{\partial \xi_1^*}{\partial y}\right| \\ |y| \end{bmatrix} \\
& - \begin{bmatrix} \left|\tilde{\xi}_1\frac{\partial \xi_1^*}{\partial y}\right| \\ |\tilde{\xi}_1| \\ |y| \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} k_{2b}[1] & -|d_1[1]| & 0 \\ -|d_1[1]| & 2k_1[1] & -\frac{1}{2}|d_1[1]| \\ 0 & -\frac{1}{2}|d_1[1]| & \frac{\varepsilon}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left|\tilde{\xi}_1\frac{\partial \xi_1^*}{\partial y}\right| \\ |\tilde{\xi}_1| \\ |y| \end{bmatrix} \\
& - \begin{bmatrix} \left|\tilde{\xi}_1\frac{\partial \xi_1^*}{\partial y}\right| \\ |\eta_1| \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} k_{2c}[1] & -1 \\ -1 & \frac{\varepsilon}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left|\tilde{\xi}_1\frac{\partial \xi_1^*}{\partial y}\right| \\ |\eta_1| \end{bmatrix} \end{aligned}$$

其中 $k_2[1] = k_{2a}[1] + k_{2b}[1] + k_{2c}[1]$。选择

$$\begin{aligned}
k_1[1] &\geqslant \frac{d_1^2[1](\theta)}{\varepsilon}, \qquad \forall\theta\in\Omega \\
k_{2a}[1] &\geqslant \frac{12}{\varepsilon}\frac{d_2^2[1](\theta)}{d_1^2[1](\theta)}, \qquad \forall\theta\in\Omega \\
k_{2b}[1] &\geqslant \frac{d_1^2[1](\theta)}{k_1[1]}, \qquad \forall\theta\in\Omega \\
k_{2c}[1] &\geqslant \frac{4}{\varepsilon} \\
k_3[1] &\geqslant \frac{12}{\varepsilon} \\
k_4[1] &\geqslant \frac{12}{\varepsilon}d_1^2[1](\theta), \qquad \forall\theta\in\Omega
\end{aligned} \tag{7.36}$$

则有

$$\dot{V}_1 \leqslant -\frac{\varepsilon}{4}(y^2+\eta^{\mathrm{T}}\eta) - 2\lambda_1\tilde{\xi}_1^2 \leqslant -\varepsilon_1(y^2+\eta^{\mathrm{T}}\eta+\tilde{\xi}_1^2) \tag{7.37}$$

其中 ε_1 是一个合适的正数。若 $\rho=2$，则一阶输出反馈镇定控制为

$$\begin{aligned}
\dot{\xi}_1 &= -\lambda_1\xi_1 + \sigma(y)u \\
u &= \sigma^{-1}(y)\xi_2^*(y,\xi_1)
\end{aligned}$$

其中 ξ_2^* 由式 (7.33)、式(7.35) 和式 (7.28) 给出，常数满足不等式 (7.36)。若 $\rho>2$，证明可由归纳法得出。

命题 假设对于一个给定的下标 $i<\rho-1$，对于由式 (7.26) 以及

$$\begin{aligned}
\dot{\xi}_1 &= -\lambda_1\xi_1 + \xi_2 \\
&\vdots \\
\dot{\xi}_i &= -\lambda_i\xi_i + \xi_{i+1}
\end{aligned} \tag{7.38}$$

构成的增广系统(S_i)，存在 $i+1$ 个函数

$$\xi_1^*(y), \xi_2^*(y,\xi_1), \cdots, \xi_{i+1}^*(y,\xi_1,\cdots,\xi_i), \quad \xi_j(0,\cdots,0)=0, \quad 1\leqslant j\leqslant i+1$$

和坐标变换

$$(y,\eta,\xi_1,\cdots,\xi_i) \to (y,\eta,\tilde{\xi}_1,\cdots,\tilde{\xi}_i) = (y,\eta,\xi_1-\xi_1^*,\cdots,\xi_i-\xi_i^*)$$

使得函数

$$V_i = \eta^{\mathrm{T}}P\eta + \frac{1}{2}y^2 + \sum_{j=1}^{i}\tilde{\xi}_j^2$$

对时间的导数满足不等式(当(S_i)中 $\xi_{i+1}=\xi_{i+1}^*$ 时)

$$\dot{V}_i \leqslant -\varepsilon_i\left(y^2+\eta^{\mathrm{T}}\eta+\sum_{j=1}^{i}\tilde{\xi}_j^2\right) \tag{7.39}$$

其中 ε_i 是一个正实数，则对于由式 (7.26) 以及

$$\dot{\xi}_1 = -\lambda_1\xi_1 + \xi_2$$

$$\vdots$$

$$\dot{\xi}_{i+1} = -\lambda_{i+1}\xi_{i+1} + \xi_{i+2} \tag{7.40}$$

构成的增广系统(S_{i+1})，存在一个函数

$$\xi_{i+2}^* = \xi_{i+2}^*(y, \xi_1, \cdots, \xi_{i+1}), \quad \xi_{i+2}^*(0, \cdots, 0) = 0$$

和坐标变换

$$(y, \eta, \xi_1, \cdots, \xi_{i+1}) \to (y, \eta, \tilde{\xi}_1, \cdots, \tilde{\xi}_{i+1}) = (y, \eta, \xi_1 - \xi_1^*, \cdots, \xi_{i+1} - \xi_{i+1}^*) \tag{7.41}$$

使得函数

$$V_{i+1} = \eta^{\mathrm{T}} P \eta + \frac{1}{2} y^2 + \sum_{j=1}^{i+1} \tilde{\xi}_j^2 \tag{7.42}$$

对时间的导数满足不等式(当(S_{i+1})中$\xi_{i+2} = \xi_{i+2}^*$时)

$$\dot{V}_{i+1} \leqslant -\varepsilon_{i+1} \left(y^2 + \eta^{\mathrm{T}} \eta + \sum_{j=1}^{i+1} \tilde{\xi}_j^2 \right) \tag{7.43}$$

其中ε_{i+1}是一个正实数。

命题的证明: 考虑增广系统(S_{i+1})。实施坐标变换(7.41)。由式(7.39)，式(7.42)给出的函数V_{i+1}对时间的导数满足

$$\dot{V}_{i+1} \leqslant -\varepsilon_i \left(y^2 + \eta^{\mathrm{T}} \eta + \sum_{j=1}^{i} \tilde{\xi}_j^2 \right) + 2\tilde{\xi}_i \tilde{\xi}_{i+1} + 2\tilde{\xi}_{i+1} \dot{\tilde{\xi}}_{i+1}$$

因为

$$\dot{\tilde{\xi}}_{i+1} = -\lambda_{i+1} \tilde{\xi}_{i+1} - \lambda_{i+1} \xi_{i+1}^* - \sum_{j=1}^{i} \frac{\partial \xi_{i+1}^*}{\partial \xi_j} \dot{\xi}_j - \frac{\partial \xi_{i+1}^*}{\partial y} \dot{y} + \xi_{i+2} \tag{7.44}$$

定义

$$\xi_{i+2}^* = -\tilde{\xi}_i + \lambda_{i+1} \xi_{i+1}^* + \sum_{j=1}^{i} \frac{\partial \xi_{i+1}^*}{\partial \xi_j} \dot{\xi}_j - \frac{\partial \xi_{i+1}^*}{\partial y} \mu_{i+1}(t)$$

其中

$$\mu_{i+1}(t) = \frac{1}{2} \tilde{\xi}_{i+1} \frac{\partial \xi_{i+1}^*}{\partial y} \Big(k_1[i+1] + k_2[i+1] \alpha_1^2(y) + k_3[i+1] \phi_{\xi_1}^2(y) \Big)$$

在式(7.44)中令$\xi_{i+2} = \xi_{i+2}^*$，则V_{i+1}对时间的导数满足不等式

$$\begin{aligned} \dot{V}_{i+1} \leqslant\ & -\varepsilon_i \left(y^2 + \eta^{\mathrm{T}} \eta + \sum_{j=1}^{i} \tilde{\xi}_j^2 \right) - 2\lambda_{i+1} \tilde{\xi}_{i+1}^2 \\ & -2\tilde{\xi}_{i+1} \frac{\partial \xi_{i+1}^*}{\partial y} \left(\eta_1 + \frac{d_2[1]}{d_1[1]} y + y\phi_1 + y d_1[1] \phi_{\xi_1} + d_1[1] \tilde{\xi}_1 \right) \\ & -\tilde{\xi}_{i+1}^2 \left(\frac{\partial \xi_{i+1}^*}{\partial y} \right)^2 (k_1[i+1] + k_2[i+1] \alpha_1^2 + k_3[i+1] \phi_{\xi_1}^2) \end{aligned}$$

因此，选择常数满足$(k_1[i+1] = k_{1a}[i+1] + k_{1b}[i+1] + k_{1c}[i+1])$

$$k_{1a}[i+1] \geqslant \frac{12 d_2^2[1](\theta)}{\varepsilon_i d_1^2[1](\theta)}, \qquad \forall \theta \in \Omega$$

$$\begin{aligned}
k_{1b}[i+1] &\geqslant \frac{4}{\varepsilon_i}d_1^2[1](\theta), \qquad \forall\theta\in\Omega\\
k_{1c}[i+1] &\geqslant \frac{4}{\varepsilon_i}\\
k_2[i+1] &\geqslant \frac{12}{\varepsilon_i}\\
k_3[i+1] &\geqslant \frac{12}{\varepsilon_i}d_1^2[1](\theta), \qquad \forall\theta\in\Omega
\end{aligned} \tag{7.45}$$

从而得到不等式(7.43)，命题得证。

对于系统(S_1)，命题的假设满足。应用命题$\rho-2$次，迭代地构建一个函数$\xi_\rho^*(y,\xi_1,\cdots,\xi_{\rho-1})$，从而可以定义一个由滤波器(7.19)驱动的$\rho-1$阶的动态控制

$$u=\sigma^{-1}(y)\xi_\rho^*(y,\xi_1,\cdots,\xi_{\rho-1}) \tag{7.46}$$

在坐标系$(y,\eta,\tilde\xi_1,\cdots,\tilde\xi_{\rho-1})$下(回顾$\tilde\xi_i=\xi_i-\xi_i^*(y,\xi_1,\cdots,\xi_{i-1})$)，径向无界函数

$$V_{\rho-1} = \eta^{\mathrm T}P(\theta)\eta+\frac{1}{2}y^2+\sum_{j=1}^{\rho-1}\tilde\xi_j^2$$

是闭环系统的一个Lyapunov函数，且

$$\dot V_{\rho-1} \leqslant -\varepsilon_{\rho-1}\left(y^2+\eta^{\mathrm T}\eta+\sum_{j=1}^{\rho-1}\tilde\xi_j^2\right)$$

根据定理B.1.6可证明$(y,\eta,\xi)=0$是式(7.19)和(7.26)的一个全局指数稳定平衡点，从而对于所有的$\theta\in\Omega$，$(x,\xi)=0$是式(7.1)和式(7.19)的一个全局渐近稳定平衡点。 □

评注 7.2.5　对于非线性部分ϕ_1和γ，只需已知式(7.11)中的函数的界。若非线性部分$\psi(y,\theta)$满足全局Lipschitz条件且$\sigma(y)$是一个常数，则得出的镇定控制是动态线性的。 □

对于线性系统只要求已知状态空间维数n的上界，如下述结论所示。

定理 7.2.4　**鲁棒输出反馈镇定(线性)(Robust Output Feedback Stabilization(Linear))** *考虑一个线性时不变系统，由传递函数描述为*

$$W(s) = \frac{b_\rho s^{n-\rho}+\cdots+b_n}{s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_n}$$

*其中系数$\theta=[b_\rho,\cdots,b_n,a_1,\cdots,a_n]^{\mathrm T}$未知。假设相对阶$\rho$已知，系统阶数$n$的一个(有限)上界已知，参数向量$\theta$的范数(有限)上界已知，并且向量$b=[b_\rho,\cdots,b_n]^{\mathrm T}$是Hurwitz的，且$b_\rho$具有已知定常的符号，则存在一个$\rho-1$阶的***鲁棒线性输出反馈(robust linear output feedback)***镇定控制。* □

证明：对于$W(s)$，选择如式(7.5)所示的观测器型实现，并引入滤波器(见式(7.19))

$$\dot\xi=\Lambda\xi+b_{\mathrm f}u, \qquad \xi\in\mathbb{R}^{\rho-1},\xi(0)=\xi_0 \tag{7.47}$$

利用变换(7.22)，在z坐标系下有

$$\begin{aligned}
\dot z &= A_{\mathrm c}z-ay+d[1]\xi_1\\
y &= c_{\mathrm c}z
\end{aligned}$$

在新的坐标系(7.24)下有

$$
\begin{aligned}
\dot{\eta} &= \Gamma(\theta)\eta + y\beta(\theta) \\
\dot{y} &= \eta_1 + \left(\frac{d_2[1]}{d_1[1]} - a_1\right) y + d_1[1]\xi_1
\end{aligned}
$$

其中$\Gamma(\theta)$和$\beta(\theta)$同式(7.17)，用$d[1]$ 代替b。至此即可按照定理7.2.3完成证明。注意，由于在这种情形下，式(7.25)中的$\gamma(y,\theta)$和$\phi_1(y,\theta)$均为零，因此不等式(7.11)成立，其中$\alpha_1(y)=0$，$\alpha_2(y)=0$。从而，式(7.28)中的ξ_1^*变为y的一个线性函数

$$
\xi_1^* = -k_1 y \triangleq \xi_1^*(y)
$$

由于滤波器(7.47)也是线性的，最终的控制u是y和ξ的一个线性函数，即$\rho-1$阶的一个线性动态输出反馈控制。 □

例 7.2.1 系统

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= u + \theta_1 x \mathrm{e}^{\theta_2 x} \\
y &= x
\end{aligned} \tag{7.48}
$$

其中$[\theta_1,\theta_2]^{\mathrm{T}}$属于一个已知的紧集$\Omega$，由于定理7.2.1的假设成立且全局相对阶为$\rho=1$，因此该系统可通过输出反馈全局镇定。注意，非线性部分不是全局Lipschitz的。 □

例 7.2.2 系统

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 + x_1^{\theta} \\
\dot{x}_2 &= u \\
y &= x_1
\end{aligned}
$$

满足定理7.1.1的假设条件且全局相对阶$\rho=2$。非线性部分是不确定的，且仅已知是输出y的幂函数，θ属于一个已知区间。在这种情况下，定理7.2.3给出的镇定控制律是动态控制律，这是因为需要一个一阶滤波器将增广系统变为式(7.23)的形式。 □

例 7.2.3 考虑全局相对阶$\rho=2$的不确定性系统(ϕ和ψ是光滑函数)

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 + x_1\phi(x_1) \\
\dot{x}_2 &= u + x_1 x_2 \psi(x_1) \\
y &= x_1
\end{aligned}
$$

其中不含有未知参数，假设已知实值函数ϕ和ψ绝对值的光滑函数界$\bar{\phi}$和$\bar{\psi}$为

$$
\begin{aligned}
|\phi(x_1)| &\leqslant \bar{\phi}(x_1), \qquad \forall x_1 \in \mathbb{R} \\
|\psi(x_1)| &\leqslant \bar{\psi}(x_1), \qquad \forall x_1 \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

该系统可以写为式(7.1)所示的形式，其中

$$
\begin{aligned}
f &= (x_2 + x_1\phi(x_1))\frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 x_2 \psi(x_1)\frac{\partial}{\partial x_2} \\
g &= \frac{\partial}{\partial x_2}, \qquad h = x_1
\end{aligned}
$$

即使 ϕ 和 ψ 不是精确已知的，仍能验证定理 7.1.1 的条件 (i)~条件(v) 成立。事实上

$$h = x_1, \qquad L_f h = x_2 + x_1\phi(x_1)$$

从而有

$$\begin{aligned} dh &= dx_1 \\ d(L_f h) &= \left(\phi(x_1) + x_1\frac{\partial\phi(x_1)}{\partial x_1}\right)dx_1 + dx_2 \end{aligned}$$

这说明条件 (i) 成立且 $r = \partial/\partial x_2$。由于

$$ad_{(-f)}r = \frac{\partial}{\partial x_1} + (x_1\psi(x_1))\frac{\partial}{\partial x_2}$$

可得出

$$[g, ad_f r] = [r, ad_f r] = 0$$

因此条件 (ii) 和条件 (iii) 得以验证。由于 $g = r$，所以条件 (iv) 亦成立。向量场 r 和 $ad_f r$ 是完备的且与 $\psi(x_1)$ 无关。将系统变换为式 (7.3) 所示的全局微分同胚 (7.2) 为

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= x_1 \\ \zeta_2 &= x_2 - \int_0^{x_1}\xi\psi(\xi)d\xi \end{aligned}$$

在 ζ 坐标系下有

$$\begin{aligned} \dot\zeta_1 &= \zeta_2 + \int_0^{\zeta_1}\xi\psi(\xi)d\xi + \zeta_1\phi(\zeta_1) \\ \dot\zeta_2 &= u - \zeta_1^2\phi(\zeta_1)\psi(\zeta_1) \\ y &= \zeta_1 \end{aligned}$$

由于 $\rho = 2$，根据式 (7.19)，引入滤波器($\lambda = 1$)

$$\dot\xi = -\xi + u$$

根据式 (7.20) 和式 (7.21)，向量

$$d[1] = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

再根据式 (7.22)，在新的坐标系

$$z = \zeta - \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\xi$$

下有

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix}\dot z_1\\ \dot z_2\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}z_2\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\xi + \begin{bmatrix}\int_0^y \xi\psi(\xi)d\xi + y\phi(y)\\ -y^2\phi(y)\psi(y)\end{bmatrix} \\ y &= z_1 \end{aligned}$$

而根据式 (7.24)，在新的坐标系

$$\eta = z_2 - z_1$$

$$y = z_1$$

下，系统变为

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= -\eta - y - \left(y^2\phi(y)\psi(y) + y\phi(y) + \int_0^y \xi\psi(\xi)d\xi\right) \\ \dot{y} &= \eta + y + \xi + \int_0^y \xi\psi(\xi)d\xi + y\phi(y)\end{aligned}$$

由式 (7.28)，我们定义

$$\begin{aligned}\xi^* &= -k_1 y - k_2 y\left(\frac{1}{y}\int_0^y \xi\bar{\psi}(\xi)d\xi + \bar{\phi}(y)\right) \\ &\quad -k_3 y\left((1+y^2)\bar{\phi}(y)\bar{\psi}(y) + \bar{\phi}(y) + \frac{1}{y}\int_0^y \xi\bar{\psi}(\xi)d\xi\right)^2 = y\phi_\xi(y)\end{aligned}$$

回顾式 (7.29)，$\tilde{\xi} = \xi - \xi^*$ 的动态为

$$\dot{\tilde{\xi}} = -\tilde{\xi} - \xi^* - \dot{\xi}^* + u$$

综上所述，根据式 (7.33) 和式 (7.35)，系统的鲁棒镇定控制为

$$\begin{aligned}u &= \xi^* - k_1[1]\tilde{\xi} - \frac{d\xi^*}{dy}\left[\frac{1}{2}\tilde{\xi}\frac{d\xi^*}{dy}\left(k_2[1] + k_3[1](\frac{1}{y}\int_0^y \xi\bar{\psi}(y)d\xi + \bar{\phi}(y))^2\right.\right. \\ &\quad \left.\left. + k_4[1]\phi_\xi^2(y)\right)\right]\end{aligned}$$

□

7.3 自校正定点调节器

下面去掉对于所有的 $\theta \in \Omega$ 要求 $f(0,\theta) = 0$ 的假设。不要求存在与 θ 无关的平衡点；平衡点可以不存在或与 θ 相关，当存在外加的未知定常干扰时，这种情形是有可能发生的。我们将讨论更为广泛的定点调节问题，即设计一个全局输出反馈调节器，使得系统从任意初始状态出发都能够将输出 y 调节到任意期望的常数 y_{r}。本节设计的自校正调节器包含校正算法。当应用上一节给出的鲁棒控制时，自校正调节器不需要计算控制增益 (7.15)、控制增益 (7.36) 和控制增益 (7.45)。这样带来的好处是避免复杂的增益计算，而且当针对最坏的情况设计鲁棒控制时，增益往往取得很保守。当参数线性地加入时，相对鲁棒控制而言，自校正调节器具有另外的优点，即不需要已知紧集 Ω 的信息。

定义 7.3.1 对于系统 (7.1)，所谓全局**自校正输出反馈调节器(self-tuning output feedback regulator)**，是一个 $r+s$ 阶的有限维系统($\hat{k}$ 表示自校正的控制参数向量)

$$\begin{aligned}\dot{w} &= \mu_1(w, y(t), y_{\mathrm{r}}, \hat{k}), \qquad w(0) = w_0, w \in \mathbb{R}^r \\ \dot{\hat{k}} &= \mu_2(w, y(t), y_{\mathrm{r}}, \hat{k}), \qquad \hat{k}(0) = \hat{k}_0, \hat{k} \in \mathbb{R}^s \\ u &= u(w, y(t), y_{\mathrm{r}}, \hat{k}), \qquad u \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

其中 $y_{\mathrm{r}} \in \mathbb{R}$ 是期望的输出设定点，使得对于所有的 $\theta \in \Omega \subset \mathbb{R}^p$，任意的 $x(0), w_0$ 和 $\hat{k}_0$，对于

所有的 $t \geqslant 0$，闭环系统中 $\|x(t)\|, \|w(t)\|$ 以及 $\|\hat{k}(t)\|$ 是有界的，且

$$\lim_{t\to\infty}(y(t) - y_{\rm r}) = 0$$

□

定理 7.3.1 自校正输出反馈调节器：$\rho = 1$ **(Self-Tuning Output Feedback Regulation:** $\rho = 1$**)** 令系统 (7.1) 具有全局相对阶 $\rho = 1$，$\forall\theta \in \Omega$，Ω 是一个已知紧集，并假设存在 $x_\theta \in \mathbb{R}^n$，使得 $h(x_\theta, \theta) = 0, \forall\theta \in \Omega$。若定理 7.1.1 的条件 (i)～条件 (v) 成立，则对于系统 (7.1) 存在一个全局自校正输出反馈调节器。 □

证明：由于条件 (i)～条件(v) 成立且 $h(x_\theta, \theta) = 0$，由定理 7.1.1 充分性证明过程可知，存在一个全局微分同胚 $\zeta = T(x, \theta)$, $T(x_\theta, \theta) = 0$，将系统 (7.1) 变换为式 (7.8) 所示的形式。定义

$$\begin{aligned}
\eta_{\rm r} &= -\Gamma^{-1}(\theta)(\bar{\psi}(y_{\rm r}, \theta) + y_{\rm r}\beta(\theta)) \\
p(\theta) &= \frac{1}{b_1(\theta)}(y_{\rm r}\frac{b_2(\theta)}{b_1(\theta)} + \psi_1(y_{\rm r}, \theta) + \eta_{{\rm r}_1})
\end{aligned} \tag{7.49}$$

其中 $\eta_{{\rm r}_1}$ 表示 $\eta_{\rm r}$ 的第一个分量，系统 (7.8) 可以重新写为

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{\eta}} &= \Gamma(\theta)\tilde{\eta} + e\beta(\theta) + (\bar{\psi}(e + y_{\rm r}, \theta) - \bar{\psi}(y_{\rm r}, \theta)) \\
\dot{e} &= \tilde{\eta}_1 + e\frac{b_2(\theta)}{b_1(\theta)} + (\psi_1(e + y_{\rm r}, \theta) - \psi_1(y_{\rm r}, \theta)) \\
&\quad + b_1(\theta)(\sigma(y)u + p(\theta))
\end{aligned} \tag{7.50}$$

其中 $e = y - y_{\rm r}$ 为调节误差，$\tilde{\eta} = \eta - \eta_{\rm r}$。由于假设 $f(x, \theta)$ 是光滑的，则 $\psi_D(e, y_{\rm r}, \theta) = \psi(e + y_{\rm r}, \theta) - \psi(y_{\rm r}, \theta)$ 也是光滑的，且 $\psi_D(0, y_{\rm r}, \theta) = 0$，因此可以重新写为 $\psi_D(e, y_{\rm r}, \theta) = e\phi(e, y_{\rm r}, \theta)$，其中 $\phi(e, y_r, \theta)$ 是一个光滑函数。故式 (7.50) 亦可重新写为

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{\eta}} &= \Gamma(\theta)\tilde{\eta} + e\beta(\theta) + e\gamma(e, y_{\rm r}, \theta) \\
\dot{e} &= \tilde{\eta}_1 + e\frac{b_2(\theta)}{b_1(\theta)} + e\phi_1(e, y_{\rm r}, \theta) + b_1(\theta)(\sigma(y)u + p(\theta))
\end{aligned} \tag{7.51}$$

其中 γ 定义为

$$\gamma(e, y_{\rm r}, \theta) = \left[\phi_2(e, y_{\rm r}, \theta) - \frac{b_2}{b_1}\phi_1(e, y_{\rm r}, \theta), \cdots, \phi_n(e, y_{\rm r}, \theta) - \frac{b_n}{b_1}\phi_1(e, y_{\rm r}, \theta)\right]^{\rm T}$$

令 u 给定为

$$u = -\sigma^{-1}(y)e\left[\hat{k}_1(t) + \hat{k}_2(t)\alpha_1(e, y_{\rm r}) + \hat{k}_3(t)\alpha_2^2(e, y_{\rm r})\right] - \sigma^{-1}(y)\hat{p}(t) \tag{7.52}$$

其中 $\hat{k}_i(t), 1 \leqslant i \leqslant 3$ 是满足式 (7.15) 的未知常数 k_i 的估计，$\hat{p}(t)$ 是 $p(\theta)$ 的一个估计，且 α_1 和 α_2 满足

$$\begin{aligned}
\alpha_1(e, y_{\rm r}) &\geqslant |\phi_1(e, y_{\rm r}, \theta)|, \qquad \forall\theta \in \Omega \\
\alpha_2(e, y_{\rm r}) &\geqslant \|\gamma(e, y_{\rm r}, \theta)\|, \qquad \forall\theta \in \Omega
\end{aligned} \tag{7.53}$$

将式 (7.52) 代入式 (7.51)，可得

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{\eta}} &= \Gamma(\theta)\tilde{\eta} + e\beta(\theta) + e\gamma(e, y_{\rm r}, \theta) \\
\dot{e} &= \tilde{\eta}_1 + e\frac{b_2(\theta)}{b_1(\theta)} + e\phi_1(e, y_{\rm r}, \theta) - b_1(\theta)e(k_1 + k_2\alpha_1(e, y_{\rm r}) + k_3\alpha_2^2(e, y_{\rm r}))
\end{aligned}$$

$$+b_1(\theta)e(\tilde{k}_1+\tilde{k}_2\alpha_1(e,y_r)+\tilde{k}_3\alpha_2^2(e,y_r))+b_1(\theta)\tilde{p} \tag{7.54}$$

其中 $\tilde{k}_i=k_i-\hat{k}_i, 1\leqslant i\leqslant 3$ 且 $\tilde{p}=p-\hat{p}$。考虑函数(不失一般性，假设 $b_1>0$)

$$V=\tilde{\eta}^{\mathrm{T}}P(\theta)\tilde{\eta}+\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{2}b_1(\theta)\sum_{i=1}^{3}\tilde{k}_i^2+\frac{1}{2}b_1(\theta)\tilde{p}^2 \tag{7.55}$$

其中 $P(\theta)$ 是式 (7.14) 的解。考虑式 (7.13)、式 (7.16) 和式 (7.54)，有

$$\begin{aligned}\dot{V} \quad &\leqslant \quad -\varepsilon\left\|\begin{bmatrix} e \\ \tilde{\eta}\end{bmatrix}\right\|^2+b_1e^2(\tilde{k}_1+\tilde{k}_2\alpha_1+\tilde{k}_3\alpha_2^2)+b_1e\tilde{p} \\ &\quad +b_1\sum_{i=1}^{3}\tilde{k}_i\dot{\tilde{k}}_i+b_1\tilde{p}\dot{\tilde{p}}\end{aligned} \tag{7.56}$$

选择

$$\begin{aligned}\dot{\hat{k}}_1 &= e^2 \\ \dot{\hat{k}}_2 &= e^2\alpha_1(e,y_r) \\ \dot{\hat{k}}_3 &= e^2\alpha_2^2(e,y_r) \\ \dot{\hat{p}} &= e\end{aligned} \tag{7.57}$$

则不等式 (7.56) 变为

$$\dot{V}\leqslant-\varepsilon\left\|\begin{bmatrix} e \\ \tilde{\eta}\end{bmatrix}\right\|^2 \tag{7.58}$$

从式 (7.55) 和式 (7.58) 可知，$e(t), \|\tilde{\eta(t)}\|, \hat{k}_i(t), 1\leqslant i\leqslant 3$ 以及 $\hat{p}(t)$ 是有界的，参见式 (7.54)，表明 $\dot{e}(t)$ 和 $\|\dot{\tilde{\eta}}(t)\|$ 也是有界的。由于

$$\int_0^t\begin{bmatrix} e(\tau) & \tilde{\eta}(\tau)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} e(\tau) \\ \tilde{\eta}(\tau)\end{bmatrix}d\tau\leqslant-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\dot{V}(\tau)d\tau=-\frac{1}{\varepsilon}\left[V(0)-V(t)\right]$$

从而有

$$\lim_{t\to 0}\int_0^t\begin{bmatrix} e(\tau) & \tilde{\eta}(\tau)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} e(\tau) \\ \tilde{\eta}(\tau)\end{bmatrix}d\tau<\infty$$

因此对向量 $\left[e,\tilde{\eta}^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}$ 应用推论 B.2.1，可得

$$\lim_{t\to\infty}\left\|\begin{bmatrix} e(t) \\ \tilde{\eta}(t)\end{bmatrix}\right\|=0$$

□

评注 7.3.1 设 k_1, k_2 和 k_3 是满足式 (7.15) 的常数。令

$$k=\max_{1\leqslant i\leqslant 3}\{k_i\}$$

考虑用下面的控制律代替式 (7.52)

$$u=-\sigma^{-1}e\hat{k}(1+\alpha_1+\alpha_2^2)-\sigma^{-1}\hat{p} \tag{7.59}$$

其中 $\hat{k}$ 是 k 的一个时变估计。若选择 $\hat{k}(t)$ 和 $\hat{p}(t)$ 的自适应律为

$$\begin{aligned}\dot{\hat{k}} &= e^2(1+\alpha_1+\alpha_2^2)\\ \dot{\hat{p}} &= e\end{aligned}\tag{7.60}$$

则闭环系统 (7.51)、闭环系统 (7.59) 和闭环系统 (7.60) 满足 $e(t)$ 和 $\|\tilde{\eta}(t)\|$ 是有界的，且

$$\lim_{t\to\infty} = \left\|\left[\begin{array}{c} e(t)\\ \tilde{\eta}(t)\end{array}\right]\right\| = 0$$

□

当 $\rho > 1$ 时有如下结论。

定理 7.3.2 **自校正输出反馈调节**：$\rho > 1$ (**Self-Tuning Output Feedback Regulation:** $\rho > 1$) 令系统 (7.1) 具有全局相对阶 ρ, $2 \leqslant \rho \leqslant n$, $\forall\theta\in\Omega$，其中 Ω 是一个已知的紧集。若定理 7.1.1 的条件 (i)～条件 (v) 成立，则对于系统 (7.1) 存在一个全局自校正输出反馈调节器。 □

证明: 系统 (7.1) 可以变换为式 (7.25)(参见定理 7.2.3 的证明)，如定理 7.3.1 的证明所示，式 (7.25)可变换为

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\eta}} &= \Gamma(\theta)\tilde{\eta} + e\beta(\theta) + e\gamma(e, y_{\rm r}, \theta)\\ \dot{e} &= \tilde{\eta}_1 + \frac{d_2[1](\theta)}{d_1[1](\theta)}e + e\phi_1(e, y_{\rm r}, \theta) + d_1[1](\theta)(\xi_1 + p(\theta))\end{aligned}\tag{7.61}$$

其中 $\tilde{\eta}$ 和 p 如式 (7.49) 所定义，但用 $d[1](\theta)$ 代替 $b(\theta)$。考虑由式 (7.61) 以及

$$\dot{\xi}_1 = -\lambda_1\xi_1 + \xi_2$$

构成的增广系统，称为(S_1)，对其实施坐标变换

$$\tilde{\xi}_1 = \xi_1 - \xi_1^*\tag{7.62}$$

其中(不失一般性，假设 $b_\rho > 0$)

$$\begin{aligned}\xi_1^* &= -e(\hat{k}_1(t) + \hat{k}_2(t)\alpha_1(e, y_{\rm r}) + \hat{k}_3(t)\alpha_2^2(e, y_{\rm r})) - \hat{p}(t)\\ &\triangleq e\phi_{\xi_1}(e, t) - \hat{p}(t) \triangleq \xi_1^*(e, t)\end{aligned}\tag{7.63}$$

这里 $\hat{k}_i(t), 1 \leqslant i \leqslant 3$ 是满足式 (7.15) 的(未知)常数 k_i 的时变估计，$\hat{p}(t)$ 是 $p(\theta)$ 的估计，α_1 和 α_2 是满足式 (7.53) 的光滑函数。考虑函数

$$\bar{V}_1 = \frac{1}{2}e^2 + \tilde{\eta}^{\rm T}P(\theta)\tilde{\eta} + \tilde{\xi}_1^2 + \frac{1}{2}d_1[1](\theta)\sum_{i=1}^{3}\tilde{k}_i^2 + \frac{1}{2}d_1[1](\theta)\tilde{p}^2\tag{7.64}$$

其中 P 是式 (7.14) 解，$\tilde{k}_i = k_i - \hat{k}_i$，$\tilde{p} = p - \hat{p}$。那么，根据式 (7.30)、式 (7.31) 和式 (7.61) 可知，$\bar{V}_1$ 对时间的导数满足不等式

$$\begin{aligned}\dot{\bar{V}}_1 \leqslant\ & -\varepsilon\left\|\left[\begin{array}{c} e\\ \tilde{\eta}\end{array}\right]\right\|^2 + ed_1[1]\tilde{\xi}_1 - 2\lambda_1\tilde{\xi}_1^2 + 2\tilde{\xi}_1(\xi_2 - \dot{\xi}_1^* - \lambda_1\xi_1^*) + d_1[1]\tilde{p}e\\ & + d_1[1]e^2(\tilde{k}_1 + \tilde{k}_2\alpha_1 + \tilde{k}_3\alpha_2^2) + d_1[1]\sum_{i=1}^{3}\tilde{k}_i\dot{\hat{k}}_i + d_1[1]\tilde{p}\dot{\hat{p}}\end{aligned}$$

令 $\hat{k}_i$ 和 $\hat{p}$ 的动态特性给定如下：

$$\begin{aligned}\dot{\hat{k}}_1 &= e^2\\ \dot{\hat{k}}_2 &= e^2\alpha_1\\ \dot{\hat{k}}_3 &= e^2\alpha_2^2\\ \dot{\hat{p}} &= e\end{aligned}\tag{7.65}$$

由式(7.62)和式(7.63)，有

$$\dot{\xi}_1^* = \frac{\partial\xi_1^*}{\partial t} + \frac{\partial\xi_1^*}{\partial e}\left(\tilde{\eta}_1 + \frac{d_2[1]}{d_1[1]}e + e\phi_1 + d_1[1](\tilde{\xi}_1 + e\phi_{\xi_1} - \hat{p} + p)\right)$$

令

$$\begin{aligned}\xi_2^* &= \lambda_1\xi_1^* + \frac{\partial\xi_1^*}{\partial t} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\xi_1^*}{\partial e}\right)^2\tilde{\xi}_1\left[\hat{k}_2[1] + \hat{k}_3[1]\alpha_1^2 + \hat{k}_4[1]\phi_{\xi_1}^2\right] - \hat{k}_1[1]\tilde{\xi}_1\\ &\quad + \frac{\partial\xi_1^*}{\partial e}\hat{p}_1[1] - \frac{\partial\xi_1^*}{\partial e}\hat{p}_2[1]\hat{p}\\ &\triangleq \xi_2^*(e,\xi_1,t)\end{aligned}\tag{7.66}$$

其中 $\hat{p}_1[1]$ 是 $p_1 = d_1[1](\theta)p(\theta)$ 的一个估计，$\hat{p}_2[1]$ 是 $p_2 = d_1[1](\theta)$ 的一个估计，$\hat{k}_i[1], 1 \leqslant i \leqslant 4$ 是满足不等式(7.36)的未知常数 $k_i[1]$ 的估计。由式(7.64)~式(7.66)并考虑式(7.37)，有($\xi_2 = \xi_2^*$)

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 &\leqslant -\varepsilon_1\left\|\begin{bmatrix} e\\ \tilde{\eta}\\ \tilde{\xi}_1\end{bmatrix}\right\|^2 + \tilde{\xi}_1^2\left(\frac{\partial\xi_1^*}{\partial e}\right)^2(\tilde{k}_2[1] + \tilde{k}_3[1]\alpha_1^2 + \tilde{k}_4[1]\phi_{\xi_1}^2)\\ &\quad + 2\tilde{\xi}_1^2\tilde{k}_1[1] + 2\tilde{\xi}_1\frac{\partial\xi_1^*}{\partial e}(\tilde{p}_2[1]\hat{p} - \tilde{p}_1[1])\end{aligned}\tag{7.67}$$

其中 $\tilde{p}_1[1] = p_1 - \hat{p}_1[1]$，$\tilde{p}_2[1] = p_2 - \hat{p}_2[1]$。选择

$$\begin{aligned}\dot{\hat{k}}_1[1] &= \tilde{\xi}_1^2\\ \dot{\hat{k}}_2[1] &= \tilde{\xi}_1^2\left(\frac{\partial\xi_1^*}{\partial e}\right)^2\\ \dot{\hat{k}}_3[1] &= \tilde{\xi}_1^2\left(\frac{\partial\xi_1^*}{\partial e}\right)^2\alpha_1^2\\ \dot{\hat{k}}_4[1] &= \tilde{\xi}_1^2\left(\frac{\partial\xi_1^*}{\partial e}\right)^2\phi_{\xi_1}^2\\ \dot{\hat{p}}_1[1] &= -2\tilde{\xi}_1\frac{\partial\xi_1^*}{\partial e}\\ \dot{\hat{p}}_2[1] &= 2\tilde{\xi}_1\frac{\partial\xi_1^*}{\partial e}\hat{p}\end{aligned}\tag{7.68}$$

考虑函数

$$V_1 = \bar{V}_1 + \tilde{k}_1^2[1] + \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{4}\tilde{k}_i^2[1] + \frac{1}{2}(\tilde{p}_1^2[1] + \tilde{p}_2^2[1]) \triangleq \bar{V}_1 + \psi_1^2(t)$$

根据式 (7.67) 和式 (7.68)，有(其中 $\xi_2 = \xi_2^*$)

$$\dot{V} \leqslant -\varepsilon_1 \left\| \begin{bmatrix} e \\ \tilde{\eta} \\ \tilde{\xi}_1 \end{bmatrix} \right\|^2$$

若 $\rho = 2$，根据推论 B.2.1，自校正调节器为

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= -\lambda_1 \xi_1 + \sigma(y) u \\ u &= \sigma^{-1}(y) \xi_2^*(e, \xi_1, t) \end{aligned}$$

其中 ξ_2^* 由式 (7.66) 和式 (7.68) 给出。若 $\rho > 2$，通过归纳法可证得。

命题 假设给定一个下标 $i < \rho - 1$，由式 (7.61) 和式 (7.38) 构成的增广系统(S_i)，存在 $i+1$ 个函数

$$\xi_1^*(e,t), \xi_2^*(e,\xi_1,t), \cdots, \xi_{i+1}^*(e,\xi_1,\cdots,\xi_i,t)$$

和一个坐标变换

$$(e,\tilde{\eta},\xi_1,\cdots,\xi_i) \to (e,\tilde{\eta},\tilde{\xi}_1,\cdots,\tilde{\xi}_i) = (e,\tilde{\eta},\xi_1-\xi_1^*,\cdots,\xi_i-\xi_i^*)$$

使得函数

$$V_i = \tilde{\eta}^{\mathrm{T}} P \tilde{\eta} + \frac{1}{2} e^2 + \sum_{j=1}^{i} \tilde{\xi}_j^2 + \psi_i^2(t) \tag{7.69}$$

对于一个合适的 $\psi_i^2(t) \in \mathbb{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$，当在($S_i$)中 $\xi_{i+1} = \xi_{i+1}^*$ 时，其时间的导数满足不等式

$$\dot{V}_i \leqslant -\varepsilon_i \left\| \begin{bmatrix} e \\ \tilde{\eta} \\ \tilde{\xi}_1 \\ \vdots \\ \tilde{\xi}_i \end{bmatrix} \right\|^2 \tag{7.70}$$

其中，ε_i 是一个正实数。那么，对于由式 (7.61) 和式 (7.40) 构成的增广系统(S_{i+1})，存在一个函数

$$\xi_{i+2}^* = \xi_{i+2}^*(e,\xi_1,\cdots,\xi_{i+1},t)$$

和一个坐标变换

$$(e,\tilde{\eta},\xi_1,\cdots,\xi_{i+1}) \to (e,\tilde{\eta},\tilde{\xi}_1,\cdots,\tilde{\xi}_{i+1}) = (e,\tilde{\eta},\xi_1-\xi_1^*,\cdots,\xi_{i+1}-\xi_{i+1}^*) \tag{7.71}$$

使得函数

$$V_{i+1} = \tilde{\eta}^{\mathrm{T}} P \tilde{\eta} + \frac{1}{2} e^2 + \sum_{j=1}^{i+1} \tilde{\xi}_j^2 + \psi_{i+1}^2(t) \tag{7.72}$$

对于一个合适的 $\psi_{i+1}^2(t) \in \mathbb{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$，其时间的导数满足不等式(当在($S_{i+1}$)中 $\xi_{i+2} =$

ξ_{i+2}^* 时)

$$\dot{V}_{i+1} \leqslant -\varepsilon_{i+1} \left\| \begin{bmatrix} e \\ \tilde{\eta} \\ \tilde{\xi}_1 \\ \vdots \\ \tilde{\xi}_{i+1} \end{bmatrix} \right\|^2 \tag{7.73}$$

其中 ε_{i+2} 是一个正实数。

命题的证明: 考虑增广系统(S_{i+1})，实施坐标变换 (7.71)。令

$$\begin{aligned} \xi_{i+2}^* &= -\tilde{\xi}_i + \lambda_{i+1}\xi_{i+1}^* + \frac{\partial \xi_{i+1}^*}{\partial t} + \sum_{j=1}^{i} \frac{\partial \xi_{i+1}^*}{\partial \xi_j}\dot{\xi}_j \\ &\quad -\frac{1}{2}\tilde{\xi}_{i+1}\left(\frac{\partial \xi_{i+1}^*}{\partial e}\right)^2 (\hat{k}_1[i+1] + \hat{k}_2[i+1]\alpha_1^2 + \hat{k}_3[i+1]\phi_{\xi_1}^2) \\ &\quad +\frac{\partial \xi_{i+1}^*}{\partial e}(\hat{p}_1[i+1] - \hat{p}_2[i+1]\hat{p}) \end{aligned} \tag{7.74}$$

其中 $\hat{p}_1[i+1]$ 和 $\hat{p}_2[i+1]$ 分别是 p_1 和 p_2 的估计。选择

$$\begin{aligned} \dot{\hat{k}}_1[i+1] &= \tilde{\xi}_{i+1}^2\left(\frac{\partial \xi_{i+1}^*}{\partial e}\right)^2 \\ \dot{\hat{k}}_2[i+1] &= \tilde{\xi}_{i+1}^2\left(\frac{\partial \xi_{i+1}^*}{\partial e}\right)^2 \alpha_1^2 \\ \dot{\hat{k}}_3[i+1] &= \tilde{\xi}_{i+1}^2\left(\frac{\partial \xi_{i+1}^*}{\partial e}\right)^2 \phi_{\xi_1}^2 \\ \dot{\hat{p}}_1[i+1] &= -2\tilde{\xi}_{i+1}\frac{\partial \xi_{i+1}^*}{\partial e} \\ \dot{\hat{p}}_2[i+1] &= 2\tilde{\xi}_{i+1}\frac{\partial \xi_{i+1}^*}{\partial e}\hat{p} \end{aligned} \tag{7.75}$$

以及

$$\psi_{i+1}^2(t) = \psi_i^2(t) + \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{3}\tilde{k}_j^2[i+1] + \tilde{p}_1^2[i+1] + \tilde{p}_2^2[i+1]\right) \tag{7.76}$$

这里 $\tilde{p}_1[i+1] = p_1 - \hat{p}_1[i+1], \tilde{p}_2[i+1] = p_2 - \hat{p}_2[i+1]$ 以及 $\tilde{k}_j[i+1] = k_j[i+1] - \hat{k}_j[i+1]$，其中 $k_j[i+1]$ 满足式 (7.45)。那么，根据式 (7.40)、式 (7.69)、式 (7.70) 以及式 (7.74)~式 (7.76) 可知，式 (7.72) 对时间的导数满足

$$\dot{V}_{i+1} \leqslant -\varepsilon_i \left\| \begin{bmatrix} e \\ \tilde{\eta} \\ \tilde{\xi}_1 \\ \vdots \\ \tilde{\xi}_i \end{bmatrix} \right\|^2 - 2\lambda_{i+1}\tilde{\xi}_{i+1}^2$$

其中 $\xi_{i+2} = \xi_{i+2}^*$，这意味着式 (7.73) 成立。

如前所述，已经证明对于系统 (S_1) 命题的假设成立。应用命题 $\rho-2$ 次，可以构造一个

函数

$$\xi_\rho^*(e,\xi_1,\cdots,\xi_{\rho-1},t)$$

从而可以定义控制

$$u=\sigma^{-1}(y)\xi_\rho^* \tag{7.77}$$

和一个坐标变换 $(e,\tilde{\eta},\xi_1,\cdots,\xi_{\rho-1})\to(e,\tilde{\eta},\tilde{\xi}_1,\cdots,\tilde{\xi}_{\rho-1})$，其中 $\tilde{\xi}_i=\xi_i-\xi_i^*$，使得函数

$$V_{\rho-1}=\tilde{\eta}^{\mathrm{T}}P(\theta)\tilde{\eta}+\frac{1}{2}e^2+\sum_{j=1}^{\rho-1}\tilde{\xi}_j^2+\psi_{\rho-1}^2(t)$$

其中 $\psi_{\rho-1}^2(t)$ 是一个合适的 $\mathbb{C}^1$ 函数，其对时间的导数满足不等式

$$\dot{V}_{\rho-1}\leqslant-\varepsilon_{\rho-1}\left\|\begin{bmatrix}e\\\tilde{\eta}\\\tilde{\xi}_1\\\vdots\\\tilde{\xi}_{\rho-1}\end{bmatrix}\right\|^2$$

其中 $\varepsilon_{\rho-1}$ 是一个正实数，从而可以得出 $e(t),\|\tilde{\eta}(t)\|,\tilde{\xi}_i(t),1\leqslant i\leqslant\rho-1$ 以及 $\psi_{\rho-1}(t)$ 是有界的。与定理 7.3.1 的证明相同，可以应用推论 B.2.1 证明

$$\lim_{t\to\infty}\left\|\begin{bmatrix}e(t)\\\tilde{\eta}(t)\\\tilde{\xi}_1(t)\\\vdots\\\tilde{\xi}_{\rho-1}(t)\end{bmatrix}\right\|=0$$

□

评注 7.3.2 可以减少需要校正的参数的个数。令 $k_i,1\leqslant i\leqslant 3$ 是满足式 (7.15) 的常数。定义

$$k=\max_{1\leqslant i\leqslant 3}k_i$$

考虑以

$$\xi_1^*=-\hat{k}e(1+\alpha_1+\alpha_2^2)-\hat{p}\triangleq\phi_{\xi_1}(e,t)e-\hat{p}$$

代替式 (7.63)，其中 $\hat{k}$ 是 k 的一个估计值，且由下式产生:

$$\dot{\hat{k}}=e^2(1+\alpha_1+\alpha_2^2)$$

而 $\hat{p}$ 与式 (7.65) 中的定义相同。令

$$\begin{aligned}\xi_2^*&=\lambda_1\xi_1^*+\frac{\partial\xi_1^*}{\partial t}-\hat{k}_1\left[\frac{\tilde{\xi}_1}{2}\left(\frac{\partial\xi_1^*}{\partial e}\right)^2(1+\alpha_1^2+\phi_{\xi_1}^2)+\tilde{\xi}_1\right]\\&\quad+\frac{\partial\xi_1^*}{\partial e}(\hat{p}_1[1]-\hat{p}_2[1]\hat{p})\end{aligned}$$

这里 $\hat{k}_1$ 是常数

$$k_1=\max_{1\leqslant j\leqslant 4}k_j[1]$$

的一个估计，其中 $k_j[1]$ 满足式 (7.36)，$\hat{p}_1[1]$ 和 $\hat{p}_2[1]$ 由式 (7.68) 定义。$\hat{k}_1$ 的动态给定为

$$\dot{\hat{k}}_1=\tilde{\xi}_1^2\left(\frac{\partial\xi_1^*}{\partial e}\right)^2(1+\alpha_1^2+\phi_{\xi_1}^2)+2\tilde{\xi}_1^2$$

相应地，式 (7.74) 中 ξ_{i+2}^* 的表达式修改为

$$\begin{aligned}\xi_{i+2}^* &= -\tilde{\xi}_i+\lambda_{i+1}\xi_{i+1}^*+\frac{\partial\xi_{i+1}^*}{\partial t}+\sum_{j=1}^{i}\frac{\partial\xi_{i+1}^*}{\partial\xi_j}\dot{\xi}_j\\ &\quad -\hat{k}_{i+1}\frac{\tilde{\xi}_{i+1}}{2}\left(\frac{\partial\xi_{i+1}^*}{\partial e}\right)^2(1+\alpha_1^2+\phi_{\xi_1}^2)+\frac{\partial\xi_{i+1}^*}{\partial e}(\hat{p}_1[i+1]-\hat{p}_2[i+1]\hat{p})\end{aligned}$$

这里 $\hat{p}_1[i+1]$ 和 $\hat{p}_2[i+1]$ 的动态由式 (7.75) 以及

$$\dot{\hat{k}}_{i+1}=\tilde{\xi}_{i+1}^2\left(\frac{\partial\xi_{i+1}^*}{\partial e}\right)^2(1+\alpha_1^2+\phi_{\xi_1}^2)$$

给定。可验证式 (7.77) 给出的最终控制 u 是一个全局自校正调节器。若 $\forall\theta\in\Omega$, $p(\theta)=0$，则不需要估计器 $\hat{p}(t)$ 和 $\hat{p}_1[i](t), 1\leqslant i\leqslant\rho-1$。 □

评注 7.3.3 假设式 (7.53) 中出现的函数 $\alpha_1(e,y_{\rm r})$ 和 $\alpha_2(e,y_{\rm r})$ 不是精确已知的，但是已知两个函数 $\bar{\alpha}_1(e,y_{\rm r})$ 和 $\bar{\alpha}_2(e,y_{\rm r})$ 对于适当的未知常数 k_ϕ 和 k_γ 满足不等式

$$\begin{aligned}k_\phi\bar{\alpha}_1(e,y_{\rm r}) &\geqslant |\phi_1(e,y_{\rm r},\theta)|\\ k_\gamma\bar{\alpha}_2(e,y_{\rm r}) &\geqslant \|\gamma(e,y_{\rm r},\theta)\|\end{aligned}\tag{7.78}$$

在相对阶 $\rho=1$ 的情形下，当由 $\bar{\alpha}_1$ 和 $\bar{\alpha}_2$ 代替 α_1 和 α_2 时，自校正控制算法 (7.52)、控制算法 (7.57) 和控制算法 (7.59)、控制算法 (7.60) 仍然能够保证全局渐近收敛性。这可由定理 7.3.1 证明中的论据说明。当 $\rho>1$ 时，可以修改定理 7.3.2 的证明，以适用于更为宽松的假设 (7.78)，其中用 $\bar{\alpha}_1$ 和 $\bar{\alpha}_2$ 代替 α_1 和 α_2。注意，在这种情况下只要求 θ 属于一个紧集 Ω，Ω 可以是未知的。 □

例 7.3.1 考虑系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2+\mathrm{e}^{\theta y}-1\\ \dot{x}_2 &= x_3\\ \dot{x}_3 &= u\\ y &= x_1+2x_2+x_3\end{aligned}\tag{7.79}$$

由于该系统满足定理 7.1.1 的条件 (i)～条件 (v) 且全局相对阶 $\rho=1$，定理 7.2.1 和定理 7.3.1 适用，利用输出反馈可以设计一个全局鲁棒控制和一个自校正调节器。线性变换

$$\begin{aligned}\zeta_1 &= x_1+2x_2+x_3\\ \zeta_2 &= x_2+2x_3\\ \zeta_3 &= x_3\end{aligned}$$

将系统 (7.79) 变换为

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}_1 &= \zeta_2+u+(\mathrm{e}^{\theta y}-1)\\ \dot{\zeta}_2 &= \zeta_3+2u\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}_3 &= u \\ y &= \zeta_1\end{aligned}$$

即为式(7.3)所示的形式，其中 $b=[1,2,1]^{\mathrm{T}}$ 是一个 Hurwitz 向量。系统(7.79)的镇定控制律可以按照定理 7.2.1 的证明构造；假设 $|\theta|\leqslant M$，可得

$$u = -k_1 y - k_2 y\left|\frac{\mathrm{e}^{My}-1}{y}\right| - k_3\frac{(\mathrm{e}^{My}-1)^2}{y}$$

按照定理 7.3.1 和评注 7.3.1可得自校正输出反馈调节器为

$$\begin{aligned}u &= -\hat{k}y\left[1+\left|\frac{\mathrm{e}^{My}-1}{y}\right|+\left(\frac{\mathrm{e}^{My}-1}{y}\right)^2\right] \\ \dot{\hat{k}} &= y^2\left[1+\left|\frac{\mathrm{e}^{My}-1}{y}\right|+\left(\frac{\mathrm{e}^{My}-1}{y}\right)^2\right]\end{aligned}$$

□

7.4 自适应跟踪

在这一节中，假设参数向量 θ 是线性的，即

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x)+\left[g_0(x)+\sum_{i=1}^{p}\theta_i g_i(x)\right]u+\sum_{i=1}^{p}\theta_i q_i(x) \\ &\triangleq f(x)+g(x,\theta)u+Q(x)\theta \\ y &= h(x)\end{aligned} \tag{7.80}$$

其中 $x\in\mathbb{R}^n$ 是状态向量，$u\in\mathbb{R}$ 是控制，$\theta=[\theta_1,\cdots,\theta_p]^{\mathrm{T}}$ 是定常的不确定参数向量，且属于 $\mathbb{R}^p$ 中的一个闭子集 Ω，$h:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 是光滑的输出函数，以及 $f,g_0,g_i,q_i,1\leqslant i\leqslant p$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中光滑的向量场，且对于所有的 $x\in\mathbb{R}^n$ 有 $g_0(x)\neq 0$。不失一般性，假设 $h(0)=0$，而 $\theta=0$ 是标称参数。我们将说明如何设计如下定义的自适应跟踪控制。

定义 7.4.1 *对于系统*(7.80)，*所谓全局* **自适应输出反馈跟踪控制(adaptive output feedback tracking control)**，*是一个有限维系统*

$$\begin{aligned}\dot{w} &= \mu(w,y(t),t), & w(0)=w_0, w\in\mathbb{R}^s \\ u &= u(w,y(t),t), & u\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

对于所有的 $t\geqslant 0$，$\forall x(0)\in\mathbb{R}^n,\forall w_0\in\mathbb{R}^s,\forall\theta\in\Omega$ *以及任意有界光滑且时间导数有界的参考输出* $y_{\mathrm{r}}(t)$，*闭环系统满足* $\|x(t)\|,\|w(t)\|$ *和* $u(t)$ *有界，且*

$$\lim_{t\to\infty}[y(t)-y_{\mathrm{r}}(t)]=0$$

□

评注 7.4.1 虽然式(7.80)中的线性参数化对于更一般的一类系统(7.1)施加了限制，但自适应跟踪控制比自校正调节器更有用，这是因为它可以跟踪时变参考输出信号 $y_{\mathrm{r}}(t)$，而调节器只能跟踪定常参考输出 y_{r}。 □

现在将关注如式(7.80)的一类系统，这类系统可由下述结论给出的与坐标无关的几何条件来界定，下述结论是定理 7.1.1 线性参数化的特殊情形。

定理 7.4.1 令系统(7.80)对于所有的$\theta \in \Omega$具有全局相对阶ρ，则系统(7.80)可通过一个全局状态空间微分同胚(与θ无关)

$$\zeta = T(x), \qquad T(0) = 0,\ \zeta \in \mathbb{R}^n$$

变换为

$$\begin{aligned}\dot{\zeta} &= A_c\zeta + b(\theta)\sigma(y)u + \psi_0(y) + \sum_{i=1}^{p}\psi_i(y)\theta_i \\ y &= c_c\zeta\end{aligned} \tag{7.81}$$

其中$\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \psi_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, 0 \leqslant i \leqslant p$，$(A_c, b, c_c)$是最小相位的，且具有观测器标准型

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad b(\theta) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ b_\rho(\theta) \\ \vdots \\ b_n(\theta) \end{bmatrix}$$

$$c_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

其中$b_\rho(\theta)$对于所有的$\theta \in \Omega$具有已知的定常符号，当且仅当

(i) $\operatorname{rank}\{dh, \cdots, d(L_f^{n-1}h)\} = n$,

(ii) $[ad_f^i r, ad_f^j r] = 0, \qquad 0 \leqslant i, j \leqslant n-1$,

(iii) $[q_i, ad_f^k r] = 0, \qquad 1 \leqslant i \leqslant p, 0 \leqslant k \leqslant n-2$,

(iv) 存在一个光滑函数$\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$和$n-\rho+1$个与$\theta$相关的实数$b_\rho(\theta), \cdots, b_n(\theta)$，使得

$$g = (\sigma \circ h)\sum_{j=1}^{n-\rho+1} b_{n-j+1}(\theta) ad_{(-f)}^{j-1} r$$

其中$b_\rho(\theta)s^{n-\rho} + \cdots + b_n(\theta)$是一个Hurwitz多项式，且$b_\rho(\theta)$对于所有的$\theta \in \Omega$具有已知定常符号，

(v) 向量场$ad_f^i r, 0 \leqslant i \leqslant n-1$是完备的，

其中r是满足

$$\begin{bmatrix} \langle dh, r\rangle \\ \vdots \\ \langle (dL_f^{n-1}h), r\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

的向量场。 □

定义 7.4.2 **自适应跟踪型(Adaptive Tracking Form)**系统

$$\begin{aligned}\dot{z} &= A_c z + b\left[\frac{1}{\gamma}\sigma(y)u + \alpha_0(y,t) + \sum_{i=1}^{p}\theta_i\alpha_i(y,t)\right] \\ y &= c_c z\end{aligned}$$

称为具有自适应跟踪型，若 (A_c, c_c) 具有观测器标准型，$b = [1, b_2, \cdots, b_n]^T$ 是一个 Hurwitz 向量，$\alpha_i(y,t), 0 \leqslant i \leqslant p$ 和 $\sigma(y)$ 是已知的光滑函数，γ 和 $\theta_i, 1 \leqslant i \leqslant p$ 是未知定常参数且 $\gamma > 0$。 □

评注 7.4.2 在上面的定义中，实际上要求已知参数 γ 的符号。事实上，如果其符号为负，即 $\gamma < 0$，我们可以定义 $\bar{\sigma}(y) = \mathrm{sgn}(\gamma)\sigma(y)$ 以及 $\bar{\gamma} = \mathrm{sgn}(\gamma)\gamma$。 □

首先来看如何将满足定理 7.4.1 的条件 (i)~条件(v) 的非线性系统变换为一个自适应跟踪型。然后，对于具有自适应跟踪型的系统说明如何设计自适应跟踪控制。

引理 7.4.1 (输入滤波变换(Input Filtered Transformation)) 考虑相对阶 $\rho = 1$ 的系统

$$\begin{aligned}\dot{\zeta} &= A_c\zeta + b\left(\frac{1}{\gamma}\sigma(y)u\right) + \sum_{i=0}^{p}\theta_i\psi_i(y)\\ y &= c_c\zeta\end{aligned}\tag{7.82}$$

其中 $b = [1, b_2, \cdots, b_n]^T$ 是一个 Hurwitz 向量，$b_2, \cdots, b_n$ 是未知参数。对于任意给定的定常 Hurwitz 向量 $d = [1, d_2, \cdots, d_n]^T$，使得

$$s^{n-1} + d_2 s^{n-2} + \cdots + d_{n-1}s + d_n = \prod_{i=1}^{n-1}(s + \lambda_i)$$

其中 $\lambda_i, 1 \leqslant i \leqslant n-1$ 是任意的正实数，存在一个输入滤波变换($\mu[i] \in \mathbb{R}^i, y[i] \in \mathbb{R}$)

$$z = \zeta - \sum_{i=2}^{n}\delta_i\sum_{j=2}^{i}d[j]\mu_{j-1}[i-1]\tag{7.83}$$

$$\begin{aligned}\dot{\mu}[i] &= \begin{bmatrix}-\lambda_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & -\lambda_2 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda_{i-1} & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda_i\end{bmatrix}\mu[i] + \begin{bmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\\1\end{bmatrix}\sigma(y)u\\ y[i] &= \begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{bmatrix}\mu[i], \qquad 1 \leqslant i \leqslant n-1\end{aligned}\tag{7.84}$$

其中 $(\delta_2, \cdots, \delta_n)$ 是 $(b_2, \cdots, b_n)$ 的重新参数化，$d[2], \cdots, d[n]$ 是合适的 n 维向量，将系统 (7.82) 变换为

$$\begin{aligned}\dot{z} &= A_c z + d\left(\frac{1}{\gamma}\sigma(y)u + \sum_{i=2}^{n}\delta_i y[i-1]\right) + \sum_{i=0}^{p}\theta_i\psi_i(y)\\ y &= c_c z\end{aligned}\tag{7.85}$$

并且如果对于所有的 $t \geqslant 0$，$y(t)$ 是有界的，则对于所有的 $t \geqslant 0$ $y[i](t), 1 \leqslant i \leqslant n-1$ 也是有界的。 □

证明: 考虑由下式产生的 n 个线性无关的向量 $d[1], \cdots, d[n]$:

$$\begin{aligned}d[n] &= \begin{bmatrix}0 & \cdots & 0 & 1\end{bmatrix}^T\\ d[j-1] &= A_c d[j] + \lambda_{j-1}d[j], \qquad 2 \leqslant j \leqslant n\end{aligned}$$

它使得$n \times n$矩阵

$$D = \left[\begin{array}{ccc} d[1] & \cdots & d[n] \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ d_2[1] & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ d_{n-1}[1] & d_{n-1}[2] & \cdots & 1 & 0 \\ d_n[1] & d_n[2] & \cdots & d_n[n-1] & 1 \end{array}\right]$$

是非奇异的。注意，根据定义，向量$d[i]$的分量是多项式$\prod_{j=i}^{n-1}(s+\lambda_j)$ 的系数，即

$$\prod_{j=i}^{n-1}(s+\lambda_j) = s^{n-i} + d_{i+1}[i]s^{n-i-1} + \cdots + d_{n-1}[i]s + d_n[i]$$

从而$d[1] = d$。未知向量b可以重新参数化为

$$b \ = \ \sum_{i=1}^{n} \delta_i d[i]$$

即新的未知参数向量为

$$[1, \delta_2, \cdots, \delta_n]^{\mathrm{T}} = D^{-1}b$$

系统 (7.82) 可重新写为

$$\begin{aligned} \dot{\zeta} \ &= \ A_{\mathrm{c}}\zeta + d[1]\left(\frac{1}{\gamma}\sigma(y)u\right) + \sum_{i=2}^{n}\delta_i d[i]\sigma(y)u + \sum_{i=0}^{p}\theta_i\psi_i(y) \\ y \ &= \ c_{\mathrm{c}}\zeta \end{aligned} \tag{7.86}$$

将式 (7.83) 对时间求导并考虑式 (7.82) 和式 (7.84)，可得

$$\begin{aligned} \dot{z} \ &= \ A_{\mathrm{c}}\zeta + d[1]\left(\frac{1}{\gamma}\sigma(y)u\right) + \sum_{i=0}^{p}\theta_i\psi_i(y) \\ &\quad + \sum_{i=2}^{n}\delta_i\left\{d[i]\sigma(y)u - \sum_{j=2}^{i-1}d[j](\mu_j[i-1] - \lambda_{j-1}\mu_{j-1}[i-1])\right. \\ &\quad \left. + d[i]\lambda_{i-1}\mu_{i-1}[i-1] - d[i]\sigma(y)u\right\} \\ &= \ A_{\mathrm{c}}z + d[1]\left(\frac{1}{\gamma}\sigma(y)u\right) + \sum_{i=0}^{p}\theta_i\psi_i(y) \\ &\quad + \sum_{i=2}^{n}\delta_i\left[\sum_{j=2}^{i}(A_{\mathrm{c}}d[j] + \lambda_{j-1}d[j])\mu_{j-1}[i-1] - \sum_{j=2}^{i-1}d[j]\mu_j[i-1]\right] \\ &= \ A_{\mathrm{c}}z + d[1]\left(\frac{1}{\gamma}\sigma(y)u + \sum_{i=2}^{n}\delta_i y[i-1]\right) + \sum_{i=0}^{p}\theta_i\psi_i(y) \end{aligned}$$

该系统具有式 (7.85) 的形式，且$d = d[1]$。进而，由于对于$j = 2, \cdots, n$，$c_{\mathrm{c}}d[j] = 0$，由式 (7.83) 可得

$$y \ = \ c_{\mathrm{c}}z$$

根据式 (7.82) 有

$$\frac{1}{\gamma}\sum_{k=1}^{n} b_k \frac{d^{n-k}}{dt^{n-k}}(\sigma(y)u) = \frac{d^n y}{dt^n} - \sum_{k=1}^{n}\frac{d^{n-k}}{dt^{n-k}}\left(\sum_{j=0}^{p}\psi_{jk}(y)\theta_j\right)$$

且由式 (7.84) 有

$$\sum_{j=0}^{i} d_{n-j}[n-i]\frac{d^j}{dt^j}y[i] = \sigma(y)u, \qquad 1\leqslant i\leqslant n-1$$

从而消去 $\sigma(y)u$ 得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\gamma}\sum_{k=1}^{n} b_k \frac{d^{n-k}}{dt^{n-k}}\left(\sum_{j=0}^{i} d_{n-j}[n-i]\frac{d^j y[i]}{dt^j}\right)\\ &\quad = \frac{d^n y}{dt^n} - \sum_{k=1}^{n}\frac{d^{n-k}}{dt^{n-k}}\left(\sum_{j=0}^{p}\psi_{jk}(y)\theta_j\right), \quad 1\leqslant i\leqslant n-1\end{aligned} \tag{7.87}$$

由于多项式 $(1\leqslant i\leqslant n-1)$

$$(s^{n-1}+b_2 s^{n-2}+\cdots+b_n)(s^{n-i}+d_{n-i+1}[n-i]s^{n-i+1}+\cdots+d_n[n-i])$$

是 Hurwitz 的，若 $y(t)$ 有界，则由式 (7.87) 可知 $y[i](t), 1\leqslant i\leqslant n-1$ 也是有界的。 □

引理 7.4.2 **(输出滤波变换(Output Filtered Transformation))** 考虑系统

$$\begin{aligned}\dot\zeta &= A_c\zeta + d\left(\frac{1}{\gamma}\sigma(y)u+\alpha(t)\right)+\sum_{i=0}^{p}\theta_i\psi_i(y)\\ y &= c_c\zeta\end{aligned} \tag{7.88}$$

其中 $d=[1,d_2,\cdots,d_n]^{\mathrm T}$ 是一个 Hurwitz 向量。输出滤波变换

$$\begin{aligned}z_1 &= \zeta_1\\ z_j &= \zeta_j - \sum_{i=0}^{p}\xi_{j-1}[i]\theta_i, \qquad 2\leqslant j\leqslant n\end{aligned} \tag{7.89}$$

其中对于 $i=0,\cdots,p$，$\xi[i]=[\xi_1[i],\cdots,\xi_{n-1}[i]]^{\mathrm T}$ 满足

$$\dot\xi[i] = \begin{bmatrix} -d_2 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ -d_3 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ -d_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 1\\ -d_n & 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}\xi[i] + \begin{bmatrix} -d_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ -d_3 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ -d_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\\ -d_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{bmatrix}\psi_i(y) \tag{7.90}$$

将系统 (7.88) 变换为自适应跟踪型

$$\begin{aligned}\dot z &= A_c z + d\left(\frac{1}{\gamma}\sigma(y)u+\alpha(t)+\sum_{i=0}^{p}\theta_i(\psi_{i1}(y)+\xi_1[i])\right)\\ y &= c_c z\end{aligned} \tag{7.91}$$

□

证明: 由式 (7.88) 和式 (7.89) 有 $y=c_c z$。将式 (7.89) 对时间求导并考虑式 (7.88) 和式 (7.90)，

得

$$
\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= \zeta_2 + \frac{1}{\gamma}\sigma(y)u + \alpha(t) + \sum_{i=0}^{p}\theta_i\psi_{i1}(y) \\
&= z_2 + \frac{1}{\gamma}\sigma(y)u + \alpha(t) + \sum_{i=0}^{p}\theta_i(\psi_{i1}(y) + \xi_1[i]) \\
\dot{z}_j &= \zeta_{j+1} + d_j\left(\frac{\sigma(y)}{\gamma}u + \alpha(t)\right) + \sum_{i=0}^{p}\theta_i\psi_{ij}(y) \\
&\quad -\sum_{i=0}^{p}\theta_i\xi_j[i] - \sum_{i=0}^{p}\theta_i\psi_{ij}(y) + d_j\sum_{i=0}^{p}\theta_i(\xi_1[i] + \psi_{i1}(y)) \\
&= z_{j+1} + d_j\left(\frac{\sigma(y)}{\gamma}u + \alpha(t) + \sum_{i=0}^{p}\theta_i(\xi_1[i] + \psi_{i1}(y))\right), \quad 2 \leqslant j \leqslant n-1 \\
\dot{z}_n &= d_n\left(\frac{\sigma(y)}{\gamma}u + \alpha(t) + \sum_{i=0}^{p}\theta_i(\xi_1[i] + \psi_{i1}(y))\right)
\end{aligned}
$$

可将其重新写为如式 (7.91) 的紧凑形式。 □

引理 7.4.1 和引理 7.4.2 给出了如下的结论。

引理 7.4.3 考虑相对阶 $\rho = 1$ 的系统 (7.81)

$$
\begin{aligned}
\dot{\zeta} &= A_c\zeta + b(\theta)\sigma(y)u + \sum_{i=0}^{p}\theta_i\psi_i(y) \\
y &= c_c\zeta
\end{aligned} \tag{7.92}
$$

其中 $\theta_0 = 1$ 和 $(\theta_1, \cdots, \theta_p)$ 是未知参数。对于任意给定的 Hurwitz 定常向量 $d = [1, d_2, \cdots, d_n]^{\mathrm{T}}$，使得

$$
s^{n-1} + d_2 s^{n-2} + \cdots + d_{n-1}s + d_n = \prod_{i=1}^{n-1}(s + \lambda_i) \tag{7.93}
$$

其中 $\lambda_i, 1 \leqslant i \leqslant n-1$ 是任意的正实数，存在一个依赖于如下滤波器的滤波变换($1 \leqslant j \leqslant n-1, 0 \leqslant i \leqslant p$)

$$
\begin{aligned}
\dot{\mu}[j] &= \begin{bmatrix} -\lambda_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\lambda_{j-1} & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda_j \end{bmatrix}\mu[j] + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\sigma(y)u \\
y[j] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}\mu[j]
\end{aligned} \tag{7.94}
$$

$$
\dot{\xi}[i] = \begin{bmatrix} -d_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -d_3 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -d_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -d_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}\xi[i] + \begin{bmatrix} -d_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -d_3 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -d_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ -d_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}\psi_i(y) \tag{7.95}
$$

其中 $\mu[j] \in \mathbb{R}^j$ 和 $\xi[i] \in \mathbb{R}^{n-1}$，将系统 (7.92) 变换为自适应跟踪型

$$\begin{aligned}\dot{z} &= A_c z + d\left(\frac{\operatorname{sgn}(b_1(\theta))\sigma(y)u}{\gamma} + \sum_{j=2}^{n} \delta_j y[j-1] + \sum_{i=0}^{p} \theta_i(\psi_{i1}(y) + \xi_1[i])\right) \\ y &= c_c z \end{aligned} \tag{7.96}$$

其中 $(\gamma, \delta_2, \cdots, \delta_n)$ 是与 θ 相关的未知参数。若 $y(t)$ 是有界的，则 $y[i](t), 1 \leqslant i \leqslant n-1$ 也是有界的。 □

证明: 由于 $\rho = 1$，定义

$$\gamma = \frac{\operatorname{sgn}(b_1(\theta))}{b_1(\theta)}, \quad \bar{\sigma}(y) = \operatorname{sgn}(b_1(\theta))\sigma(y), \quad \bar{b} = \frac{1}{b_1(\theta)} b(\theta)$$

引理 7.4.1 适用，即可将系统 (7.92) 变换为

$$\begin{aligned}\dot{\bar{z}} &= A_c \bar{z} + d\left(\frac{\operatorname{sgn}(b_1(\theta))\sigma(y)u}{\gamma} + \sum_{j=2}^{n} \delta_j y[j-1]\right) + \sum_{i=0}^{p} \theta_i \psi_i(y) \\ y &= c_c \bar{z} \end{aligned} \tag{7.97}$$

将引理 7.4.2 应用于上述系统，且 $\alpha(t) = \sum_{j=2}^{n} \delta_j y[j-1](t)$，可以将系统 (7.97) 变换为系统 (7.96)。 □

定理 7.4.1 和引理 7.4.3 界定了一类可以变换为自适应跟踪型的非线性系统，下面求解具有自适应跟踪型且相对阶为 1 的系统的自适应跟踪问题。

定理 7.4.2　自适应输出反馈跟踪：$\rho = 1$ (Adaptive Output Feedback Tracking：$\rho = 1$) *考虑具有全局相对阶 $\rho = 1$ 的系统 (7.80)，若定理 7.4.1 的假设 (i)～假设 (v) 成立，则对于系统 (7.80) 存在一个全局自适应输出反馈跟踪控制。* □

证明: 由定理 7.4.1可知，系统 (7.80) 可通过一个全局状态空间微分同胚变换为系统 (7.81)。根据引理 7.4.3，由引理 7.4.1 和引理 7.4.2 分别给出的输入滤波变换和输出滤波变换，将系统 (7.81) 变换为自适应跟踪型 (7.96)。又由于 (A_c, d) 是可控的，故存在一个向量 k_c，使得对于任意的正实数 λ_c

$$\det(sI - A_c - dk_c) = (s + \lambda_c)(s^{n-1} + d_2 s^{n-2} + \cdots + d_{n-1}s + d_n)$$

从而

$$c_c(sI - A_c - dk_c)^{-1} d = \frac{1}{s + \lambda_c}$$

是严格正实的。定义参考模型

$$\begin{aligned}\dot{z}_r &= (A_c + dk_c)z_r + du_r, \qquad z_r \in \mathbb{R}^n \\ y_r &= c_c z_r \end{aligned} \tag{7.98}$$

注意，由 $z_r(0) = 0$ 有

$$\dot{y}_r + \lambda_c y_r = u_r \tag{7.99}$$

由该式给出 $u_r(t)$。令 $e = z - z_r$ 为跟踪误差，按照式 (7.96)，其动态为

$$\dot{e} = (A_c + dk_c)e + d\left[\frac{1}{\gamma}\bar{\sigma}(y)u + \sum_{j=2}^{n} \delta_j y[j-1]\right.$$

$$+\sum_{i=0}^{p}\theta_i(\psi_{i1}(y)+\xi_1[i])-k_c z-u_r\Big] \tag{7.100}$$

状态估计 $\hat{z}$ 由下面的自适应观测器给出：

$$\begin{aligned}\dot{\hat{z}} &= A_c\hat{z}+d\Big[\hat{\delta}_1\bar{\sigma}(y)u+\sum_{j=2}^{n}\hat{\delta}_j y[j-1]+\psi_{01}(y)+\xi_1[0]\\ &\quad+\sum_{i=1}^{p}\hat{\theta}_i(\psi_{i1}(y)+\xi_1[i])\Big]-k_o(y-\hat{y})\\ \hat{y} &= c_c\hat{z}\end{aligned} \tag{7.101}$$

其中 $\hat{\delta}_1$ 是 $\delta_1=1/\gamma$ 的一个估计，选择 k_o，使得

$$\det(sI-A_c-k_oc_c)=(s+\lambda_o)(s^{n-1}+d_2s^{n-2}+\cdots+d_n)$$

这意味着

$$c_c(sI-A_c-k_oc_c)^{-1}d=\frac{1}{s+\lambda_o}$$

对于任意的正实数 λ_o 是严格正实的。控制 u 定义为

$$\begin{aligned}u &= -\frac{\hat{\delta}_0}{\bar{\sigma}(y)}\Big[\sum_{j=2}^{n}\hat{\delta}_j y[j-1]+\sum_{i=1}^{p}\hat{\theta}_i(\psi_{i1}(y)+\xi_1[i])\\ &\quad -k_c\hat{z}-u_r+\psi_{01}(y)+\xi_1[0]\Big]\end{aligned} \tag{7.102}$$

其中 $\hat{\delta}_0$ 是 $\delta_0=\gamma$ 的一个估计。将式(7.102)代入跟踪误差动态(7.100)中，可得($\tilde{z}=z-\hat{z}$)

$$\begin{aligned}\dot{e} &= (A_c+dk_c)e-dk_c\tilde{z}+d\Big[\sum_{i=1}^{p}\tilde{\theta}_i(\psi_{i1}(y)+\xi_1[i])+\sum_{j=2}^{n}\tilde{\delta}_j y[j-1]\\ &\quad+\frac{\tilde{\delta}_0}{\gamma}\Big(\sum_{j=2}^{n}\hat{\delta}_j y[j-1]+\sum_{i=1}^{p}\hat{\theta}_i(\psi_{i1}(y)+\xi_1[i])\\ &\quad-k_c\hat{z}-u_r+\psi_{01}(y)+\xi_1[0]\Big)\Big]\end{aligned} \tag{7.103}$$

而观测器误差动态为

$$\dot{\tilde{z}}=(A_c+k_oc_c)\tilde{z}+d\Big(\tilde{\delta}_1\bar{\sigma}(y)u+\sum_{j=2}^{n}\tilde{\delta}_j y[j-1]+\sum_{i=1}^{p}\tilde{\theta}_i(\psi_{i1}(y)+\xi_1[i])\Big) \tag{7.104}$$

由于三元组 (A_c+dk_c,d,c_c) 和 $(A_c+k_oc_c,d,c_c)$ 均是严格正实的，由Meyer-Kalman-Yacubovich 引理B.2.2可知，存在两个正定矩阵 P_c 和 P_o，两个向量 q_c 和 q_o 以及两个正实数 ε_c 和 ε_o，使得

$$\begin{aligned}(A_c+dk_c)^{\mathrm{T}}P_c+P_c(A_c+dk_c) &= -q_cq_c^{\mathrm{T}}-\varepsilon_cI\\ P_cd &= c_c^{\mathrm{T}}\\ (A_c+k_oc_c)^{\mathrm{T}}P_o+P_o(A_c+k_oc_c) &= -q_oq_o^{\mathrm{T}}-\varepsilon_oI\\ P_od &= c_c^{\mathrm{T}}\end{aligned} \tag{7.105}$$

定义函数($\tilde{\delta}=[\tilde{\delta}_1,\cdots,\tilde{\delta}_n]^{\mathrm{T}},\tilde{\theta}=[\tilde{\theta}_1,\cdots,\tilde{\theta}_p]^{\mathrm{T}},\eta>0$)

$$V=e^{\mathrm{T}}P_{\mathrm{c}}e+\eta\tilde{z}^{\mathrm{T}}P_{\mathrm{o}}\tilde{z}+\tilde{\theta}^{\mathrm{T}}\tilde{\theta}+\frac{1}{\gamma}\tilde{\delta}_0^2+\tilde{\delta}^{\mathrm{T}}\tilde{\delta} \tag{7.106}$$

由式 (7.105)，其对时间的导数满足不等式

$$\begin{aligned}\dot{V}\ \leqslant\ & -\varepsilon_{\mathrm{c}}\|e\|^2-\eta\varepsilon_{\mathrm{o}}\|z\|^2+2\|e\|\|c_{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}}k_{\mathrm{c}}\|\|\tilde{z}\|\\ &+2\frac{\tilde{\delta}_0}{\gamma}\Bigg(\dot{\hat{\delta}}_0+(y-y_{\mathrm{r}})\Bigg(\sum_{j=2}^{n}\hat{\delta}_jy[j-1]+\sum_{i=1}^{p}\hat{\theta}_i(\psi_{i1}(y)+\xi_1[i])\\ &-k_{\mathrm{c}}\hat{z}-u_{\mathrm{r}}+\psi_{01}(y)+\xi_1[0]\Bigg)\Bigg)+2\tilde{\delta}_1(\dot{\hat{\delta}}_1+\eta(y-\hat{y})\bar{\sigma}(y)u)\\ &+2\sum_{j=2}^{n}\tilde{\delta}_j\left(\dot{\hat{\delta}}_j+((y-y_{\mathrm{r}})+\eta(y-\hat{y}))y[j-1]\right)\\ &+2\sum_{i=1}^{p}\tilde{\theta}_i\left(\dot{\hat{\theta}}_i+((y-y_{\mathrm{r}})+\eta(y-\hat{y}))(\psi_{i1}(y)+\xi_1[i])\right)\end{aligned}$$

再令参数估计动态为

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\delta}}_0\ &=\ (y-y_{\mathrm{r}})\Bigg(\sum_{j=2}^{n}\hat{\delta}_jy[j-1]+\sum_{i=1}^{p}\hat{\theta}_i(\psi_{i1}(y)+\xi_1[i])\\ &\quad-k_{\mathrm{c}}\hat{z}-u_{\mathrm{r}}+\psi_{01}(y)+\xi_1[0]\Bigg)\\ \dot{\hat{\delta}}_1\ &=\ -\eta(y-\hat{y})\hat{\delta}_0\Bigg(\sum_{j=2}^{n}\hat{\delta}_jy[j-1]+\sum_{i=1}^{p}\hat{\theta}_i(\psi_{i1}(y)+\xi_1[i])\\ &\quad-k_{\mathrm{c}}\hat{z}-u_{\mathrm{r}}+\psi_{01}(y)+\xi_1[0]\Bigg)\\ \dot{\hat{\theta}}_i\ &=\ \big((y-y_{\mathrm{r}})+\eta(y-\hat{y})\big)(\psi_{i1}(y)+\xi_1[i]),\qquad 1\leqslant i\leqslant p\\ \dot{\hat{\delta}}_j\ &=\ \big((y-y_{\mathrm{r}})+\eta(y-\hat{y})\big)y[j-1],\qquad 2\leqslant j\leqslant n\end{aligned} \tag{7.107}$$

其中

$$\eta>\frac{\|c_{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}}k_{\mathrm{c}}\|^2}{\varepsilon_{\mathrm{c}}\varepsilon_{\mathrm{o}}}$$

则对于一个合适的$\varepsilon>0$有

$$\dot{V}\leqslant-\varepsilon\left\|\begin{bmatrix}e\\ \tilde{z}\end{bmatrix}\right\|^2 \tag{7.108}$$

这说明对于所有的$t\geqslant0$，$e(t),\tilde{z}(t),\hat{\delta}_i(t),0\leqslant i\leqslant n$和$\hat{\theta}_i(t),1\leqslant i\leqslant p$是有界的，特别地$y(t)-y_{\mathrm{r}}(t)$也是有界的，由于$y_{\mathrm{r}}(t)$是有界的，因此$y(t)$也是有界的。由于$y(t)$有界，从式 (7.94)~式 (7.95) 可知，$\xi_i(t),0\leqslant i\leqslant p$和$y[i](t),1\leqslant i\leqslant n-1$也是有界的。从式 (7.103) 和式 (7.104) 可知，$\|\dot{e}(t)\|$和$\|\dot{\tilde{z}}(t)\|$是有界的。考虑到式 (7.106) 和式 (7.108)，对向量$[e^{\mathrm{T}},\tilde{z}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$应用推论 B.2.1 可知，对于任意的初始条件有

$$\lim_{t\to\infty}\left\|\begin{bmatrix}e(t)\\ \tilde{z}(t)\end{bmatrix}\right\|=0$$

□

例 7.4.1 考虑系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2+u\\ \dot{x}_2 &= \theta x_1^3+u\\ y &= x_1\end{aligned}$$

其具有全局相对阶 $\rho = 1$，且具有式(7.88)的形式，其中由于 $s+1$ 是一个Hurwitz多项式，$d=[1,1]^{\mathrm{T}}$ 是一个Hurwitz向量。应用引理7.4.2给出输出滤波变换

$$\begin{aligned}z_1 &= x_1\\ z_2 &= x_2-\xi\theta\\ \dot{\xi} &= -\xi+y^3\end{aligned}$$

将系统变换为自适应跟踪型

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2+u+\theta\xi\\ \dot{z}_2 &= u+\theta\xi\\ y &= z_1\end{aligned}$$

按照定理7.4.2的证明，选择($\lambda_{\mathrm{c}}>0$)

$$k_{\mathrm{c}}=\begin{bmatrix}-\lambda_{\mathrm{c}} & -1\end{bmatrix}$$

从而 $A_{\mathrm{c}}+dk_{\mathrm{c}}$ 的特征多项式为 $(s+\lambda_{\mathrm{c}})(s+1)$。那么，参考模型给定如下：

$$\begin{aligned}\dot{z}_{\mathrm{r}} &= \begin{bmatrix}-\lambda_{\mathrm{c}} & 0\\ -\lambda_{\mathrm{c}} & -1\end{bmatrix}z_{\mathrm{r}}+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}u_{\mathrm{r}}\\ y_{\mathrm{r}} &= \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}z_{\mathrm{r}}\end{aligned}$$

而自适应观测器为($\lambda_{\mathrm{o}}>0$)

$$\dot{\hat{z}}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\hat{z}+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(u+\hat{\theta}\xi)-\begin{bmatrix}-1-\lambda_{\mathrm{o}}\\ -\lambda_{\mathrm{o}}\end{bmatrix}(y-\hat{z}_1)$$

其中

$$k_{\mathrm{o}}=\begin{bmatrix}-1-\lambda_{\mathrm{o}}\\ -\lambda_{\mathrm{o}}\end{bmatrix}$$

从而 $A_{\mathrm{c}}+k_{\mathrm{o}}c_{\mathrm{c}}$ 的特征多项式为 $(s+\lambda_{\mathrm{o}})(s+1)$。从式(7.102)和式(7.107)可得自适应控制(其中 η 充分大)

$$\begin{aligned}u &= -\hat{\theta}\xi-\begin{bmatrix}\lambda_{\mathrm{c}} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{z}_1\\ \hat{z}_2\end{bmatrix}+u_{\mathrm{r}}\\ \dot{\hat{\theta}} &= \xi[(y-y_{\mathrm{r}})+\eta(y-\hat{z}_1)]\end{aligned}$$

□

我们单独讨论了 $\rho=1$ 的情形，这些结果(见定理7.4.2)将用于 $\rho\geqslant 2$ 情形的证明。在讨论 $\rho\geqslant 2$ 情形之前，我们先给出一个预备性的结论。

引理 7.4.4 考虑相对阶 $\rho > 1$ 的系统

$$\begin{aligned}\dot{\zeta} &= A_c\zeta + b\left(\frac{1}{\gamma}\sigma(y)u\right) + \sum_{i=0}^{p}\theta_i\psi_i(y)\\ y &= c_c\zeta\end{aligned} \tag{7.109}$$

其中 $b = [0,\cdots,1,b_{\rho+1},\cdots,b_n]^{\mathrm{T}}$ 是一个 Hurwitz 向量。对于任意给定的 Hurwitz 定常向量 $\bar{d} = [1,\bar{d}_2,\cdots,\bar{d}_n]^{\mathrm{T}}$ 满足

$$s^{n-1} + \bar{d}_2 s^{n-2} + \cdots + \bar{d}_n = (s^{n-\rho} + b_{\rho+1}s^{n-\rho-1} + \cdots + b_n)\prod_{i=1}^{\rho-1}(s+\lambda_i) \tag{7.110}$$

其中 $\lambda_i, 1 \leqslant i \leqslant \rho-1$ 是任意的正实数，存在一个输入滤波变换

$$\bar{z} = \zeta - \frac{1}{\gamma}\sum_{i=2}^{\rho}\bar{d}[i]\varphi_{i-1} \tag{7.111}$$

$$\dot{\varphi} = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & -\lambda_2 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda_{\rho-1}\end{bmatrix}\varphi + \begin{bmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\\1\end{bmatrix}\sigma(y)u \tag{7.112}$$

其中 $\bar{d}[2],\cdots,\bar{d}[\rho]$ 是适当的 n 维向量且 $\varphi = [\varphi_1,\cdots,\varphi_{\rho-1}]^{\mathrm{T}}$，将系统 (7.109) 变换为

$$\begin{aligned}\dot{\bar{z}} &= A_c\bar{z} + \frac{\bar{d}}{\gamma}\varphi_1 + \sum_{i=0}^{p}\theta_i\psi_i(y)\\ y &= c_c\bar{z}\end{aligned} \tag{7.113}$$

□

证明: 定义

$$\begin{aligned}\bar{d}[\rho] &= b\\ \bar{d}[j-1] &= A_c d[j] + \lambda_{j-1}d[j], \qquad \rho \geqslant j \geqslant 2\end{aligned}$$

则 $\bar{d}[1] = \bar{d}$。将式 (7.111) 对时间求导，其中 $\bar{d}[i]$ 为上面定义的 n 维向量，考虑式 (7.109) 和式 (7.112) 可得

$$\begin{aligned}\dot{\bar{z}} =& A_c\zeta + \bar{d}[\rho]\left(\frac{1}{\gamma}\sigma(y)u\right) + \sum_{i=0}^{p}\theta_i\psi_i(y)\\ &-\sum_{i=2}^{\rho-1}\frac{\bar{d}[i]}{\gamma}(\varphi_i - \lambda_{i-1}\varphi_{i-1}) + \frac{\bar{d}[\rho]}{\gamma}\lambda_{\rho-1}\varphi_{\rho-1} - \frac{\bar{d}[\rho]}{\gamma}\sigma(y)u\\ =& A_c\bar{z} + \sum_{i=0}^{p}\theta_i\psi_i(y) + \frac{1}{\gamma}\sum_{i=2}^{\rho}(A_c\bar{d}[i] + \lambda_{i-1}\bar{d}[i])\varphi_{i-1} - \frac{1}{\gamma}\sum_{i=2}^{\rho-1}\bar{d}[i]\varphi_i\\ =& A_c\bar{z} + \frac{\bar{d}}{\gamma}\varphi_1 + \sum_{i=0}^{p}\theta_i\psi_i(y)\end{aligned}$$

□

定理 7.4.3 自适应输出反馈跟踪：$\rho > 1$ (Adaptive Output Feedback Tracking：$\rho > 1$) 考虑具有全局相对阶 $\rho, 2 \leqslant \rho \leqslant n$ 的系统 (7.80)。若定理 7.4.1 的条件 (i)～条件 (v) 成立，则对于系统 (7.80) 存在一个全局自适应输出反馈跟踪控制。 □

证明: 根据定理 7.4.1，系统 (7.80) 可通过一个全局状态空间微分同胚变换为系统 (7.81)。不失一般性，假设 $b_\rho(\theta)$ 是正的。引理 7.4.4 适用于系统 (7.81)，其中 $\gamma = 1/b_\rho(\theta)$，$b_i = b_i(\theta)/b_\rho(\theta), \rho+1 \leqslant i \leqslant n$ 是未知参数，使得 $s^{n-\rho} + b_{\rho+1}s^{n-\rho+1} + \cdots + b_n$ 是一个 Hurwitz 多项式。滤波变换 (7.111) 和滤波变换 (7.112) 将系统 (7.81) 变换为系统 (7.113)，其中 $\bar{d}$ 是一个未知向量，使得多项式

$$s^{n-1} + \bar{d}_2 s^{n-2} + \cdots + \bar{d}_n \tag{7.114}$$

是 Hurwitz 的。将引理 7.4.3 应用于系统 (7.113)，其中用 φ_1 代替 $\sigma(y)u$，则存在一个滤波变换，将系统 (7.113) 变换为

$$\begin{aligned} \dot{z} &= A_c z + d\left(\frac{1}{\gamma}\varphi_1 + \sum_{i=2}^{n}\delta_i y[i-1] + \sum_{i=0}^{p}\theta_i(\psi_i(y) + \xi_1[i])\right) \\ y &= c_c z \end{aligned} \tag{7.115}$$

其中 $d = [1, d_2, \cdots, d_n]^{\mathrm{T}}$ 是一个已知向量，使得($\lambda_i > 0$)

$$s^{n-1} + d_2 s^{n-2} + \cdots + d_n = \prod_{i=1}^{n-1}(s + \lambda_i) \tag{7.116}$$

变量 $y[i], 1 \leqslant i \leqslant n-1$ 是如下滤波器的输出：

$$\begin{aligned} \dot{\mu}[i] &= \begin{bmatrix} -\lambda_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda_i \end{bmatrix}\mu[i] + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\varphi_1, \qquad \mu[i] \in \mathbb{R}^i \\ y[i] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}\mu[i] \end{aligned} \tag{7.117}$$

以及 $\xi[i] = [\xi_1[i], \cdots, \xi_{n-1}[i]]^{\mathrm{T}}, 0 \leqslant i \leqslant p$ 满足

$$\dot{\xi}[i] = \begin{bmatrix} -d_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -d_3 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -d_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -d_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}\xi[i] + \begin{bmatrix} -d_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -d_3 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -d_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ -d_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}\psi_i(y) \tag{7.118}$$

按照定理 7.4.2 的证明，为跟踪参考模型 (7.98)，将变量 φ_1 视为式 (7.115) 中的控制，并令

$$\begin{aligned} \varphi_1^* &= -\hat{\delta}_0\Bigg[\sum_{j=2}^{n}\hat{\delta}_j y[j-1] + \sum_{i=1}^{p}\hat{\theta}_i(\psi_{i1}(y) + \xi_1[i]) - k_c\hat{z} \\ &\quad -u_r + \psi_{01}(y) + \xi_1[0]\Bigg] \\ \dot{\hat{z}} &= A_c\hat{z} + d\Bigg[\hat{\delta}_1\varphi_1 + \sum_{j=2}^{n}\hat{\delta}_j y[j-1] + \sum_{i=1}^{p}\hat{\theta}_i(\psi_{i1}(y) + \xi_1[i]) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\qquad +\psi_{01}(y)+\xi_1[0]\Bigg]-k_{\mathrm{o}}(y-\hat{y}) \\
\hat{y} &= c_{\mathrm{c}}\hat{z} \\
\dot{\hat{\delta}}_0 &= (y-y_{\mathrm{r}})\left[\sum_{j=2}^{n}\hat{\delta}_j y[j-1]+\sum_{i=1}^{p}\hat{\theta}_i(\psi_{i1}(y)+\xi_1[i])-k_{\mathrm{c}}\hat{z}\right. \\
&\qquad \left.-u_{\mathrm{r}}+\psi_{01}(y)+\xi_1[0]\right] \\
\dot{\hat{\delta}}_1 &= \eta(y-\hat{y})\varphi_1 \\
\dot{\hat{\theta}}_i &= [(y-y_{\mathrm{r}})+\eta(y-\hat{y})](\psi_{i1}(y)+\xi_1[i]), \qquad 1\leqslant i\leqslant p \\
\dot{\hat{\delta}}_j &= [(y-y_{\mathrm{r}})+\eta(y-\hat{y})]y[j-1], \qquad 2\leqslant j\leqslant n
\end{aligned}
\tag{7.119}
$$

从而对于闭环系统 (7.115)~闭环系统 (7.119)，当 $\varphi_1=\varphi_1^*$ 时，函数

$$
V_0 = e^{\mathrm{T}}P_{\mathrm{c}}e+\eta\tilde{z}P_{\mathrm{o}}\tilde{z}+\frac{1}{\gamma}\tilde{\delta}_0+\tilde{\delta}^{\mathrm{T}}\tilde{\delta}+\tilde{\theta}^{\mathrm{T}}\tilde{\theta}
$$

对时间的导数满足

$$
\dot{V}_0 \leqslant -\varepsilon\left\|\begin{bmatrix} e \\ \tilde{z}\end{bmatrix}\right\|^2
$$

现在考虑增广系统 (7.115)，增广系统 (7.117) 和增广系统 (7.118) 以及

$$
\dot{\varphi}_1=-\lambda_1\varphi_1+\varphi_2
$$

引入新的变量

$$
\begin{aligned}
\tilde{\varphi}_1 &= \varphi_1-\varphi_1^*\Big(y,\hat{z},y[1],\cdots,y[n-1],\hat{\delta}_0,\hat{\delta}_1,\cdots,\hat{\delta}_n,\hat{\theta}_1,\cdots,\hat{\theta}_p, \\
&\qquad \xi_1[0],\xi_1[1],\cdots,\xi_1[p],u_{\mathrm{r}})
\end{aligned}
$$

则可重新写为

$$
\begin{aligned}
\dot{z} &= A_{\mathrm{c}}z+d\left[\frac{1}{\gamma}\varphi_1^*+\sum_{i=2}^{n}\delta_i y[i-1]+\sum_{i=0}^{p}\theta_i(\psi_i(y)+\xi_1[i])\right]+\frac{1}{\gamma}d\tilde{\varphi}_1 \\
\dot{\tilde{\varphi}}_1 &= -\lambda_1\varphi_1+\varphi_2-\frac{\partial\varphi_1^*}{\partial Y}\dot{Y}-\frac{\partial\varphi_1^*}{\partial\hat{\delta}_0}\dot{\hat{\delta}}_0-\frac{\partial\varphi_1^*}{\partial\hat{\delta}}\dot{\hat{\delta}}-\frac{\partial\varphi_1^*}{\partial\hat{z}}\dot{\hat{z}} \\
&\qquad -\frac{\partial\varphi_1^*}{\partial\hat{\theta}}\dot{\hat{\theta}}-\frac{\partial\varphi_1^*}{\partial u_{\mathrm{r}}}\dot{u}_{\mathrm{r}}-\frac{\partial\varphi_1^*}{\partial\Xi}\dot{\Xi}-\frac{\partial\varphi_1^*}{\partial y}\dot{y}
\end{aligned}
\tag{7.120}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
Y &= \begin{bmatrix} y[1] & \cdots & y[n-1]\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \\
\hat{\delta} &= \begin{bmatrix} \hat{\delta}_1 & \cdots & \hat{\delta}_n\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \\
\hat{\theta} &= \begin{bmatrix} \hat{\theta}_1 & \cdots & \hat{\theta}_n\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \\
\Xi &= \begin{bmatrix} \xi_1[0] & \cdots & \xi_1[p]\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}
\end{aligned}
$$

而$\dot{Y}, \dot{\hat{\delta}}_0, \dot{\hat{\delta}}, \dot{\hat{\theta}}, \dot{u}_{\rm r}, \dot{\Xi}$ 是已知的表达式，$\dot{y}$给定为

$$\dot{y} = c_{\rm c}A_{\rm c}z + \frac{1}{\gamma}\varphi_1 + \sum_{i=2}^{n}\delta_i y[i-1] + \sum_{i=0}^{p}\theta_i(\psi_{i1}(y) + \xi_1[i])$$

且与未知变量和参数相关。定义

$$\begin{aligned}\hat{\dot{y}}_1 &= c_{\rm c}A_{\rm c}\hat{z} + \hat{\delta}_1[2]\varphi_1 + \sum_{i=2}^{n}\hat{\delta}_i[2]y[i-1] + \sum_{i=1}^{p}\hat{\theta}_i[2](\psi_i(y) + \xi_1[i]) \\ &\quad + \psi_{01}(y) + \xi_1[0] - \alpha_1(t)\end{aligned}$$

其中$\hat{\delta}_i[2]$和$\hat{\theta}_i[2]$分别是δ_i和θ_i的估计，δ_i和θ_i不同于已定义的$\hat{\delta}_i$和$\hat{\theta}_i$，且其动态有待确定，而α_1是一个待定函数。变量φ_2视为增广系统的控制，并令

$$\begin{aligned}\varphi_2^* &= \lambda_1\varphi_1 + \frac{\partial\varphi_1^*}{\partial Y}\dot{Y} + \frac{\partial\varphi_1^*}{\partial\hat{\delta}_0}\dot{\hat{\delta}}_0 + \frac{\partial\varphi_1^*}{\partial\hat{\delta}}\dot{\hat{\delta}} + \frac{\partial\varphi_1^*}{\partial\hat{z}}\dot{\hat{z}} \\ &\quad + \frac{\partial\varphi_1^*}{\partial\hat{\theta}}\dot{\hat{\theta}} + \frac{\partial\varphi_1^*}{\partial u_{\rm r}}\dot{u}_{\rm r} + \frac{\partial\varphi_1^*}{\partial\Xi}\dot{\Xi} + \frac{\partial\varphi_1^*}{\partial y}\hat{\dot{y}}_1 - k_1\tilde{\varphi}_1 + v_2(t)\end{aligned} \tag{7.121}$$

将其代入式(7.120)，有

$$\begin{aligned}\dot{z} &= A_{\rm c}z + d\left[\frac{1}{\gamma}\varphi_1^* + \sum_{i=2}^{n}\delta_i y[i-1] + \sum_{i=0}^{p}\theta_i(\psi_i(y) + \xi_1[i])\right] + \frac{1}{\gamma}d\tilde{\varphi}_1 \\ \dot{\tilde{\varphi}}_1 &= -k_1\tilde{\varphi}_1 + v_2(t) - \frac{\partial\varphi_1^*}{\partial y}\left[c_{\rm c}A_{\rm c}\tilde{z} + \tilde{\delta}_1[2]\varphi_1 + \sum_{i=2}^{n}\tilde{\delta}_i[2]y[i-1]\right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^{p}\tilde{\theta}_i[2](\psi_{i1}(y) + \xi_1[i]) + \alpha_1(t)\right]\end{aligned}$$

考虑函数

$$V_1 = V_0 + \frac{1}{2}\left(\tilde{\varphi}_1^2 + \sum_{i=1}^{n}\tilde{\delta}_i^2[2] + \sum_{j=1}^{p}\tilde{\theta}_j^2[2]\right)$$

其对时间的导数满足(注意$1/\gamma = \delta_1 = \hat{\delta}_1[2] + \tilde{\delta}_1[2]$)

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 &\leqslant -\varepsilon\left\|\begin{bmatrix} e \\ \tilde{z}\end{bmatrix}\right\|^2 + \tilde{\varphi}_1\left(2(y-y_{\rm r})\hat{\delta}_1[2] + v_2\right) - k_1\tilde{\varphi}_1^2 - \frac{\partial\varphi_1^*}{\partial y}\tilde{\varphi}_1 c_{\rm c}A_{\rm c}\tilde{z} \\ &\quad -\alpha_1(t)\frac{\partial\varphi_1^*}{\partial y}\tilde{\varphi}_1 + \tilde{\delta}_1[2]\left(-\tilde{\varphi}_1\varphi_1\frac{\partial\varphi_1^*}{\partial y} + \dot{\hat{\delta}}_1[2] + 2(y-y_{\rm r})\tilde{\varphi}_1\right) \\ &\quad + \sum_{i=2}^{n}\tilde{\delta}_i[2]\left(-\tilde{\varphi}_1\frac{\partial\varphi_1^*}{\partial y}y[i-1] + \dot{\hat{\delta}}_i[2]\right) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{p}\tilde{\theta}_j[2]\left(-\tilde{\varphi}_1\frac{\partial\varphi_1^*}{\partial y}(\psi_{i1}(y) + \xi_1[i]) + \dot{\hat{\theta}}_j[2]\right)\end{aligned}$$

选择

$$\begin{aligned}v_2 &= -2(y-y_{\rm r})\hat{\delta}_1[2] \\ \alpha_1 &= k_{\alpha_1}\frac{\partial\varphi_1^*}{\partial y}\tilde{\varphi}_1, \qquad k_{\alpha_1} \geqslant \frac{1}{2\varepsilon} \\ \dot{\hat{\delta}}_1[2] &= -\varphi_1\tilde{\varphi}_1\frac{\partial\varphi_1^*}{\partial y} + 2(y-y_{\rm r})\tilde{\varphi}_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\delta}}_i[2] &= -y[i-1]\tilde{\varphi}_1\frac{\partial\varphi_1^*}{\partial y}, \qquad 2\leqslant i\leqslant n \\ \dot{\hat{\theta}}_j[2] &= -(\psi_{i1}(y)+\xi_1[i])\tilde{\varphi}_1\frac{\partial\varphi_1^*}{\partial y}, \qquad 1\leqslant j\leqslant p\end{aligned} \tag{7.122}$$

由 $\varphi_2=\varphi_2^*$ 得

$$\dot{V}_1 \leqslant -\frac{\varepsilon}{2}\left\|\begin{bmatrix} e\\ \tilde{z}\end{bmatrix}\right\|^2 - k_1\tilde{\varphi}_1^2 \leqslant -\varepsilon_1\left\|\begin{bmatrix} e\\ \tilde{z}\\ \tilde{\varphi}_1\end{bmatrix}\right\|^2$$

其中 ε_1 为一个合适的正实数。若 $\rho=2$，则 φ_2^* 给出了最终控制 $\varphi_2^*=\sigma(y)u$，从而输入 u 为

$$u = \sigma^{-1}(y)\varphi_2^* \triangleq u(y,\hat{z},\hat{\delta}_0,\hat{\delta}_0[2],\hat{\delta},\hat{\delta}[2],\hat{\theta},\hat{\theta}[2],Y,\dot{Y},\Xi,\dot{\Xi},u_{\rm r},\dot{u}_{\rm r},\tilde{\varphi}_1)$$

若 $\rho>2$，由归纳法以相同的过程进行，可以构造具有如下形式的控制 u

$$\begin{aligned} u = u(&y,\hat{z},\hat{\delta}_0,\cdots,\hat{\delta}_0[\rho],\hat{\delta},\cdots,\hat{\delta}[\rho],\hat{\theta},\cdots,\hat{\theta}[\rho],Y,\cdots,Y^{(\rho-1)},\\ &\Xi,\cdots,\Xi^{(\rho-1)},u_{\rm r},\cdots,u_{\rm r}^{(\rho-1)},\tilde{\varphi}_1,\cdots,\tilde{\varphi}_{\rho-1})\end{aligned} \tag{7.123}$$

其中相应的函数

$$V_{\rho-1}=V_0+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\rho-1}\tilde{\varphi}_i^2+\frac{1}{2}\sum_{j=2}^{\rho}\sum_{i=1}^{n}\tilde{\delta}_i^2[j]+\frac{1}{2}\sum_{j=2}^{\rho}\sum_{i=1}^{p}\tilde{\theta}_i^2[j] \tag{7.124}$$

对于闭环动态，其对时间的导数满足不等式($\varepsilon_{\rho-1}>0$)

$$\dot{V}_{\rho-1}\leqslant-\varepsilon_{\rho-1}\left\|\begin{bmatrix} e\\ \tilde{z}\\ \tilde{\varphi}\end{bmatrix}\right\|^2 \tag{7.125}$$

其中，$\tilde{\varphi}=[\tilde{\varphi}_1,\cdots,\tilde{\varphi}_{\rho-1}]^{\rm T}$。由式(7.124)和式(7.125)可知，对于所有的 $t\geqslant 0$，$e(t),\tilde{z}(t),\tilde{\varphi}(t),\hat{\delta}_0(t),\hat{\delta}(t),\hat{\delta}[j](t),\hat{\theta}(t),\hat{\theta}[j](t),2\leqslant j\leqslant\rho$ 以及相应的 $y(t)=c_{\rm c}z(t)$，具有有界的范数。而 $\|\xi(t)\|$ 的有界性可从式(7.118)得出。从式(7.113)和式(7.117)(对于 $i=n-1$)可以计算将 $y[n-1]$ 与 y 联系起来的微分方程

$$\frac{1}{\gamma}\sum_{k=1}^{n}\bar{d}_i\frac{d^{n-k}}{dt^{n-k}}\left(\sum_{i=1}^{n}d_i\frac{d^{n-i}y[n-1]}{dt^{n-i}}\right)=\frac{d^ny}{dt^n}-\sum_{k=1}^{n}\frac{d^{n-k}}{dt^{n-k}}\left(\sum_{j=0}^{p}\psi_{jk}(y)\theta_j\right) \tag{7.126}$$

由于 $y(t)$ 是有界的且多项式(7.114)和多项式(7.116)都是 Hurwitz 的，因此 $y[n-1](t)$ 是有界的。类似地，可以证明 $y[i](t),1\leqslant i\leqslant n-2$ 是有界的。从式(7.119)可见 φ_1^* 是有界的，由于已经证明 $\tilde{\varphi}_1$ 是有界的，因此 φ_1 也是有界的。从而滤波器(7.117)的输入是有界的，其说明所有的状态向量 $\mu[j],1\leqslant j\leqslant n-1$ 和式(7.123)中的输入 u 是有界的。故 $\dot{e}(t),\dot{\tilde{z}}(t)$ 和 $\dot{\tilde{\varphi}}(t)$ 具有有界的范数。回顾式(7.124)和式(7.125)，并对向量 $[e^{\rm T},\tilde{z}^{\rm T},\tilde{\varphi}^{\rm T}]^{\rm T}$ 应用推论 B.2.1，可得

$$\lim_{t\to\infty}\left\|\begin{bmatrix} e(t)\\ \tilde{z}(t)\\ \tilde{\varphi}(t)\end{bmatrix}\right\|=0 \tag{7.127}$$

从而

$$\lim_{t\to\infty}(y(t)-y_{\rm r}(t))=0 \tag{7.128}$$

□

评注 7.4.3 在镇定问题中，假设在系统 (7.80) 中 $f(0)=0, q_i(0)=0, 1\leqslant i\leqslant p$；相应地在系统 (7.81) 中有 $\psi_i(0)=0, 0\leqslant i\leqslant p$。参考轨迹为 $z_{\mathrm{r}}(t)=0$，即在式 (7.98) 中有 $z_{\mathrm{r}}(0)=0$ 及 $u_{\mathrm{r}}=0$。考虑系统 (7.118) 和系统 (7.126)，由于 $\psi_i(0)=0$ 及式 (7.128) 成立，所以能够证明

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\|\xi[i](t)\| &= 0, \qquad 0\leqslant i\leqslant p\\ \lim_{t\to\infty}y[n-1](t) &= 0\end{aligned}$$

类似地

$$\lim_{t\to\infty}y[i](t)=0, \qquad 1\leqslant i\leqslant n-2 \tag{7.129}$$

该式与式 (7.127) 意味着 $\lim_{t\to\infty}u(t)=0$，因此有

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\|\mu[i](t)\| &= 0, \qquad 1\leqslant i\leqslant n-1\\ \lim_{t\to\infty}\varphi_i(t) &= 0, \qquad 1\leqslant i\leqslant \rho-1\end{aligned} \tag{7.130}$$

由于通过变换 (7.111)、变换 (7.83) 和变换 (7.89)，$\zeta(t)$ 与 $z(t)$ 相关联，考虑式 (7.127)~式 (7.130)，最终有

$$\lim_{t\to\infty}\|\zeta(t)\|=0 \tag{7.131}$$

由于 $\zeta=T(x)$，其中 $T(0)=0$，则有

$$\lim_{t\to\infty}\|x(t)\|=0 \tag{7.132}$$

□

例 7.4.2 考虑系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2+\theta x_1^3\\ \dot{x}_2 &= u\\ y &= x_1\end{aligned}$$

其相对阶为 $\rho=2$，且具有式 (7.109) 的形式。应用引理 7.4.4，其中 $\bar{d}=[1,1]^{\mathrm{T}}$，可知滤波器 (7.112)($\lambda_1=1$)

$$\dot{\varphi}=-\varphi+u$$

将系统变换为(在此情形下 $\gamma=1$)

$$\begin{aligned}\dot{\bar{z}} &= A_{\mathrm{c}}\bar{z}+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\varphi+\theta\begin{bmatrix}y^3\\0\end{bmatrix}\\ y &= c_{\mathrm{c}}\bar{z}\end{aligned} \tag{7.133}$$

由于向量 d 具有已知项(或分量)，所以不需要用引理 7.4.1，而是应用引理 7.4.2，其中 $d=[1,1]^{\mathrm{T}}$，且

$$\dot{\xi}=-\xi-y^3$$

它将系统 (7.133) 变换为

$$\begin{aligned}\dot{z} &= A_{\mathrm{c}}z+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(\varphi+\theta(y^3+\xi))\\ y &= c_{\mathrm{c}}z\end{aligned}$$

根据式(7.98)和式(7.119)，令$(\lambda_c>0,\lambda_o>0)$

$$
\begin{aligned}
\varphi^* &= -\hat{\theta}(y^3+\xi)-\begin{bmatrix}\lambda_c & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{z}_1\\ \hat{z}_2\end{bmatrix}+u_r\\
\dot{z}_r &= \begin{bmatrix}-\lambda_c & 0\\ -\lambda_c & -1\end{bmatrix}z_r+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}u_r\\
y_r &= \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}z_r\\
\dot{\hat{z}} &= A_c\hat{z}+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}[\varphi+\hat{\theta}(y^3+\xi)]-\begin{bmatrix}-1-\lambda_o\\ -\lambda_o\end{bmatrix}(y-\hat{y})\\
\hat{y} &= c_c\hat{z}\\
\dot{\hat{\theta}} &= [(y-y_r)+\eta(y-\hat{y})](y^3+\xi)
\end{aligned}
$$

其参考模型为

$$y_r(s) = \frac{1}{s+\lambda_c}u_r(s)$$

回顾式(7.121)和式(7.122)，自适应控制给定如下：

$$
\begin{aligned}
u &= \varphi-(y^3+\xi)\dot{\hat{\theta}}-\lambda_c\dot{\hat{z}}_1-\dot{\hat{z}}_2+\dot{u}_r-\hat{\theta}\dot{\xi}\\
&\quad -3\hat{\theta}y^2\left[\hat{z}_2+\varphi+\hat{\theta}[2](y^3+\xi)+k_\alpha(3\hat{\theta}y^2)(\varphi-\varphi^*)\right]-k_1(\varphi-\varphi^*)\\
\dot{\hat{\theta}}[2] &= 3\hat{\theta}y^2(y^3+\xi)(\varphi-\varphi^*)
\end{aligned}
$$

其中$\xi,\hat{\theta},\hat{z}=[\hat{z}_1,\hat{z}_2]^{\mathrm{T}},z_r=[z_{r1},z_{r2}]^{\mathrm{T}}$，$\varphi$ 的动态将由上述动态方程描述。 □

作为自适应输出反馈跟踪定理的一个推论，这里重新给出线性系统自适应控制中的一个众所周知的结果。

定理 7.4.4 自适应输出反馈跟踪(线性)(Adaptive Output Feedback Tracking(Linear)) *考虑一个线性系统，其传递函数为*

$$W(s)=\frac{b_\rho s^{n-\rho}+\cdots+b_n}{s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_n} \tag{7.134}$$

假设该系统是最小相位的，具有已知定常的相对阶ρ，高频增益b_ρ具有已知定常的符号，并且系统阶数n的上界n^*已知，则存在一个全局自适应输出反馈跟踪控制。 □

证明: 令

$$
\begin{aligned}
\dot{z} &= A_cz+bu-ay, \qquad z\in\mathbb{R}^{n^*}\\
y &= c_cz, \qquad y\in\mathbb{R}
\end{aligned}
$$

是$W(s)$的一个可观实现，且$n=n^*$，$b=[0,\cdots,b_\rho,\cdots,b_{n^*}]^{\mathrm{T}}$，$a=[a_1,\cdots,a_{n^*}]^{\mathrm{T}}$是未知向量。因为系统是最小相位的且$b_\rho$具有已知定常的符号，故满足定理7.4.1的条件(i)~条件(v)，所以定理7.4.2或者定理7.4.3适用。 □

例 7.4.3 考虑系统

$$\dot{x}_1 = x_2+\theta_1\mathrm{e}^y$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_2 &= x_3\\ \dot{x}_3 &= \theta_2 u\\ y &= x_1 + 2x_2 + x_3\end{aligned}$$

其中$\theta_2 > 0$，该系统的相对阶$\rho = 1$且满足定理7.4.2的假设，因此可通过输出反馈进行全局自适应控制。事实上，线性变换

$$\begin{aligned}\zeta_1 &= x_1 + 2x_2 + x_3\\ \zeta_2 &= x_2 + 2x_3\\ \zeta_3 &= x_3\end{aligned}$$

将系统变换为

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}_1 &= \zeta_2 + \theta_2 u + \theta_1 \mathrm{e}^y\\ \dot{\zeta}_2 &= \zeta_3 + 2\theta_2 u\\ \dot{\zeta}_3 &= \theta_2 u\\ y &= \zeta_1\end{aligned} \tag{7.135}$$

其具有式(7.82)的形式，其中$b = [1,2,1]^{\mathrm{T}}$是一个Hurwitz向量且$\gamma = 1/\theta_2$。由于b是一个已知向量，因此不需要滤波变换(7.83)和滤波变换(7.84)。根据引理7.4.2，只需要滤波变换(7.89)和滤波变换(7.90)，在这种情形下变为

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\dot{\xi}_1\\ \dot{\xi}_2\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}-2 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathrm{e}^y\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\\ z &= \zeta - \theta_1\begin{bmatrix}0\\ \xi_1\\ \xi_2\end{bmatrix}\end{aligned}$$

且将系统(7.135)变换为自适应跟踪型

$$\begin{aligned}\dot{z} &= \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} z + \begin{bmatrix}1\\ 2\\ 1\end{bmatrix}(\theta_2 u + \theta_1(\mathrm{e}^y + \xi_1))\\ y &= \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix} z\end{aligned}$$

从而按照定理7.4.2的证明，利用式(7.101)，式(7.102)和式(7.107)可以构建一个自适应跟踪控制律

$$\begin{aligned}u &= -\hat{\delta}_0[\hat{\theta}_1(\mathrm{e}^y + \xi_1) - k_{\mathrm{c}}\hat{z} - u_{\mathrm{r}}]\\ \dot{\hat{z}} &= \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\hat{z} + \begin{bmatrix}1\\ 2\\ 1\end{bmatrix}(\hat{\delta}_1 u + \hat{\theta}_1(\mathrm{e}^y + \xi_1)) - k_{\mathrm{o}}(y - \hat{z}_1)\\ \dot{\hat{\theta}}_1 &= [y - y_{\mathrm{r}} + \eta(y - \hat{z}_1)](\mathrm{e}^y + \xi_1)\\ \dot{\hat{\delta}}_0 &= [-k_{\mathrm{c}}\hat{z} + \hat{\theta}_1(\mathrm{e}^y + \xi_1) - u_{\mathrm{r}}](y - y_{\mathrm{r}})\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\dot{\hat{\delta}}_1 &= -\eta(y-\hat{z}_1)\hat{\delta}_0[\hat{\theta}_1(\mathrm{e}^y+\xi_1)-k_{\mathrm{c}}\hat{z}-u_{\mathrm{r}}] \\
\dot{z}_{\mathrm{r}} &= \begin{bmatrix} -\lambda_{\mathrm{c}} & 0 & 0 \\ -2\lambda_{\mathrm{c}} & -2 & 1 \\ -\lambda_{\mathrm{c}} & -1 & 0 \end{bmatrix} z_{\mathrm{r}} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} u_{\mathrm{r}}
\end{aligned}
$$

其中 u_{r} 由式(7.99)给出，$k_{\mathrm{c}}=[-\lambda_{\mathrm{c}},-1,0], k_{\mathrm{o}}=[-2-\lambda_{\mathrm{o}},-1-2\lambda_{\mathrm{o}},-\lambda_{\mathrm{o}}]^{\mathrm{T}}, \lambda_{\mathrm{c}}>0, \lambda_{\mathrm{o}}>0$，且 η 足够大。 □

例 7.4.4 考虑系统

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2+\theta_1 x_1^2 \\
\dot{x}_2 &= x_3 \\
\dot{x}_3 &= \theta_2 u \\
y &= x_1
\end{aligned}
$$

其中 $\theta_2>0$。根据定理7.4.3和评注7.4.3，可以设计全局自适应输出反馈镇定控制或者跟踪控制。事实上，该例中系统的相对阶 $\rho=3$，且已经是式(7.109)所示的形式，其中 $b=[0,0,1]^{\mathrm{T}}$，$\gamma=1/\theta_2$。 □

7.5 实例

例 7.5.1 (问题 1.10.8)考虑一个单连杆**柔性关节机器人(robot with flexible joint)**的模型，假设物理参数均为正，且属于一个已知的紧集，忽略摩擦力，假设可测量的变量 y 与 x_1 成比例，即 $y=\theta x_1$，其中 θ 是一个未知常数

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= -\frac{Mgl}{J_{\mathrm{l}}}\sin x_1-\frac{k}{J_{\mathrm{l}}}(x_1-x_3) \\
\dot{x}_3 &= x_4 \\
\dot{x}_4 &= \frac{k}{J_{\mathrm{m}}}(x_1-x_3)+\frac{1}{J_{\mathrm{m}}}u \\
y &= \theta x_1
\end{aligned}
\tag{7.136}
$$

定理7.1.1适用且全局相对阶 $\rho=4$。事实上，实施线性的与参数相关的坐标变换 $\zeta=\theta x, \zeta\in\mathbb{R}^4$，可得

$$
\begin{aligned}
\dot{\zeta}_1 &= \zeta_2 \\
\dot{\zeta}_2 &= -\theta\frac{Mgl}{J_{\mathrm{l}}}\sin\left(\frac{y}{\theta}\right)-\frac{k}{J_{\mathrm{l}}}(y-\zeta_3) \\
\dot{\zeta}_3 &= \zeta_4 \\
\dot{\zeta}_4 &= \frac{k}{J_{\mathrm{m}}}(y-\zeta_3)+\frac{\theta}{J_{\mathrm{m}}}u \\
y &= \zeta_1
\end{aligned}
\tag{7.137}
$$

附加的线性坐标变换

$$
z_1 = \zeta_1
$$

$$
\begin{aligned}
z_2 &= \zeta_2 \\
z_3 &= k\left(\frac{\zeta_1}{J_{\mathrm{m}}}+\frac{\zeta_3}{J_{\mathrm{l}}}\right) \\
z_4 &= k\left(\frac{\zeta_2}{J_{\mathrm{m}}}+\frac{\zeta_4}{J_{\mathrm{l}}}\right)
\end{aligned} \tag{7.138}
$$

将系统 (7.137) 变换为

$$
\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= z_2 \\
\dot{z}_2 &= z_3 - k\left(\frac{J_{\mathrm{l}}+J_{\mathrm{m}}}{J_{\mathrm{l}}J_{\mathrm{m}}}\right)y - \theta\frac{Mgl}{J_{\mathrm{l}}}\sin\left(\frac{y}{\theta}\right) \\
\dot{z}_3 &= z_4 \\
\dot{z}_4 &= -\theta\frac{kMgl}{J_{\mathrm{m}}J_{\mathrm{l}}}\sin\left(\frac{y}{\theta}\right) + \frac{k\theta}{J_{\mathrm{l}}J_{\mathrm{m}}}u \\
y &= z_1
\end{aligned} \tag{7.139}
$$

其具有式 (7.3) 的形式，其中参数 θ 是非线性的。将式 (7.138) 和 $\xi = \theta x$ 结合，可显式地给出参数相关的微分同胚，定理 7.1.1 保证其存在性，它将式 (7.136) 变换为式 (7.139)。定理 7.2.3 和定理 7.3.2 适用，并分别给出一个鲁棒输出反馈镇定控制和一个自校正输出反馈定点调节器。 □

例 7.5.2 (问题1.10.2)考虑在垂直平面内旋转的一个单连杆**刚体机器人(rigid robot)**，其模型为

$$
I\ddot{q} + \frac{1}{2}mgl\cos q = u
$$

其中转动惯量 I 未知，常数 mgl 未知。该模型可重写为状态空间形式($x_1 = q, x_2 = \dot{q}$)

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= \frac{1}{I}u + \theta\cos x_1 \\
y &= x_1
\end{aligned} \tag{7.140}
$$

其中 $\theta = -mgl/(2I)$，系统为式 (7.109) 的形式，其中 $b = [0,1]^{\mathrm{T}}, \gamma = I$。按照引理 7.4.4，引入滤波器

$$
\dot{\varphi} = -\varphi + u
$$

该滤波器和适当的滤波变换将系统 (7.140) 变换为

$$
\begin{aligned}
\dot{\bar{z}} &= A_{\mathrm{c}}\bar{z} + \frac{1}{I}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\varphi + \begin{bmatrix} 0 \\ \cos y \end{bmatrix}\theta \\
y &= c_{\mathrm{c}}\bar{z}
\end{aligned} \tag{7.141}
$$

按照引理 7.4.2，通过引入滤波器

$$
\dot{\xi} = -\xi + \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ \cos y \end{bmatrix} = -\xi + \cos y
$$

和适当的滤波变换，将系统 (7.141) 变换为

$$
\begin{aligned}
\dot{z} &= A_{\mathrm{c}}z + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\left(\frac{1}{I}\varphi + \theta\xi\right) \\
y &= c_{\mathrm{c}}z
\end{aligned} \tag{7.142}
$$

因此，根据定理7.4.3，由式(7.119)和式(7.121)可得自适应跟踪控制($\hat{\delta}$是$\delta = 1/I$的估计)

$$
\begin{aligned}
\dot{\hat{z}} &= A_c\hat{z} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}(\hat{\delta}\varphi + \hat{\theta}\xi) - \begin{bmatrix} -1-\lambda_o \\ -\lambda_o \end{bmatrix}(y-\hat{y}) \\
\hat{y} &= c_c\hat{z} \\
\varphi^* &= -\hat{I}\left(\begin{bmatrix} \lambda_c & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{z}_1 \\ \hat{z}_2 \end{bmatrix} + \hat{\theta}\xi - u_r\right) \\
\dot{\hat{\theta}} &= [(y-y_r) + \eta(y-\hat{y})]\xi \\
\dot{\hat{I}} &= (y-y_r)\left(\begin{bmatrix} \lambda_c & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{z}_1 \\ \hat{z}_2 \end{bmatrix} + \hat{\theta}\xi - u_r\right) \\
\dot{\hat{\delta}} &= \eta(y-\hat{y})\varphi \\
\dot{z}_r &= \begin{bmatrix} -\lambda_c & 0 \\ -\lambda_c & -1 \end{bmatrix} z_r + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u_r \\
y_r &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} z_r \\
u &= -\dot{\hat{I}}(\lambda_c\hat{z}_1 + \hat{z}_2 + \hat{\theta}\xi - u_r) - \hat{I}(\lambda_c\dot{\hat{z}}_1 + \dot{\hat{z}}_2) \\
&\quad -\hat{I}\dot{\hat{\theta}}\xi - \hat{I}\hat{\theta}\dot{\xi} + \hat{I}\dot{u}_r - k_1(\varphi - \varphi^*) + \varphi
\end{aligned}
$$

注意u与已知信号$\dot{\hat{I}}, \dot{\hat{z}}, \dot{\hat{\theta}}, \dot{\xi}$和$\dot{u}_r$相关。 □

例 7.5.3 (问题1.10.12)考虑一个**太阳帆板卫星(satellite with solar arrays)**的简化模型。为设计反馈控制，我们仅保留一阶弹性模态($N = 1$)，因此模型可进一步简化为

$$
\begin{aligned}
\phi(s) &= \frac{1}{Js^2}\frac{s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2}{\frac{J-2p^2}{J}s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2}\left(u(s) + \frac{d_T}{s}\right) \\
&\triangleq \frac{1}{\gamma}\frac{s^2 + b_3 s + b_4}{s^4 - \theta_1 s^3 - \theta_2 s^2}\left(u(s) + \frac{d_T}{s}\right)
\end{aligned}
$$

其中$\gamma > 0$，$b_3, b_4, \theta_1, \theta_2$和$d_T$是未知定常参数。它的一个状态空间实现为

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= A_c x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}\frac{1}{\gamma}u + \begin{bmatrix} y \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\theta_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\theta_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\theta_3 \\
&\quad + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\theta_4 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\theta_5 \\
&\triangleq A_c x + b\frac{1}{\gamma}u + \sum_{i=1}^{5}\psi_i(y)\theta_i \\
y &= c_c x
\end{aligned} \tag{7.143}
$$

其中$\theta_3 = d_T/\gamma, \theta_4 = b_3 d_T/\gamma, \theta_5 = b_4 d_T/\gamma$。该系统的相对阶为$\rho = 2$。首先，对式(7.143)应

用引理 7.4.4，滤波器 $(\lambda=1)$ 为

$$\dot{\varphi}=-\varphi+u$$

对变换后的系统再应用引理 7.4.1，滤波器为

$$\begin{aligned}
\dot{\mu}[1] &= \begin{bmatrix} -\lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda_3 \end{bmatrix}\mu[1]+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\varphi \\
y[1] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\mu[1] \\
\dot{\mu}[2] &= \begin{bmatrix} -\lambda_1 & 1 \\ 0 & -\lambda_2 \end{bmatrix}\mu[2]+\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\varphi \\
y[2] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\mu[2] \\
\dot{\mu}[3] &= -\lambda_1\mu[3]+\varphi \\
y[3] &= \mu[3]
\end{aligned}$$

且 $d=[1,\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3,\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3,\lambda_1\lambda_2\lambda_3]^{\mathrm{T}}$。最后，对变换后系统应用引理 7.4.2，滤波器为

$$\dot{\xi}[i]=\begin{bmatrix} -d_2 & 1 & 0 \\ -d_3 & 0 & 1 \\ -d_4 & 0 & 0 \end{bmatrix}\xi[i]+\begin{bmatrix} -d_2 & 1 & 0 & 0 \\ -d_3 & 0 & 1 & 0 \\ -d_4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\psi_i(y),\qquad 1\leqslant i\leqslant 5$$

使得

$$\begin{aligned}
\dot{z} &= A_{\mathrm{c}}z+d\left[\frac{\varphi}{\gamma}+\sum_{j=2}^{4}\delta_j y[j-1]+\sum_{i=1}^{5}\theta_i(\psi_{i1}(y)+\xi_1[i])\right] \\
y &= c_{\mathrm{c}}z
\end{aligned}$$

定义参考模型

$$\begin{aligned}
\dot{z}_{\mathrm{r}} &= (A_{\mathrm{c}}+dk_{\mathrm{c}})z_{\mathrm{r}}+du_{\mathrm{r}} \\
y_{\mathrm{r}} &= c_{\mathrm{c}}z_{\mathrm{r}}
\end{aligned}$$

其中 k_{c} 使得

$$\det(sI-A_{\mathrm{c}}-dk_{\mathrm{c}})=(s+\lambda_{\mathrm{c}})(s^3+d_2s^2+d_3s+d_4)$$

从而有

$$y_{\mathrm{r}}(s)=\frac{1}{s+\lambda_{\mathrm{c}}}u_{\mathrm{r}}(s)$$

第一步，由式 (7.119) 定义

$$\begin{aligned}
\varphi^* &= -\hat{\delta}_0\left[\sum_{j=2}^{4}\hat{\delta}_j y[j-1]+\hat{\theta}_1(y+\xi_1[1])+\sum_{i=2}^{5}\hat{\theta}_i\xi_1[i]-k_{\mathrm{c}}\hat{z}-u_{\mathrm{r}}\right] \\
\dot{\hat{z}} &= A_{\mathrm{c}}\hat{z}+d\left[\hat{\delta}_1\varphi+\sum_{j=2}^{4}\hat{\delta}_j y[j-1]+\hat{\theta}_1(y+\xi_1[1])+\sum_{i=2}^{5}\hat{\theta}_i\xi_1[i]\right]-k_{\mathrm{o}}(y-\hat{y})
\end{aligned}$$

$$\hat{y} = c_c \hat{z}$$

其中 $k_o = [-(\lambda_o + d_2), -(d_3 + d_2\lambda_o), -(d_4 + d_3\lambda_o), -d_4\lambda_o]^T$，使得

$$\det(sI - A_c - k_o c_c) = (s + \lambda_o)(s^3 + d_2 s^2 + d_3 s + d_4)$$

且取自适应律为

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{\delta}}_0 &= (y - y_r)\left(\sum_{j=2}^{4} \hat{\delta}_j y[j-1] + \hat{\theta}_1(y + \xi_1[1]) + \sum_{i=2}^{5} \hat{\theta}_i \xi_1[i] - k_c \hat{z} - u_r\right) \\
\dot{\hat{\delta}}_1 &= \eta(y - \hat{y})\varphi \\
\dot{\hat{\delta}}_j &= [(y - y_r) + \eta(y - \hat{y})]y[j-1], \qquad 2 \leqslant j \leqslant 4 \\
\dot{\hat{\theta}}_1 &= [(y - y_r) + \eta(y - \hat{y})](y + \xi_1[1]) \\
\dot{\hat{\theta}}_i &= [(y - y_r) + \eta(y - \hat{y})]\xi_1[i], \qquad 2 \leqslant i \leqslant 5
\end{aligned}$$

由于 $\rho = 2$，根据式 (7.121)，自适应控制为

$$\begin{aligned}
u = {} & \varphi + \sum_{j=2}^{4}\left(-\hat{\delta}_0 \hat{\delta}_j \dot{y}[j-1] - \hat{\delta}_0 y[j-1]\dot{\hat{\delta}}_j\right) \\
& -\dot{\hat{\delta}}_0\left(\sum_{j=2}^{4} \hat{\delta}_j y[j-1] + \hat{\theta}_1(y + \xi_1[1]) + \sum_{i=2}^{5} \hat{\theta}_i \xi_1[i] - k_c \hat{z} - u_r\right) \\
& -\hat{\delta}_0(y + \xi_1[1])\dot{\hat{\theta}}_1 - \hat{\delta}_0 \hat{\theta}_1 \dot{\xi}_1[1] \\
& + \sum_{i=2}^{5}(-\hat{\delta}_0 \hat{\theta}_i \dot{\xi}_1[i] - \hat{\delta}_0 \xi_1[i]\dot{\hat{\theta}}_i) + \hat{\delta}_0 k_c \dot{\hat{z}} + \hat{\delta}_0 \dot{u}_r \\
& -\hat{\delta}_0 \hat{\theta}_1 \Bigg[\hat{z}_2 + \hat{\delta}_1[2]\varphi + \sum_{j=2}^{4} \hat{\delta}_j[2] y[j-1] + \hat{\theta}_1[2](y + \xi_1[1]) \\
& + \sum_{i=2}^{5} \hat{\theta}_i[2]\xi_1[i] + k_\alpha \hat{\delta}_0 \hat{\theta}_1(\varphi - \varphi^*)\Bigg] - k_1(\varphi - \varphi^*) - 2(y - y_r)\hat{\delta}_1[2] \\
\dot{\hat{\delta}}_1[2] = {} & \varphi(\varphi - \varphi^*)\hat{\delta}_0 \hat{\theta}_1 + 2(y - y_r)(\varphi - \varphi^*) \\
\dot{\hat{\delta}}_i[2] = {} & y[i-1](\varphi - \varphi^*)\hat{\delta}_0 \hat{\theta}_1, \qquad 2 \leqslant i \leqslant 4 \\
\dot{\hat{\theta}}_1[2] = {} & (y + \xi_1[1])(\varphi - \varphi^*)\hat{\delta}_0 \hat{\theta}_1 \\
\dot{\hat{\theta}}_j[2] = {} & \xi_1[j](\varphi - \varphi^*)\hat{\delta}_0 \hat{\theta}_1, \qquad 2 \leqslant j \leqslant 5
\end{aligned}$$

□

例 7.5.4 (问题1.10.8)考虑在垂直平面内旋转的单连杆柔性关节机器人(**robot with flexible joint**) 的模型，将其重写为状态空间形式

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= -\frac{F_l}{J_l}x_2 - \frac{Mgl}{J_l}\sin x_1 - \frac{k}{J_l}(x_1 - x_3) \\
\dot{x}_3 &= x_4 \\
\dot{x}_4 &= -\frac{F_m}{J_m}x_4 + \frac{k}{J_m}(x_1 - x_3) + \frac{1}{J_m}u
\end{aligned}$$

$$y = x_1 \tag{7.144}$$

若采用与参数相关的线性坐标变换

$$\begin{aligned}
z_1 &= x_1\\
z_2 &= x_2 + \left(\frac{F_\mathrm{l}}{J_\mathrm{l}} + \frac{F_\mathrm{m}}{J_\mathrm{m}}\right)x_1\\
z_3 &= \frac{k}{J_\mathrm{l}}x_3 + \left(\frac{k}{J_\mathrm{m}} + \frac{F_m F_\mathrm{l}}{J_\mathrm{l}J_\mathrm{m}}\right)x_1 + \frac{F_\mathrm{m}}{J_\mathrm{m}}x_2\\
z_4 &= \frac{k}{J_\mathrm{l}}x_4 + \frac{F_\mathrm{m}k}{J_\mathrm{l}J_\mathrm{m}}x_3 + \frac{k}{J_\mathrm{m}}x_2 + \frac{F_\mathrm{l}k}{J_\mathrm{l}J_\mathrm{m}}x_1
\end{aligned}$$

则在 z 坐标系下，系统(7.144)变为

$$\begin{aligned}
\dot{z} &= A_\mathrm{c}z + \begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ \theta_7 \end{bmatrix}u + \begin{bmatrix} y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & y & \sin y & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & y & \sin y & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \theta_1\\ \theta_2\\ \theta_3\\ \theta_4\\ \theta_5\\ \theta_6 \end{bmatrix}\\
y &= c_\mathrm{c}z
\end{aligned} \tag{7.145}$$

其中 $(\theta_1,\cdots,\theta_7)$ 是一个新的参数化。由于 $\theta_7 = k/(J_\mathrm{l}J_\mathrm{m})$ 的符号为正，该系统满足定理7.4.3的假设且相对阶 $\rho = 4$。 □

例 7.5.5 (问题1.10.7)由例6.5.2可知，若定义

$$\frac{1}{(y_1^2+y_2^2)^{1/2}}\begin{bmatrix} y_1 & y_2\\ y_2 & -y_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1\\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1\\ v_2 \end{bmatrix}$$

则在合适的坐标下，**点质量卫星(point mass satellite)**模型可写为

$$\begin{aligned}
\dot{\zeta}_1 &= \zeta_2\\
\dot{\zeta}_2 &= \theta_1\psi_{11}(y) + \theta_2 v_1\\
y_1 &= \zeta_1\\
\dot{\zeta}_3 &= \zeta_4\\
\dot{\zeta}_4 &= \theta_1\psi_{12}(y) + \theta_2 v_2\\
y_2 &= \zeta_3
\end{aligned} \tag{7.146}$$

令 $\gamma = 1/\theta_2, d = [1,1]^\mathrm{T}$，且对两个子系统应用引理7.4.4可知，存在由滤波器

$$\begin{aligned}
\dot{\varphi}_1 &= -\varphi_1 + v_1\\
\dot{\varphi}_2 &= -\varphi_2 + v_2
\end{aligned}$$

驱动的一个滤波变换，将式(7.146)变换为

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{z}}_1 &= \bar{z}_2 + \frac{1}{\gamma}\varphi_1\\
\dot{\bar{z}}_2 &= \frac{1}{\gamma}\varphi_1 + \theta_1\psi_{11}(y)\\
y_1 &= \bar{z}_1
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\dot{\bar{z}}_3 &= \bar{z}_4 + \frac{1}{\gamma}\varphi_2 \\
\dot{\bar{z}}_4 &= \frac{1}{\gamma}\varphi_2 + \theta_1\psi_{12}(y) \\
y_2 &= \bar{z}_3
\end{aligned} \tag{7.147}
$$

现在，应用引理 7.4.2，其中 $d=[1,1]^{\mathrm{T}}$，该引理说明存在一个由滤波器

$$
\begin{aligned}
\dot{\xi}_1 &= -\xi_1 + \psi_{11}(y) \\
\dot{\xi}_2 &= -\xi_2 + \psi_{12}(y)
\end{aligned}
$$

驱动的滤波变换，将式 (7.147) 变换为

$$
\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= z_2 + \frac{1}{\gamma}\varphi_1 + \theta_1\xi_1 \\
\dot{z}_2 &= \frac{1}{\gamma}\varphi_1 + \theta_1\xi_1 \\
y_1 &= z_1 \\
\dot{z}_3 &= z_4 + \frac{1}{\gamma}\varphi_2 + \theta_1\xi_2 \\
\dot{z}_4 &= \frac{1}{\gamma}\varphi_2 + \theta_1\xi_2 \\
y_2 &= z_3
\end{aligned} \tag{7.148}
$$

按照定理 7.4.3 的证明，根据式 (7.119)，令

$$
\begin{aligned}
\varphi_1^* &= -\hat{\gamma}\left(\hat{\theta}_1\xi_1 - k_{\mathrm{c}}\begin{bmatrix}\hat{z}_1\\ \hat{z}_2\end{bmatrix} - u_{\mathrm{r}1}\right) \\
\varphi_2^* &= -\hat{\gamma}\left(\hat{\theta}_1\xi_2 - k_{\mathrm{c}}\begin{bmatrix}\hat{z}_3\\ \hat{z}_4\end{bmatrix} - u_{\mathrm{r}2}\right)
\end{aligned} \tag{7.149}
$$

其中 $k_{\mathrm{c}}=[-\lambda_{\mathrm{c}},-1],\lambda_{\mathrm{c}}>0$，观测器为(回顾 $\gamma=1/\theta_2$)

$$
\begin{aligned}
\dot{\hat{z}}_1 &= \hat{z}_2 + \hat{\delta}_1\varphi_1 + \hat{\theta}_1\xi_1 - k_{\mathrm{o}1}(y_1 - \hat{z}_1) \\
\dot{\hat{z}}_2 &= \hat{\delta}_1\varphi_1 + \hat{\theta}_1\xi_1 - k_{\mathrm{o}2}(y_1 - \hat{z}_1) \\
\dot{\hat{z}}_3 &= \hat{z}_4 + \hat{\delta}_1\varphi_2 + \hat{\theta}_1\xi_2 - k_{\mathrm{o}1}(y_2 - \hat{z}_3) \\
\dot{\hat{z}}_4 &= \hat{\delta}_1\varphi_2 + \hat{\theta}_1\xi_2 - k_{\mathrm{o}2}(y_2 - \hat{z}_3)
\end{aligned}
$$

其中 $[k_{\mathrm{o}1},k_{\mathrm{o}2}]=[-1-\lambda_{\mathrm{o}},-\lambda_{\mathrm{o}}],\lambda_{\mathrm{o}}>0$，参考模型为

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix}\dot{z}_{\mathrm{r}1}\\ \dot{z}_{\mathrm{r}2}\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}-\lambda_{\mathrm{c}} & 0\\ -\lambda_{\mathrm{c}} & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_{\mathrm{r}1}\\ z_{\mathrm{r}2}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}u_{\mathrm{r}1} \\
y_{\mathrm{r}1} &= \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_{\mathrm{r}1}\\ z_{\mathrm{r}2}\end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix}\dot{z}_{\mathrm{r}3}\\ \dot{z}_{\mathrm{r}4}\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}-\lambda_{\mathrm{c}} & 0\\ -\lambda_{\mathrm{c}} & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_{\mathrm{r}3}\\ z_{\mathrm{r}4}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}u_{\mathrm{r}2} \\
y_{\mathrm{r}2} &= \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_{\mathrm{r}3}\\ z_{\mathrm{r}4}\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

按照 $e_i = z_i - z_{\mathrm{r}i}, 1 \leqslant i \leqslant 4$ 以及

$$\begin{aligned}
\tilde{\varphi}_1 &= \varphi_1 - \varphi_1^*(\xi_1, \hat{z}_1, \hat{z}_2, \hat{\theta}_1, \hat{\gamma}, u_{\mathrm{r}1}) \\
\tilde{\varphi}_2 &= \varphi_2 - \varphi_2^*(\xi_2, \hat{z}_1, \hat{z}_2, \hat{\theta}_1, \hat{\gamma}, u_{\mathrm{r}2})
\end{aligned}$$

动态 (7.148) 可重写为：

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\lambda_{\mathrm{c}} & 0 \\ -\lambda_{\mathrm{c}} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{\mathrm{c}} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{z}_1 \\ \tilde{z}_2 \end{bmatrix} \\
&\quad - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{\tilde{\gamma}}{\gamma} \left(\hat{\theta}_1 \xi_1 + \begin{bmatrix} \lambda_{\mathrm{c}} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{z}_1 \\ \hat{z}_2 \end{bmatrix} - u_{\mathrm{r}1} \right) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tilde{\theta}_1 \xi_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tilde{\varphi}_1 \\
\dot{\tilde{\varphi}}_1 &= v_1 - \varphi_1 + \dot{\hat{\gamma}} \left(\hat{\theta}_1 \xi_1 + \begin{bmatrix} \lambda_{\mathrm{c}} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{z}_1 \\ \hat{z}_2 \end{bmatrix} - u_{\mathrm{r}1} \right) \\
&\quad + \hat{\gamma} \xi_1 \dot{\hat{\theta}}_1 + \hat{\gamma} \hat{\theta}_1 \dot{\xi}_1 + \hat{\gamma} \begin{bmatrix} \lambda_{\mathrm{c}} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\hat{z}}_1 \\ \dot{\hat{z}}_2 \end{bmatrix} - \hat{\gamma} \dot{u}_{\mathrm{r}1} \\
\begin{bmatrix} \dot{e}_3 \\ \dot{e}_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\lambda_{\mathrm{c}} & 0 \\ -\lambda_{\mathrm{c}} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_3 \\ e_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{\mathrm{c}} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{z}_3 \\ \tilde{z}_4 \end{bmatrix} \\
&\quad - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{\tilde{\gamma}}{\gamma} \left(\hat{\theta}_1 \xi_2 + \begin{bmatrix} \lambda_{\mathrm{c}} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{z}_3 \\ \hat{z}_4 \end{bmatrix} - u_{\mathrm{r}2} \right) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tilde{\theta}_1 \xi_2 + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tilde{\varphi}_2 \\
\dot{\tilde{\varphi}}_2 &= v_2 - \varphi_2 + \dot{\hat{\gamma}} \left(\hat{\theta}_1 \xi_2 + \begin{bmatrix} \lambda_{\mathrm{c}} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{z}_3 \\ \hat{z}_4 \end{bmatrix} - u_{\mathrm{r}2} \right) \\
&\quad + \hat{\gamma} \xi_2 \dot{\hat{\theta}}_1 + \hat{\gamma} \hat{\theta}_1 \dot{\xi}_2 + \hat{\gamma} \begin{bmatrix} \lambda_{\mathrm{c}} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\hat{z}}_3 \\ \dot{\hat{z}}_4 \end{bmatrix} - \hat{\gamma} \dot{u}_{\mathrm{r}2}
\end{aligned}$$

其中 $\tilde{z}_i = z_i - \hat{z}_i, 1 \leqslant i \leqslant 4$。$\tilde{z}_i$ 的动态由下式给出：

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{\tilde{z}}_1 \\ \dot{\tilde{z}}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1-\lambda_{\mathrm{o}} & 1 \\ -\lambda_{\mathrm{o}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{z}_1 \\ \tilde{z}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} (\tilde{\delta}_1 \varphi_1 + \tilde{\theta}_1 \xi_1) \\
\begin{bmatrix} \dot{\tilde{z}}_3 \\ \dot{\tilde{z}}_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1-\lambda_{\mathrm{o}} & 1 \\ -\lambda_{\mathrm{o}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{z}_3 \\ \tilde{z}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} (\tilde{\delta}_1 \varphi_2 + \tilde{\theta}_1 \xi_2)
\end{aligned}$$

综上所述，自适应控制给出如下：

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{\gamma}} &= \hat{\theta}_1 (\xi_1 e_1 + \xi_2 e_3) + \begin{bmatrix} \lambda_{\mathrm{c}} & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \hat{z}_1 \\ \hat{z}_2 \end{bmatrix} e_1 + \begin{bmatrix} \hat{z}_3 \\ \hat{z}_4 \end{bmatrix} e_3 \right) - u_{\mathrm{r}1} e_1 - u_{\mathrm{r}2} e_3 \\
\dot{\hat{\theta}}_1 &= (e_1 + \eta_1 \tilde{z}_1) \xi_1 + (e_3 + \eta_2 \tilde{z}_3) \xi_2 \\
\dot{\hat{\delta}}_1 &= \eta_1 \tilde{z}_1 \varphi_1 + \eta_2 \tilde{z}_3 \varphi_2 \\
v_1 &= -\tilde{\varphi}_1 + \varphi_1 - \dot{\hat{\gamma}} \left(\hat{\theta}_1 \xi_1 + \begin{bmatrix} \lambda_{\mathrm{c}} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{z}_1 \\ \hat{z}_2 \end{bmatrix} - u_{\mathrm{r}1} \right) \\
&\quad - \hat{\gamma} \xi_1 \dot{\hat{\theta}}_1 - \hat{\gamma} \hat{\theta}_1 \dot{\xi}_1 - \hat{\gamma} \begin{bmatrix} \lambda_{\mathrm{c}} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\hat{z}}_1 \\ \dot{\hat{z}}_2 \end{bmatrix} + \hat{\gamma} \dot{u}_{\mathrm{r}1} \\
v_2 &= -\tilde{\varphi}_2 + \varphi_2 - \dot{\hat{\gamma}} \left(\hat{\theta}_1 \xi_2 + \begin{bmatrix} \lambda_{\mathrm{c}} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{z}_3 \\ \hat{z}_4 \end{bmatrix} - u_{\mathrm{r}2} \right)
\end{aligned}$$

$$-\hat{\gamma}\xi_2\dot{\hat{\theta}}_1 - \hat{\gamma}\hat{\theta}\dot{\xi}_2 - \hat{\gamma}\left[\begin{array}{cc} \lambda_c & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} \dot{\hat{z}}_3 \\ \dot{\hat{z}}_4 \end{array}\right] + \hat{\gamma}\dot{u}_{r2}$$

□

7.6 结论

本章针对含有不确定定常参数的非线性系统设计了鲁棒和自适应控制器。主要结果包括：鲁棒镇定定理7.2.1和定理7.2.3及其线性情形下的推广结果定理7.2.4；自校正调节器定理7.3.1和定理7.3.2；自适应跟踪定理7.4.2和7.4.3及其线性情形下的推广结果定理7.4.4。鲁棒控制算法不需要观测器，且与不确定参数的个数无关，而鲁棒镇定控制器的阶数为$\rho-1$，ρ为系统的相对阶。鲁棒控制器是基于最劣情形设计的，并应用于非线性参数化的系统。自适应跟踪控制器假设是线性参数化的，且包含了第5章所设计的观测器，它们使用了输入滤波变换(引理7.4.1)、输出滤波变换(引理7.4.2)以及自适应跟踪形式(定义7.4.2)等重要概念。从所采用的方法而言，在$\rho=1$(定理7.4.2)的基本情形下，Meyer-Kalman-Yacubovich引理B.2.2用于设计观测器和控制器。在$\rho>1$ 的情形下，需要附加滤波器，使得系统相对阶为$\rho=1$；反复出现的迭代设计过程可以得出自适应跟踪控制器(定理7.4.3)。具体实例说明了控制器设计中使用的各种滤波器，对于例7.5.2中的刚体机器人、例7.5.3中的太阳帆板卫星以及例7.5.5中的点质量卫星，在这三种情形下均设计了不需要任何物理参数信息的自适应输出反馈跟踪控制。

7.7 习题

7.1 试设计如下系统的一个鲁棒镇定控制：

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + x_1\phi(x_1) \\ \dot{x}_2 &= u + x_1x_2\psi(x_1) \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

已知$|\phi(x_1)| < x_1^2$以及$|\psi(x_1)| < \mathrm{e}^{x_1}$。

7.2 试设计如下系统的一个自校正调节器：

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + \theta_1 x_1^{\theta_2} \\ \dot{x}_2 &= u \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

其中$1 \leqslant \theta_2 \leqslant 3$。

7.3 试设计如下系统的一个自适应跟踪控制：

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + \theta_1 \mathrm{e}^{x_1} + u \\ \dot{x}_2 &= \theta_2 x_1^3 + 2u \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

其中参考信号为$y_r(t) = \mathrm{e}^{-t}\sin t$。

7.4 试设计如下系统的一个自校正调节器和一个自适应跟踪控制：

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2+\theta x_1^2\\ \dot{x}_2 &= u\\ y &= x_1\end{aligned}$$

其中定常的参考信号为 y_r，并比较所得到的控制算法。

7.5 试设计如下系统的一个自校正调节器和一个自适应跟踪控制：

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2+\theta_1 x_1\\ \dot{x}_2 &= \theta_2 x_1^2+u\\ y &= x_1\end{aligned}$$

其中定常参考信号为 y_r。

7.6 试设计如下系统的一个自适应跟踪控制($\theta_2>0$)：

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2+\theta_1 x_1^2\\ \dot{x}_2 &= x_3\\ \dot{x}_3 &= \theta_2 u\\ y &= x_1\end{aligned}$$

7.7 对于单关节柔性关节机器人(其中所有参数均未知)，其模型见式(7.145)，试设计一个自适应跟踪控制和一个自校正调节器以跟踪 $y_r=\pi/2$。

7.8 试设计如下由传递函数描述的线性系统的一个自适应跟踪控制：

$$y(s) = \frac{\theta_1(s+\theta_2)}{s(s-\theta_3)}u(s)$$

其中 θ_1,θ_2 和 θ_3 为正的未知参数。

7.9 试设计如下系统的一个自适应跟踪控制：

$$\begin{aligned}m\ddot{x} &= -kx-\beta\dot{x}+u+d\\ y &= x\end{aligned}$$

假设正的参数 m,k,β 和 d 未知。

7.10 试设计如下由传递函数描述的线性系统的一个自适应跟踪控制：

$$y(s) = \frac{1}{Js^2(s^2+2\zeta\omega+\omega^2)}$$

其中 J,ζ 和 ω 为正的未知参数。

7.11 试设计如下系统的一个自适应跟踪控制：

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -kx^3-\beta\dot{x}+u\\ y &= x\end{aligned}$$

其中 k 和 β 为正的未知参数。

7.12 试设计如下系统的一个自适应跟踪控制($\theta_2 > 0$):

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + \theta_1 x_1^2 \\ \dot{x}_2 &= \theta_1 x_1^2 + \theta_2 u \\ y &= x_1\end{aligned}$$

7.13 考虑系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u + q(x)\theta, \qquad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}, \theta \in \mathbb{R} \\ y &= h(x), \qquad y \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

其中f和g以及q是光滑的向量场，h为光滑的实值函数，且$h(0) = 0$，$f(0) = 0$，$g(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$。假设存在一个正定的径向无界函数$V(x)$，使得

(i) $L_f V$ 是负定的，

(ii) $d(L_q V) \in \mathrm{span}\{dh\}$，

(iii) $d(L_g V) \in \mathrm{span}\{dh\}$，

试设计一个自适应跟踪控制以跟踪$y_{\mathrm{r}} = 0$。

7.14 确定存在一个全局微分同胚，将系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + \frac{1}{\theta_0} g(x)u + \theta_1 q(x) \\ y &= h(x)\end{aligned}$$

其中$x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}$，$f, g$和$q$是光滑向量场，$h$是一个光滑函数，变换为自适应跟踪型

$$\begin{aligned}\dot{z} &= A_{\mathrm{c}} z + b\left[\frac{1}{\theta_0}\sigma(y)u + \alpha_0(y) + \theta_1 \alpha_1(y)\right] \\ y &= c_{\mathrm{c}} z\end{aligned}$$

的充分必要条件。

提示：回顾定理6.1.1。

7.15 考虑具有自适应跟踪型的系统

$$\begin{aligned}\dot{z} &= Az + b\left[\frac{1}{\theta_0}\sigma(y)u + \alpha_0(y) + \theta_1 \alpha_1(y)\right] \\ y &= cz\end{aligned}$$

其中$z \in \mathbb{R}^n$，$y \in \mathbb{R}$，$u \in \mathbb{R}$以及三元组(A, b, c)是严格正实的。试证明对于任意的初始条件，自适应控制

$$\begin{aligned}u &= \hat{\theta}_0 \sigma^{-1}(y)\left[-\alpha_0(y) - \hat{\theta}_1 \alpha_1(y)\right] \\ \dot{\hat{\theta}}_0 &= y\left[\alpha_0(y) + \hat{\theta}_1 \alpha_1(y)\right] \\ \dot{\hat{\theta}}_1 &= y\alpha_1(y)\end{aligned}$$

可以保证$\lim_{t\to\infty} \| z(t) \| = 0$。

7.16 试设计如下系统的一个自适应跟踪控制($\theta_2 > 0$)

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 + \theta_1 x_1^3 \\
\dot{x}_2 &= x_3 + \mathrm{e}^{x_1} u \\
\dot{x}_3 &= \theta_2 \mathrm{e}^{x_1} u \\
y &= x_1
\end{aligned}$$

附录 A 微分几何基础

A.1 微分同胚

设 p 为 n 维欧氏空间 E^n 中的点，U 是 p 的一个邻域。设 $\varphi(q) = (x_1(q), \cdots, x_n(q)) : U \to V \subset \mathbb{R}^n$ 为一个**同胚(homeomorphism)**，即 φ 为一对一映上的(双射)，且 φ 和 φ^{-1} 是连续的，且 $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$，$\mathbb{R}$ 是实数域。称 (U, φ) 为一个**坐标邻域(coordinate neighborhood)** 或一个坐标卡，连续变化的实数 $x_1(q), \cdots, x_n(q)$ 是 $q \in E^n$ 的局部坐标，称$x_i(q)$ 为第 i 个坐标函数。如果 φ 和 φ^{-1} 均为光滑映射，则称 φ 是**微分同胚(diffeomorphism)**。如果 φ 和 φ^{-1} 均为定义在 $\mathbb{R}^n$ 中的光滑映射，则称 φ 是**全局微分同胚(global diffeomorphism)**。

给定两个坐标邻域 (U, φ) 和 (W, ψ)，且有 $U \cap W \neq 0$ 和 $\varphi(q) = (x_1(q), \cdots, x_n(q)), \psi(q) = (z_1(q), \cdots, z_n(q))$，同胚

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

是 $U \cap W$ 上的一个**坐标变换(coordinate transformation)**，即

$$z = \psi \circ \varphi^{-1}(x) = z(x)$$

其逆映射为

$$x = \varphi \circ \psi^{-1} z = x(z)$$

如果 x 和 z 由具有 n 个分量的向量表示，即

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}$$

则坐标变换由定义在 $\mathbb{R}^n$ 中的 n 个实值连续函数表示，即

$$x(z) = \begin{bmatrix} x_1(z_1, \cdots, z_n) \\ \vdots \\ x_n(z_1, \cdots, z_n) \end{bmatrix}, \quad z(x) = \begin{bmatrix} z_1(x_1, \cdots, x_n) \\ \vdots \\ z_n(x_1, \cdots, x_n) \end{bmatrix}$$

若同胚 $z(x)$ 和 $x(z)$ 均为光滑映射，则坐标变换是一个微分同胚。若同胚 $z(x)$ 和 $x(z)$ 均为定义在 $\mathbb{R}^n$ 中的光滑映射，则坐标变换是一个全局微分同胚。

现在，我们回顾微积分中的一个很著名的结论，该结论给出了一个映射成为一个微分同胚的充分条件。

定理 A.1.1 逆函数(Inverse Function) 设U是$\mathbb{R}^n$的一个开子集，$\varphi=(\varphi_1,\cdots,\varphi_n):U\to\mathbb{R}^n$是一个光滑映射。若**雅可比矩阵(Jacobian Matrix)**

$$\frac{d\varphi}{dx} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial\varphi_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

在某点$p\in U$是非奇异的，则存在p点的一个邻域$V\subset U$，使得$\varphi:V\to\varphi(V)$是一个微分同胚。 □

设$h:U\subset E^n\to\mathbb{R}$为定义在$U$上的一个实值函数。与所选择的坐标邻域$(U,\varphi)$相对应，在局部坐标下函数$h$可以表示为

$$h_\varphi = h\circ\varphi^{-1}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$$

其中表达式h_φ与所选择的局部坐标有关。

光滑函数$h:U\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$的**微分(differential)**在局部坐标下定义为

$$dh = \frac{\partial h}{\partial x_1}dx_1+\cdots+\frac{\partial h}{\partial x_n}dx_n$$

其也可以表示为一个行梯度向量

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial h}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial h}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

在$U\subset\mathbb{R}^n$中的局部坐标下，一个光滑**I型(one form)**ω定义为

$$\omega = \omega_1(x)dx_1+\cdots+\omega_n(x)dx_n$$

其中$\omega_i(x), 1\leqslant i\leqslant n$为光滑实值函数，$\omega$也可以表示为一个行向量

$$\omega = \begin{bmatrix} \omega_1(x) & \cdots & \omega_n(x) \end{bmatrix}$$

若存在一个光滑实值函数h，使得

$$\omega = dh$$

则称I型ω是**正则(exact)**的。

给定定义在$U\subset\mathbb{R}^n$中的r个光滑I型$\omega_1,\cdots,\omega_r$，若对于$x=p$(对于每一个$x\in U$)行向量$\omega_1(x),\cdots,\omega_r(x)$是线性无关的，也即对于$x=p$(对于每一个$x\in U$)有$\mathrm{rank}\{\omega_1(x),\cdots,\omega_r(x)\}=r$，则称其在$p\in U$(在$U$中)是线性无关的。

给定$U\subset\mathbb{R}^n$中的r个光滑实值函数$\varphi_1,\cdots,\varphi_r$，在$p\in U$上(在$U\subset\mathbb{R}^n$中)，$\mathrm{rank}\{d\varphi_1,\cdots,d\varphi_r\}=r$等价于对于$x=p$(对于每个$x\in U$)有下式成立：

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1(x)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi_1(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial\varphi_r(x)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi_r(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix} = r$$

逆函数定理也可以叙述如下。

定理 A.1.2 在某点$p\in U$，U是$\mathbb{R}^n$的一个开子集，若有$\mathrm{rank}\{d\varphi_1,\cdots,d\varphi_n\}=n$，则存在$p$的一个邻域$V\subset U$，使得$\varphi:V\to\varphi(V)$是一个微分同胚。 □

现在，我们给出本书中经常用到的一个结论。

定理 A.1.3 给定$U \subset \mathbb{R}^n$中的$n+1$个实值光滑函数$\psi, \varphi_1, \cdots, \varphi_n$，若在$U$中对于$p \in U$有$\mathrm{rank}\{d\varphi_i, 1 \leqslant i \leqslant n\} = n$，且对于某一$j \leqslant n$有$d\psi \in \mathrm{span}\{d\varphi_i, 1 \leqslant i \leqslant j\}$，则在局部坐标$z_i = \varphi_i(x), 1 \leqslant i \leqslant n$下有$\partial\psi(z)/\partial z_i = 0, j+1 \leqslant i \leqslant n$，即在$p$的一个邻域$V \subset U$内有$\psi = \psi(z_1, \cdots, z_j)$。 □

证明: 根据逆函数定理，在$V \subset U$中$\varphi = (\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$是一个局部微分同胚。在局部坐标$z_i = \varphi_i$下有$d\psi \in \mathrm{span}\{dz_1, \cdots, dz_j\}$，这意味着$\partial\psi(z)/\partial z_i = 0, j+1 \leqslant i \leqslant n$。 □

A.2 向量场

设$\mathbb{C}^\infty(p)$是定义在p的一个邻域U中的所有$\mathbb{C}^\infty$函数的集合，它们形成了域$\mathbb{R}$上的一个代数。p点的一个**切向量(tangent vector)** v具有三个性质：(i) 它将$\mathbb{C}^\infty(p)$映射到$\mathbb{R}^n$中；(ii) 它是一个线性算子，即

$$v(a_1h_1 + a_2h_2) = a_1v(h_1) + a_2v(h_2), \quad \forall h_i \in \mathbb{C}^\infty(p),\ a_i \in \mathbb{R}$$

(iii) 它满足Leibniz法则

$$v(h_1h_2) = v(h_1)h_2 + h_1v(h_2)$$

则由于

$$(a_1v_1 + a_2v_2)(h) = a_1v_1(h) + a_2v_2(h)$$

在p点的所有切向量v在域$\mathbb{R}$上构成了一个向量空间。若(U, φ)是一个坐标邻域，$x_1(p), \cdots, x_n(p)$是局部坐标，则其中的任意向量可以表示为

$$v = v_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + v_n\frac{\partial}{\partial x_n}$$

其中$v_i \in \mathbb{R}, 1 \leqslant i \leqslant n$是$v$对应于$\partial/\partial x_1, \cdots, \partial/\partial x_n$的分量，而$\partial/\partial x_1, \cdots, \partial/\partial x_n$是$\mathbb{R}$上由$p$点的所有切向量$v$组成的向量空间的一个基。

在开子集$U \subset \mathbb{R}^n$上的**向量场(vector field)** f是一个函数，该函数给每个点$p \in U$指定一个向量f_p。例如，$\mathbb{R}^3$空间中重力场在笛卡儿坐标下可表示为

$$-\frac{1}{r^3}\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2} + x_3\frac{\partial}{\partial x_3}\right)$$

其中$r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$。

若(U, φ)是一个坐标邻域，$x_1(p), \cdots, x_n(p), p \in U$是局部坐标，则一个$\mathbb{C}^\infty$(光滑的)向量场可以表示为

$$f = f_1(x)\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + f_n(x)\frac{\partial}{\partial x_n}$$

其中$f_i \in \mathbb{C}^\infty(p)$与所选择的局部坐标相关。一个向量场可以表示为一个列向量

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix}$$

若 $z(x)$ 表示一个坐标变换，其逆为 $x(z)$，则在新的坐标下向量场 f 可表示为

$$\tilde{f} = \tilde{f}_1(z)\frac{\partial}{\partial z_1} + \cdots + \tilde{f}_n(z)\frac{\partial}{\partial z_n}$$

其中

$$\tilde{f}_j(z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial z_j(x(z))}{\partial x_i} f_i(x(z)), \qquad 1 \leqslant j \leqslant n$$

等价地，以向量形式亦可表示为

$$\begin{bmatrix} \tilde{f}_1 \\ \vdots \\ \tilde{f}_n \end{bmatrix}(z) = \frac{dz}{dx}\begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \circ x(z)$$

其中

$$\frac{dz}{dx} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial z_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial z_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \dfrac{\partial z_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial z_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

表示坐标变换的雅可比矩阵。

一个**动态系统(dynamical system)**是一个 $\mathbb{C}^1$ 映射 $\phi_t(p): \mathbb{R} \times U \to U$，其中 U 是欧氏空间中的一个开集，该映射满足：

(i) $\phi_0(p) = p$，

(ii) 对于每一个 $t, s \in \mathbb{R}$，$\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$，

其中 $\phi_t(p)$ 是 $U \to U$ 的映射。该定义意味着映射 $\phi_t(p)$ 有一个 $\mathbb{C}^1$ 逆映射 $\phi_{-t}(p)$。一个动态系统定义了一个向量场

$$f(p) = \frac{d}{dt}\phi_t(p)\Big|_{t=0}$$

它是曲线 $t \to \phi_t(p)$ 在 $t = 0$ 处的切向量。给定一个坐标卡 (U, φ)，曲线 $t \to \phi_t(p)$ 可表示为 $t \to (x_1(t), \cdots, x_n(t))$，且

$$\begin{bmatrix} f_1(x(t)) \\ \vdots \\ f_n(x(t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{d}{dt}x_1(t) \\ \vdots \\ \dfrac{d}{dt}x_n(t) \end{bmatrix}$$

因此 $x_1(t), \cdots, x_n(t)$ 是初始条件为 $x(0)$ 的微分方程

$$\dot{x} = f(x)$$

的解。若 $z(x)$ 表示一个坐标变换，其逆为 $x(z)$，在新的坐标下微分方程表示为

$$\dot{z} = \left(\frac{dz}{dx}f\right) \circ x(z) \triangleq \tilde{f}(z)$$

反之，假设 f 满足局部 Lipschitz 条件(见定理 B.1.2)，一个向量场也可定义惟一的动态系统。

上面的逆过程为：给定一个微分方程

$$\dot{x} = f(x) \tag{A.1}$$

即初始条件为 x_0 的向量场 f，确定一个**积分曲线(integral curve)** $t \to (x_1(t), \cdots, x_n(t))$，它是方程 (A.1) 的一个解，使得 $x(0) = x_0$。

一个微分方程的解可能并非对于所有的 t 都有定义。例如，在 $\mathbb{R}$ 中的方程

$$\frac{dx}{dt} = 1 + x^2$$

有如下函数给出的解：

$$x(t) = \tan(t - c), \qquad c\text{为常数}$$

由于当 $t \to c \pm \pi/2$ 时 $x(t) \to \pm\infty$，因此它不能推广到比区间

$$c - \frac{\pi}{2} < t < c + \frac{\pi}{2}$$

更大的区间。若微分方程 $\dot{x} = f(x)$ 的解对于所有的 $t \in \mathbb{R}$ 有定义，则称一个向量场是**完备的(complete)**。根据定理 B.1.2，满足条件 (i) 和条件 (ii) 的向量场是完备的。

A.3 Lie导数

若 f 是 U 上的一个光滑向量场，h 是 U 上的一个光滑函数，则 $f(h)$ 是 U 上的光滑函数，定义为

$$f(h)(p) = \sum_{i=1}^{n} f_i(p) \left(\frac{\partial h}{\partial x_i}\right)(p)$$

向量场可以解释为将函数 h 映射为函数 $f(h)$ 的一个算子。称函数 $f(h)$ 为函数 h 沿着向量场 f 的**Lie导数(Lie derivative)**，通常表示为 $L_f h$，在多重运算的情形下这是一种更方便的表示方法：

$$L_{f_1} L_{f_2} L_{f_3} \cdots L_{f_i} h = f_1(f_2(f_3(\cdots f_i(h) \cdots)))$$

沿着同一向量场 f 的多重 Lie 导数表示为

$$L_f^i h = L_f(L_f^{i-1} h), \qquad L_f^1 h = L_f h, \qquad L_f^0 h = h$$

给定一个微分 I 型 ω 和一个向量场 f，$\langle \omega, f \rangle$ 表示实值函数

$$\langle \omega, f \rangle (x) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(x) f_i(x)$$

一个光滑函数 h 沿着一个向量场 f 的 Lie 导数 $L_f h$ 也可以表示为 $\langle dh, f \rangle$。在 U 上的所有 $\mathbb{C}^\infty$ 向量场的集合是 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{C}^\infty(p)$ 上的一个向量空间，即

$$L_{\alpha f_1 + \beta f_2} h = \alpha L_{f_1} h + \beta L_{f_2} h, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}^\infty(p)$$

如果定义 **Lie 括号(Lie bracket)**为

$$[f, g](h) = f(g(h)) - g(f(h)) = L_f L_g h - L_g L_f h$$

则它们在 $\mathbb{C}^\infty(p)$ 上形成一个非交换的 Lie 代数。Lie 括号 $[f, g]$ 是一个向量场，这是由于：

(i) 它满足 Leibniz 法则

$$\begin{aligned}
[f,g](h_1h_2) &= L_fL_g(h_1h_2) - L_gL_f(h_1h_2) \\
&= L_f((L_gh_1)h_2 + h_1(L_gh_2)) - L_g((L_fh_1)h_2 + h_1(L_fh_2)) \\
&= (L_fL_gh_1 - L_gL_fh_1)h_2 + h_1(L_fL_gh_2 - L_gL_fh_2) + (L_gh_1)(L_fh_2) \\
&\quad +(L_fh_1)(L_gh_2) - (L_fh_1)(L_gh_2) - (L_gh_1)(L_fh_2) \\
&= [f,g](h_1)h_2 + h_1[f,g](h_2)
\end{aligned}$$

(ii) 它是线性算子 $(a_1, a_2 \in \mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
[f,g](a_1h_1 + a_2h_2) &= L_fL_g(a_1h_1 + a_2h_2) - L_gL_f(a_1h_1 + a_2h_2) \\
&= a_1[f,g](h_1) + a_2[f,g](h_2)
\end{aligned}$$

例如，关于 h 的计算 L_fL_gh 不能定义一个向量场，这是由于它不满足 Leibniz 法则:

$$\begin{aligned}
L_fL_g(h_1h_2) &= L_f((L_gh_1)h_2 + h_1(L_gh_2)) \\
&= (L_fL_gh_1)h_2 + h_1(L_fL_gh_2) + (L_gh_1)(L_fh_2) + (L_fh_1)(L_gh_2)
\end{aligned}$$

两个向量场 f 和 g 的 Lie 括号 $[f,g]$ 也可表示为 ad_fg 或 L_fg。多重 Lie 括号可以表示为

$$ad_f^ig = ad_f(ad_f^{i-1}g), \qquad ad_f^1g = ad_fg, \qquad ad_f^0g = g$$

由于 $[f,g] = -[g,f]$，因此代数是非交换的。

对于给定的三个向量场 f, g 和 q，如下**雅可比等式(Jacobi identity)**成立:

$$ad_fad_gq + ad_gad_qf + ad_qad_fg = 0$$

事实上，

$$\begin{aligned}
&ad_fad_gq(h) + ad_gad_qf(h) + ad_qad_fg(h) \\
&= L_fL_gL_qh - L_fL_qL_gh - L_gL_qL_fh + L_qL_gL_fh \\
&+L_gL_qL_fh - L_gL_fL_qh - L_qL_fL_gh + L_fL_qL_gh \\
&+L_qL_fL_gh - L_qL_gL_fh - L_fL_gL_qh + L_gL_fL_qh = 0
\end{aligned}$$

Lie 括号在 $\mathbb{R}$ 上是双线性的，即

$$\begin{aligned}
[af + bg, q] &= a\,[f,g] + b\,[g,q] \\
[f, ag + bq] &= a\,[f,g] + b\,[f,q]
\end{aligned}$$

对于给定的两个光滑函数 α, β 以及两个光滑向量场 f, g，有下面的公式成立:

$$[\alpha f, \beta g] = \alpha\beta[f,g] + \alpha(L_f\beta)g - \beta(L_g\alpha)f \tag{A.2}$$

事实上，

$$\begin{aligned}
[\alpha f, \beta g](h) &= L_{\alpha f}L_{\beta g}h - L_{\beta g}L_{\alpha f}h \\
&= \alpha L_f(\beta L_gh) - \beta L_g(\alpha L_fh) \\
&= \alpha(L_f\beta)(L_gh) + \alpha\beta L_fL_gh - \beta(L_g\alpha)(L_fh) - \beta\alpha L_gL_fh \\
&= \alpha(L_f\beta)g(h) - \beta(L_g\alpha)f(h) + \alpha\beta\,[f,g]\,(h)
\end{aligned}$$

根据式(A.2)，在局部坐标系$(x_1,\cdots,x_n)$下计算Lie括号。给定

$$f = \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad g = \sum_{j=1}^{n} g_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

其Lie括号为

$$\begin{aligned}[f,g] &= \left[\sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \sum_{j=1}^{n} g_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right] \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(f_i\left(\frac{\partial}{\partial x_i}g_j\right)\frac{\partial}{\partial x_j} - g_j\left(\frac{\partial}{\partial x_j}f_i\right)\frac{\partial}{\partial x_i} + f_i g_j\left[\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j}\right]\right)\end{aligned}$$

由定义

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j}\right](h) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}h\right) - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}h\right) = 0$$

可得

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j}\right] = 0$$

综上所述，给定一个坐标邻域，则计算Lie括号的公式为

$$[f,g] = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} f_j\left(\frac{\partial}{\partial x_j}g_i\right) - g_j\left(\frac{\partial}{\partial x_j}f_i\right)\right)\frac{\partial}{\partial x_i} \tag{A.3}$$

记向量场$f(x)=[f_1(x),\cdots,f_n(x)]^{\mathrm{T}}$的雅可比矩阵为$df/dx$或$J(f)$，则该$n\times n$矩阵定义为

$$\frac{df}{dx} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

式(A.3)以向量的形式可重写为

$$[f,g] = \frac{dg}{dx}f - \frac{df}{dx}g$$

给定两个光滑向量场f,g，一个光滑函数h，Lie括号$[f,g]$的定义给出了**Leibniz公式(Leibniz's formula)**

$$L_{[f,g]}h = L_f L_g h - L_g L_f h$$

或者也可表示为

$$L_f\langle dh, g\rangle = \langle dh, ad_f g\rangle + \langle d(L_f h), g\rangle$$

Leibniz公式可用于证明如下定理，该定理在本书中多次用到。

定理 A.3.1 给定$\mathbb{R}^n$的开子集U中的光滑向量场f和g以及光滑实值函数h。若对于某个整数$\rho, 1<\rho\leqslant n$，有

$$\begin{aligned}\langle d(L_f^i h), g\rangle &= 0 \qquad 0\leqslant i\leqslant \rho-2, \forall x\in U \\ \langle d(L_f^{\rho-1} h), g\rangle &= \gamma(x)\neq 0, \qquad \forall x\in U\end{aligned}$$

那么，当i和j满足$0 \leqslant i+j \leqslant \rho-2$时，有

$$\langle d(L_f^i h), ad_f^j g\rangle = 0, \qquad \forall x \in U$$

而当i和j满足$i+j=\rho-1$时，则有

$$\langle d(L_f^i h), ad_{(-f)}^j g\rangle = \gamma(x) \neq 0, \qquad \forall x \in U$$

□

证明: 首先证明$\rho=2$的情形，然后再利用归纳法。根据Leibniz公式

$$L_f\langle dh, g\rangle = \langle d(L_f h), g\rangle - \langle dh, ad_{(-f)}g\rangle$$

由于$\langle dh, g\rangle = 0$，因此有

$$\langle d(L_f h), g\rangle = \langle dh, ad_{(-f)}g\rangle = \gamma(x)$$

假设对于$\rho=\ell$定理成立，下面证明对于$\rho=\ell+1$定理亦成立。应用Leibniz公式

$$L_f\langle d(L_f^{k-s}h), ad_f^s g\rangle = \langle d(L_f^{k-s+1}h), ad_f^s g\rangle + \langle d(L_f^{k-s}h), ad_f^{s+1}g\rangle$$

对于$k=\ell-2$和$s=0,\cdots,s=\ell-2$，可得

$$\langle d(L_f^i h), ad_f^j g\rangle = 0, \qquad i+j=\ell-1$$

再对$k=\ell-1$和$s=0,\cdots,s=\ell-1$应用Leibniz公式，可得

$$\langle d(L_f^i h), ad_{(-f)}^j g\rangle = \gamma(x), \qquad i+j=\ell$$

□

A.4 流形与分布

首先回顾如下结果。

定理 A.4.1 隐函数(Implicit Function) 设U是$\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r$的一个开子集，$\varphi: U\to\mathbb{R}^r$是一个光滑映射，对于某点$(p,q)\in U$有$\varphi(p,q)=0$成立。设$(x,y), x\in\mathbb{R}^n, y\in\mathbb{R}^r$是$U$中的局部坐标。若$r\times r$的雅可比矩阵

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y_r} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \dfrac{\partial\varphi_r}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi_r}{\partial y_r} \end{bmatrix}(x,y)$$

在$x=p, y=q$处是非奇异的，则存在(p,q)的一个邻域$V\subset U$，p的一个邻域$W\subset\mathbb{R}^n$以及惟一的光滑映射$\psi: W\to\mathbb{R}^r$满足$\psi(p)=q, \varphi(x,\psi(x))=0, \forall x\in W$，且

$$\{(x,y)\in V : \varphi(x,y)=0\} = \{(x,\psi(x)) : x\in W\}$$

□

若对于任意$\bar{x}\in M$存在一个开集U，其中$\bar{x}\in U$，且光滑函数$h_{r+1}(x),\cdots,h_n(x)$使得$\{dh_{r+1}(x),\cdots,dh_n(x)\}$对于所有的$x\in U$是线性无关的行向量集合，且$U\cap M=\{x\in$

U：$h_i(x) = 0, r+1 \leqslant i \leqslant n\}$，则称一个子集$M \subset \mathbb{R}^n$是$\mathbb{R}^n$的$r$维**子流形(submanifold)**($r < n$)。注意，在上面的定义中光滑函数$h_{r+1}, \cdots, h_n$并不是惟一的。

设M是$\mathbb{R}^n$的一个r维子流形。在$x \in M$上M的**切空间(tangent space)**是$\mathbb{R}^n$上的一个r维子空间

$$TM_x = \{v \in \mathbb{R}^n : \langle dh_i(x), v\rangle = 0,\ r+1 \leqslant i \leqslant n\}$$

若$f(x) \in TM_x$，则称向量场f与$\mathbb{R}^n$的子流形M在$x \in M$点相切。

$\mathbb{R}^n$中的一个开连通子集W上的r维**分布(distribution)** $\mathcal{D}$是一个映射，它为每个$p \in W$指定$\mathbb{R}^n$上的一个r维子空间，使得对于每个$p_0 \in W$，存在p_0的一个邻域U和r个光滑向量场$f_1, \cdots, f_r$满足如下性质：

(i) $f_1(p), \cdots, f_r(p)$对于每个$p \in U$是线性无关的，

(ii) $\mathcal{D}(p) = \mathrm{span}\{f_1(p), \cdots, f_r(p)\}, \forall p \in U$。

给定$U \subset \mathbb{R}^n$中的一个分布$\mathcal{D}$和一个向量场f，若

$$f(p) \in \mathcal{D}(p), \qquad \forall p \in U$$

则称f属于$\mathcal{D}$。

由上面的定义可得，给定任意的向量场$f \in \mathcal{D}$，在U中存在r个光滑函数$\alpha_1(p), \cdots, \alpha_r(p)$，使得

$$f(p) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i(p) f_i(p), \qquad \forall p \in U$$

给定一个分布$\mathcal{D}$和一个微分I型dh，若有

$$\langle dh, f\rangle = 0, \qquad \forall f \in \mathcal{D}$$

则称$dh \in D^{\perp}$。

若对于每个$x \in M$有

$$TM_x = \mathcal{D}(x)$$

则称$\mathbb{R}^n$的一个子流形M是$\mathbb{R}^n$上分布$\mathcal{D}$的一个**积分流形(integral manifold)**。若一个$\mathcal{D}$的积分流形通过$\mathbb{R}^n$的任意点p，则称$\mathbb{R}^n$上的分布$\mathcal{D}$是**可积的(integrable)**。

若给定属于$\mathcal{D}$的任意两个向量场f和g，它们的Lie括号$[f, g]$也属于$\mathcal{D}$，则称分布$\mathcal{D}$是**对合(involutive)**的。

给定定义在$U \subset \mathbb{R}^n$中的两个分布$\mathcal{D}_1$和$\mathcal{D}_2$，若属于$\mathcal{D}_1$的每个向量场f也属于$\mathcal{D}_2$，则称$\mathcal{D}_1$包含于$\mathcal{D}_2$中，即$\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}_2$。

给定一个分布$\mathcal{D}$，其**对合闭包(involutive closure)**记为$\bar{D}$或inv.cl. $\mathcal{D}$，定义为包含$\mathcal{D}$的最小对合分布。

定理 A.4.2 ((**Frobenius**)) *设$\mathcal{D}$为W上的一个r维分布，W是$\mathbb{R}^n$上的一个开连通子集。在任意点$p \in W$附近存在一个坐标邻域$(U, x_1, \cdots, x_n)$，使得对于任何$q \in U$有*

$$\mathcal{D}(q) = \mathrm{span}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_r}\right\}$$

其中U是p的一个邻域，当且仅当$\mathcal{D}$是对合分布。 □

Frobenius 定理可以重新叙述如下。

定理 A.4.3 (**Frobenius**) 设$\mathcal{D}$是W上的一个r维分布，W是$\mathbb{R}^n$的一个开连通子集。在任意点$p \in W$附近存在一个坐标邻域$(U, x_1, \cdots, x_n)$，其中$x_i = \varphi_i(q), 1 \leqslant i \leqslant n$，使得$d\varphi_i \in \mathcal{D}^{\perp}$，即对于任意的$f \in \mathcal{D}$有

$$\langle d\varphi_i, f\rangle \quad = \quad 0, \qquad \forall x \in U, \quad r+1 \leqslant i \leqslant n$$

当且仅当$\mathcal{D}$是对合分布。 □

根据 Frobenius 定理，r维对合分布$\mathcal{D}$在坐标邻域(U, φ)中可表示为

$$\mathcal{D} \quad = \quad \text{span}\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_r}\}$$

它通过$p \in U$的积分流形为

$$M_p \quad = \quad \{x \in U : \ \varphi_i(x) = \varphi_i(p), \ r+1 \leqslant i \leqslant n\}$$

在每个$x \in U$处，向量场$\partial/\partial x_i, r+1 \leqslant i \leqslant n$与属于分布$\mathcal{D}$的每个向量场正交。

例 A.4.1 大多数的分布不是对合的：例如$\mathbb{R}^3$中的分布

$$\mathcal{D} \quad = \quad \text{span}\{f, g\}$$

其中

$$\begin{aligned} f &= \varphi(x_3)\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_3}, \qquad \frac{d\varphi}{dx^3} \neq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3 \\ g &= \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \end{aligned}$$

由于

$$ad_f g \quad = \quad -\frac{\partial\varphi(x_3)}{\partial x_3}\frac{\partial}{\partial x_1}$$

不属于$\mathcal{D}$，因此该分布不是对合的。这表明f和g不能正切于$\mathbb{R}^3$中的任一表面$\psi(x_1, x_2, x_3) = 0$，即不存在一个光滑函数$\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$是如下偏微分方程的解：

$$\begin{aligned} \langle d\psi, f\rangle &= 0 \\ \langle d\psi, g\rangle &= 0 \end{aligned}$$

在局部坐标下，该方程为

$$\begin{aligned} \varphi(x_3)\frac{\partial\psi}{\partial x_1} + \frac{\partial\psi}{\partial x_3} &= 0 \\ \frac{\partial\psi}{\partial x_2} + \frac{\partial\psi}{\partial x_3} &= 0 \end{aligned}$$

□

Frobenius 定理的一个结论是，给定$\mathbb{R}^n$中的r个向量场$f_1, \cdots, f_r$，偏微分方程

$$\langle d\varphi, f_i\rangle \quad = \quad 0, \qquad 1 \leqslant i \leqslant r$$

存在一个非平凡解φ，当且仅当分布$\text{span}\{f_1, \cdots, f_r\}$的对合闭包的维数小于或等于$n-1$。

定理 A.4.4 **平整化(Rectification)** 设 f 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个光滑向量场及一点 $p\in\mathbb{R}^n$，使得 $f(p)\neq 0$，则存在一个坐标邻域 $(U,x_1,\cdots,x_n)$，使得在 U 上有

$$f = \frac{\partial}{\partial x_1}$$

其中 U 是 p 的一个邻域。 □

定理 A.4.5 **同时平整化(Simultaneous Rectification)** 设 $f_1,\cdots,f_r, r\leqslant n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的光滑向量场，且点 $p\in\mathbb{R}^n$，使得 $f_1(p),\cdots,f_r(p)$ 是线性无关的，则存在坐标邻域 $(U,x_1,\cdots,x_n)$，其中 U 是 p 的一个邻域，使得在 U 上满足

$$f_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad 1\leqslant i\leqslant r$$

当且仅当

$$[f_i,f_j] = 0, \qquad 1\leqslant i,j\leqslant r$$

同时，若对于每个 $p\in\mathbb{R}^n$，$f_1,\cdots,f_r$ 是线性无关的，则存在一个全局微分同胚 $\varphi(q) = (x_1(q),\cdots,x_n(q))$，使得对于每个 $p\in\mathbb{R}^n$ 有 $f_i(p)=\partial/\partial x_i, 1\leqslant i\leqslant r$，当且仅当向量场 $f_i, 1\leqslant i\leqslant r$ 是完备的。 □

例 A.4.2 对于每个 $x\in\mathbb{R}^3$，$\mathbb{R}^3$ 中的3个向量场

$$\begin{aligned} f_1 &= x_1\frac{\partial}{\partial x_2}+\frac{\partial}{\partial x_3} \\ f_2 &= \frac{\partial}{\partial x_2} \\ f_3 &= \frac{\partial}{\partial x_1}+x_3\frac{\partial}{\partial x_2} \end{aligned}$$

是线性无关的、完备的且可交换的，

$$\begin{aligned} [f_2,f_1] &= \frac{\partial}{\partial x_2}(x_1)\frac{\partial}{\partial x_2}=0 \\ [f_1,f_3] &= \frac{\partial}{\partial x_3}(x_3)\frac{\partial}{\partial x_2}-\frac{\partial}{\partial x_1}(x_1)\frac{\partial}{\partial x_2}=0 \\ [f_2,f_3] &= \frac{\partial}{\partial x_2}(x_3)\frac{\partial}{\partial x_2}=0 \end{aligned}$$

满足

$$\langle dt_i,f_j\rangle = \delta_{ij}, \qquad 1\leqslant i,j\leqslant 3$$

即

$$\begin{aligned} dt_1 &= dx_3 \\ dt_2 &= -x_3dx_1+dx_2-x_1dx_3 \\ dt_3 &= dx_1 \end{aligned}$$

的全局平整化微分同胚

$$z_i = t_i(x), \quad t_i(0)=0, \qquad 1\leqslant i\leqslant 3$$

可通过积分上面的正则I型得到，如下所示：

$$z_1 = t_1(x)=x_3$$

$$\begin{aligned} z_2 &= t_2(x) = x_2 - x_1x_3 \\ z_3 &= t_3(x) = x_1 \end{aligned}$$

在新的全局坐标下有 $f_i = \partial/\partial z_i,\ 1 \leqslant i \leqslant 3$。 □

附录 B 稳定性理论基础

B.1 稳定性定理

考虑常微分方程(ordinary differential equation)

$$\dot{x} = f(x,t), \qquad x(t_0) = x_0, \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{B.1}$$

其中$f \in \mathbb{C}^0 : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n)$。若$f$与$t$无关，即

$$\dot{x} = f(x), \qquad x(0) = x_0 \tag{B.2}$$

则该系统称为**自治**(autonomous)系统，否则称为**非自治**(non-autonomous)系统。如果$f(x,t) = A(t)x$，其中$A(t)$为$n \times n$维时变矩阵，则称为**线性**(linear)系统，否则称为**非线性**(nonlinear)系统。式(B.1)在区间$[0,T]$上的一个解记为$\varphi(t_0+t, t_0, x_0) : \mathbb{C}^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$，且满足

(i) $\varphi(t_0, t_0, x_0) = x_0$；

(ii) $\dfrac{d\varphi(t_0+t, t_0, x_0)}{dt} = f(\varphi(t_0+t, t_0, x_0), t), \forall t \in [0,T]$。

式(B.2)在区间$[0,T]$上的一个解记为$\varphi(t, x_0)$，其中$x_0 = x(0)$。

定理 B.1.1 (局部存在性和惟一性(Local Existence and Uniqueness)) 假设存在有限常数τ, α_τ和β_τ，使得

(i) $\|f(x_1,t) - f(x_2,t)\| \leqslant \alpha_\tau \|x_1 - x_2\|, \forall x_1, x_2 \in B_r, \forall t \in [t_0, \tau]$,

(ii) $\|f(x_0,t)\| \leqslant \beta_\tau, \forall t \in [t_0, \tau]$,

其中$B_r = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leqslant r\}$，则对于充分小的$T$且满足$t_0 < T \leqslant \tau$，式(B.1)在区间$[t_0, T]$上有惟一解。 □

定理 B.1.2 [全局存在性和惟一性(Global Existence and Uniqueness)] 假设对于每个$\tau \in [t_0, \infty)$，存在有限常数α_τ和β_τ，使得

(i) $\|f(x_1,t) - f(x_2,t)\| \leqslant \alpha_\tau \|x_1 - x_2\|, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n, \forall t \in [t_0, \tau]$,

(ii) $\|f(x_0,t)\| \leqslant \beta_\tau, \forall t \in [t_0, \tau]$,

则式(B.1)在区间 $[t_0,\infty)$ 上有惟一解。 □

定理B.1.1和定理B.1.2的条件(i)称为**Lipschitz条件(Lipschitz conditions)**，α_τ 称为**Lipschitz常数(Lipschitz constant)**。

若 $f(x_e,t)=0, \forall t\geqslant 0$，则点 x_e 称为式(B.1)的一个**平衡点(equilibrium point)**。若对于任意的 $\varepsilon>0$ 和任意的 $t_0\in\mathbb{R}^+$，存在 $\delta(t_0,\varepsilon)>0$，使得对于 $\forall x_0$ 满足 $\|x_0-x_e\|<\delta(t_0,\varepsilon)$，$\|\varphi(t+t_0,t_0,x_0)-x_e\|<\varepsilon, \forall t\geqslant 0$ 成立，则称平衡点是**稳定的(stable)**。若 δ 可取为与 t_0 无关的，则称平衡点 x_e 为**一致稳定的(uniformly stable)**。称不满足上述条件的平衡点 x_e 为**不稳定的(unstable)**。

例 B.1.1 自治系统(van der Pol 振荡器)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= x_1+x_2-x_2x_1^2\end{aligned}$$

的原点是一个平衡点，该平衡点是不稳定的；但是应该注意所有的解均是有界的。 □

若存在 $\gamma(t_0)>0$，使得对于所有满足 $\|x_0-x_e\|<\gamma(t_0)$ 的 x_0 均有

$$\lim_{t\to\infty}\|\varphi(t+t_0,t_0,x_0)-x_e\| = 0 \tag{B.3}$$

则称平衡点 x_e 是**吸引的(attractive)**。若 γ 可取为与 t_0 无关，且式(B.3)在 t_0 和 x_0 上一致成立，则称平衡点是**一致吸引的(uniformly attractive)**。令 x_e 为一个吸引的平衡点：其**吸引域(domain of attraction)** $D(x_e)$ 定义为

$$D(x_e) = \{x\in\mathbb{R}^n : \lim_{t\to\infty}\|\varphi(t,0,x)-x_e\|=0\}$$

例 B.1.2 考虑由 Vinogradov 给出的例子

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \frac{x_1^2(x_2-x_1)+x_2^5}{(x_1^2+x_2^2)(1+(x_1^2+x_2^2)^2)}\\ \dot{x}_2 &= \frac{x_2(x_2-2x_1)}{(x_1^2+x_2^2)(1+(x_1^2+x_2^2)^2)}\end{aligned}$$

该例说明一个平衡点，在此情形下，即原点 $(x_1,x_2)=0$，可能是吸引且不稳定的。该原点不是一致吸引的。 □

若一个平衡点既是(一致)稳定的又是(一致)吸引的，则称其为**(一致)渐近稳定的((uniformly)asymptotically stable)**。若存在正的常数 c,α 和 r，使得对于所有满足 $\|x_0-x_e\|<r$ 的 x_0，有

$$\|\varphi(t+t_0,t_0,x_0)-x_e\|\leqslant c\|x_0\|\mathrm{e}^{-\alpha t}, \quad \forall t\geqslant t_0 \tag{B.4}$$

则称该平衡点是**指数稳定的(exponentially stable)**；若对于所有的 $x_0\in\mathbb{R}^n$ 式(B.4)均成立，则称其为**全局指数稳定的(globally exponentially stable)**。常值 α 称为**收敛率(rate of convergence)**。指数稳定隐含着一致渐近稳定。在线性系统中，两者是等价的。

定理 B.1.3 *对于线性时变系统*

$$\dot{x} = A(t)x, \qquad x\in\mathbb{R}^n$$

若原点是一个一致渐近稳定平衡点，则原点是全局指数稳定的。 □

对于线性系统，下面的结论也成立。

定理 B.1.4 考虑线性时变系统

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u(t), \qquad x(t_0) = x_0 \tag{B.5}$$

并假设存在正实数M, k_1, k_2, λ_1和λ_2，使得:

(i) $\|B(t)\| \leqslant M, \forall t \geqslant t_0$;

(ii) $\|u(t)\| \leqslant k_1 \mathrm{e}^{-\lambda_1(t-t_0)}, \forall t \geqslant t_0$;

(iii) 自治系统$\dot{x} = A(t)x$是指数稳定的，且所有解$\varphi(t+t_0, t_0, x_0)$满足

$$\|\varphi(t+t_0, t_0, x_0)\| \leqslant k_2 \mathrm{e}^{-\lambda_2 t}\|x_0\|, \qquad \forall t \geqslant 0;$$

则式(B.5)的所有解均满足

$$\|\varphi(t+t_0, t_0, x_0)\| \leqslant k_3(x_0)\mathrm{e}^{-\lambda t}, \qquad \forall t \geqslant 0$$

其中$\lambda = \min\{\lambda_1, \lambda_2\}$且$k_3$是与$x_0$有关的正实数。 □

平衡点称为是**全局一致渐近稳定的(globally uniformly asymptotically stable)**，当

(i) 平衡点是一致渐近稳定的;

(ii) 对于所有任意小的正数ε和所有任意大的正数M，存在一个有限的正数$T(\varepsilon, M)$，使得对于任意$t > T(\varepsilon, M)$和任意满足$\|x_0 - x_\mathrm{e}\| < M$的$x_0$，均有$\|\varphi(t+t_0, t_0, x_0) - x_\mathrm{e}\| < \varepsilon$成立。

例 B.1.3 系统

$$\dot{x} = -x^3$$

的平衡点(即原点)不是指数稳定的，但它是全局一致渐近稳定的。 □

例 B.1.4 系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_2 - x_1(1 - x_1^2 - x_2^2)\\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2(1 - x_1^2 - x_2^2)\end{aligned}$$

的平衡点(即原点)是一致渐近稳定的，但不是全局一致渐近稳定的；另外，该平衡点是指数稳定的。 □

若一个函数$\phi: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$是连续严格递增的，且$\phi(0) = 0$，则该函数称为**K类(class K)**函数。一个函数$V: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$称为**正定函数(positive definite function)**，若它是连续的，$V(t, 0) = 0, \forall t \geqslant t_0$，且存在一个常数$r > 0$和一个$K$类函数$\phi$，满足

$$\phi(\|x\|) \leqslant V(t, x), \quad \forall t \geqslant t_0, \quad \forall x \in B_r \tag{B.6}$$

其中B_r为$\mathbb{R}^n$中的以原点为圆心，以r为半径的一个开球。若函数$-V$是正定的，则函数V是**负定的(negative definite)**。若对于某个K类连续函数$\psi: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$，满足$\lim_{r\to\infty}\psi(r) = \infty$，有

$$\psi(\|x\|) \leqslant V(t, x), \qquad \forall t \geqslant t_0, \forall x \in \mathbb{R}^n$$

则称 V 是**径向无界函数(radially unbounded function)**。

若存在一个常数 $r>0$ 和一个 K 类函数 ψ，满足

$$V(t,x) \leqslant \psi(\|x\|), \qquad \forall t \geqslant t_0, \forall x \in B_r$$

则称函数 V 是**递减的(decrescent)**。

若对于所有的 $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$ 均有 $x^{\mathrm{T}}Px > 0\,(x^{\mathrm{T}}Px \geqslant 0)$，则称 $n \times n$ 维实矩阵 P 为**正定矩阵(positive definite matrix)** (半正定的)。若 $-P$ 是正定的(半正定的)，则称矩阵 P 是**负定的(negative definite)**(半负定的)。

在下面基本结果的叙述中，不失一般性，假设平衡点 x_{e} 是原点。

定理 B.1.5 **(Lyapunov)** 设 $x_{\mathrm{e}}=0$ 是式(B.1)的平衡点。$V(t,x)$ 为 $\mathbb{C}^1$ 正定函数，其对时间的导数定义为

$$\dot{V}(t,x) = \frac{\partial V(t,x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V(t,x)}{\partial x_i} f_i(x,t)$$

(a) 若对于某个 $r>0$ 有 $\dot{V}(t,x) \leqslant 0, \forall t \geqslant t_0, \forall x \in B_r$，则 $x_{\mathrm{e}}=0$ 是稳定的。

(b) 若 $V(t,x)$ 是正定递减的，且对于某个 $r>0$ 有 $\dot{V}(t,x) \leqslant 0, \forall t \geqslant t_0, \forall x \in B_r$，则 $x_{\mathrm{e}}=0$ 是一致稳定的。

(c) 若函数 $V(t,x)$ 是正定递减的，且 $\dot{V}(t,x)$ 是负定的，则 $x_{\mathrm{e}}=0$ 是一致渐近稳定的。

(d) 若在 $\mathbb{R}^n$ 中 $V(t,x)$ 是正定递减径向无界的，且在 $\mathbb{R}^n$ 中 $\dot{V}(t,x)$ 是负定的，则 $x_{\mathrm{e}}=0$ 是全局一致渐近稳定的。

□

满足上述条件(a)的函数 $V(t,x)$ 称为系统(B.1)的一个 **Lyapunov 函数(Lyapunov function)**。

定理 B.1.6 设 $x_{\mathrm{e}}=0$ 是系统(B.1)的平衡点，假设存在正数 $a,b,c,p \geqslant 1$ 和 $\mathbb{C}^1$ 函数 $V:\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$，使得对于所有的 $x \in B_r$，r 为某个正数，满足

(i) $a\|x\|^p \leqslant V(t,x) \leqslant b\|x\|^p, \forall t \geqslant t_0$,

(ii) $\dot{V}(t,x) = \dfrac{\partial V(t,x)}{\partial t} + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial V(t,x)}{\partial x_i} f_i(x,t) \leqslant -c\|x\|^p, \forall t \geqslant t_0$

则 $x_{\mathrm{e}}=0$ 是指数稳定的。并且，若对于所有的 $x \in \mathbb{R}^n$，条件(i)和条件(ii)均成立，则 $x_{\mathrm{e}}=0$ 是全局指数稳定的。 □

定理 B.1.7 考虑线性自治系统

$$\dot{x} = Ax, \qquad x \in \mathbb{R}^n \tag{B.7}$$

如下命题是等价的:

(i) 原点是渐近稳定的平衡点；

(ii) 原点是全局指数稳定的；

(iii) A是一个**Hurwitz 矩阵(Hurwitz matrix)**，即 A 的所有特征值均具有负实部；

(iv) 对于每个$n \times n$维的正定对称矩阵Q，$n \times n$ 维的正定对称矩阵

$$P = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{A^{\mathrm{T}}t} Q \mathrm{e}^{At} dt$$

是**Lyapunov 矩阵方程(Lyapunov matrix equation)**

$$A^{\mathrm{T}}P + PA = -Q$$

的惟一解，且$V = x^{\mathrm{T}}Px$是系统(B.7)的一个Lyapunov 函数。

□

定理 B.1.8 考虑自治系统(B.2)，其中$f(x)$为$\mathbb{C}^2$函数，且$f(0) = 0$。原点是一个指数稳定的平衡点，当且仅当关于原点的**线性近似(linear approximation)**

$$\dot{x} = Fx, \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

是渐近稳定的，其中$n \times n$ 维常数矩阵

$$F = \frac{df}{dx}(0)$$

是在原点取值的$f(x)$的雅可比矩阵。 □

注意$V = x^{\mathrm{T}}Px$，其中P为$F^{\mathrm{T}}P + PF = -Q$的解，$Q$为正定对称阵，既是系统(B.2)的Lyapunov 函数又是其线性近似的Lyapunov 函数。

例 B.1.5 系统

$$\dot{x} = -x + x^3$$

的一个平衡点(即原点)是指数稳定的，但并不是全局指数稳定的。 □

设K_0为$\mathbb{R}^n$中原点的一个紧邻域，且$E \subset K_0$。函数$V : [t_0, \infty) \times K_0 \to \mathbb{R}$称为$K_0$上$E$中的**非消定(non-vanishing definite)**函数，若对于任意$\varepsilon > 0$，存在两个正实数η和ξ，满足

$$\mathrm{d}(x, E) < \eta \to |V(t, x)| > \xi, \quad \forall x \in K_0 - B_\varepsilon, \forall t \in [t_0, \infty)$$

其中$B_\varepsilon \subset \mathbb{R}^n$是以原点为圆心，以$\varepsilon$为半径的一个开球，且

$$\mathrm{d}(x, E) = \inf_{y \in E} \mathrm{d}(x, y)$$

其中$\mathrm{d}(x, y)$表示x和y之间的欧氏距离。

定理 B.1.9 **(Matrosov)** 考虑系统(B.1)，令原点为一个平衡点。假设存在两个正实数a和b以及从$[t_0, \infty) \times U$到$\mathbb{R}$的两个$\mathbb{C}^1$函数$V(t, x)$和$W(t, x)$，其中U是原点的一个开连通邻域，一个连续函数$V^*(x) : U \to \mathbb{R}$，两个$K$类函数$\alpha$和$\beta$以及一个原点的紧邻域$K_0 \subset U$，使得对于任意$(x, t) \in U \times [t_0, \infty)$，满足：

(i) $|f(x, t)| \leqslant a$;

(ii) $|W(t, x)| \leqslant b$;

(iii) $\alpha(\|x\|) \leqslant V(t,x) \leqslant \beta(\|x\|)$;

(iv) $\dot{V}(t,x) \leqslant V^*(x) \leqslant 0$;

(v) 在 K_0 上 $E = \{x \in U : V^*(x) = 0\}$ 中，$\dot{W}(t,x)$ 是非消定的。

则:

(a) 原点是一致渐近稳定的;

(b) 对于任意的 $x_0 \in \{x \in U : V(t,x) \leqslant \alpha(r)\}$,

$$\lim_{t\to\infty} \|\varphi(t+t_0, t_0, x_0)\| = 0$$

在 t_0 和 x_0 处一致成立，其中 $r > 0$，使得闭球 $\bar{B}_r \subset U$。

□

B.2 自适应控制设计工具

在本节中将叙述并证明正文中用以证明自适应算法收敛性的一些结论。

定义 B.2.1 称函数 $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ 在 $[0,\infty)$ 上是一致连续的，当对于任意 $M > 0$ 存在 $\delta(M) > 0$，使得

$$|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| < M, \qquad \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}^+ : |t_1 - t_2| < \delta$$

□

引理 B.2.1 (Barbalat) 设 $\varphi(t)$ 是关于实变量 t 的一个实函数，它对于 $t \geqslant t_0, t_0 \in \mathbb{R}^+$ 是有定义且一致连续的。若随着 t 趋近于无穷，积分 $\int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)\, d\tau$ 的极限存在且为一个有限的数，则有

$$\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = 0 \tag{B.8}$$

□

证明: 用反证法证明。若不满足式 (B.8)，则存在一个正实数 $\varepsilon > 0$，使得对于任意正实数 $T > 0$ 均可找到 $t_T \geqslant T$，满足 $|\varphi(t_T)| \geqslant \varepsilon$。由于 φ 是一致连续的，则存在一个正实数 δ_ε，使得对于任意 $t \geqslant t_0$ 和任意 τ，在区间 $0 \leqslant \tau \leqslant \delta_\varepsilon$ 上有

$$|\varphi(t) - \varphi(t+\tau)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

特别地，对于 $t = t_T$ 有

$$|\varphi(t_T) - \varphi(t_T+\tau)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant \delta_\varepsilon$$

即

$$|\varphi(t_T) - \varphi(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \quad t_T \leqslant t \leqslant t_T + \delta_\varepsilon$$

由于 $|\varphi(t_T)| \geqslant \varepsilon$，有

$$|\varphi(t)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}, \quad t_T \leqslant t \leqslant t_T + \delta_\varepsilon$$

因此

$$\int_{t_T}^{t_T+\delta_\varepsilon} |\varphi(\tau)|\, d\tau \quad \geqslant \quad \frac{\varepsilon\delta_\varepsilon}{2}$$

故可以确定一个无限无界的序列 $\{t_i\}$，满足

$$\int_{t_i}^{t_i+\delta_i} |\varphi(\tau)|\, d\tau \quad \geqslant \quad \frac{\varepsilon_i\delta_i}{2}$$

这说明当 $t\to\infty$ 时，积分 $\int_{t_0}^{t}\varphi(\tau)\,d\tau$ 不能趋于一个有限的极限。 □

例 B.2.1 函数

$$\varphi(t) \quad = \quad \mathrm{e}^{-t}\sin(\mathrm{e}^{3t}-1) - 3\mathrm{e}^{2t}\cos(\mathrm{e}^{3t}-1)$$

不是一致连续的。当 t 趋于无穷时，其积分

$$\int_0^t \varphi(\tau)\, d\tau \quad = \quad -\mathrm{e}^{-t}\sin(\mathrm{e}^{3t}-1)$$

趋于零，但函数本身并不趋于零。 □

推论 B.2.1 若 $\psi(t):[t_0,\infty)\to\mathbb{R}^n$ 满足

(i) $\lim_{t\to\infty}\int_{t_0}^{t}\psi^{\mathrm{T}}(\tau)\psi(\tau)\,d\tau<\infty$

(ii) $\|\psi(t)\|\leqslant M_1, \forall t\geqslant t_0$

(iii) $\|\dfrac{d\psi(t)}{dt}\|\leqslant M_2, \forall t\geqslant t_0$

其中 M_1 和 M_2 是有限正实数，则

$$\lim_{t\to\infty}\|\psi(t)\| \quad = \quad 0$$

□

证明: 令 $\varphi(t)=\psi^{\mathrm{T}}(t)\psi(t)$。条件(ii)和条件(iii)说明 $\varphi(t)$ 和 $\dot\varphi(t)$ 有界。因此 φ 是一致连续的，我们对函数 $\varphi(t)$ 应用 Barbalat 引理可知 $\lim_{t\to\infty}\varphi(t)=0$，从而推论得证。 □

下面的定理给出了 Barbalat 引理 B.2.1 和 Matrosov 定理 B.1.9 的一个应用，该定理常用于自适应算法的设计。

定理 B.2.1 考虑系统

$$\begin{aligned}\dot x &= Ax+\Gamma^{\mathrm{T}}(x,z,t)z, & x\in\mathbb{R}^n,\ x(t_0)=x_0\\ \dot z &= -\Lambda\Gamma(x,z,t)Px, & z\in\mathbb{R}^p,\ z(t_0)=z_0\end{aligned}\tag{B.9}$$

其中 A 是一个 $n\times n$ 维 Hurwitz 矩阵；$\Gamma(x,z,t)$ 是一个 $p\times n$ 维光滑函数矩阵，对于任意有界的 (x,z) 一致有界；P 是 Lyapunov 方程 $A^{\mathrm{T}}P+PA=-Q$ 的 $n\times n$ 维正定对称解，其中 Q 为任意的正定对称矩阵；Λ 为任意的 $p\times p$ 维正定对称矩阵，则有：

(a) 平衡点 $(x,z)=0$ 是一致稳定的；

(b) 式(B.9)的解 $x(t)$ 和 $z(t)$ 是一致有界的，$\forall t \geqslant t_0, \forall x_0 \in \mathbb{R}^n, \forall z \in \mathbb{R}^p$；

(c) $\lim_{t\to\infty} \|x(t)\| = 0, \forall x_0 \in \mathbb{R}^n, \forall z_0 \in \mathbb{R}^p$。

并且，若对于所有有界的 (x,z)，$\partial\Gamma/\partial t$ 一致有界且存在一个 K 类函数 α，满足

$$z^{\mathrm{T}}\Gamma(0,z,t)\Gamma^{\mathrm{T}}(0,z,t)z \geqslant \alpha(\|z\|), \qquad \forall t \geqslant t_0, \forall z \in \mathbb{R}^p \tag{B.10}$$

则：

(d) 原点 $(x,z)=0$ 是系统(B.9)的一个全局一致渐近稳定平衡点。

□

证明: 考虑函数

$$V = x^{\mathrm{T}}Px + z^{\mathrm{T}}\Lambda^{-1}z$$

其对时间的导数为

$$\begin{aligned}\dot{V} &= x^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}P + PA)x + 2x^{\mathrm{T}}P\Gamma^{\mathrm{T}}z - 2z^{\mathrm{T}}\Lambda^{-1}\Lambda\Gamma Px = -x^{\mathrm{T}}Qx \\ &\triangleq V^*(x,z)\end{aligned} \tag{B.11}$$

显然，函数 V 满足 Lyapunov 定理B.1.5的条件(b)，因而结论(a)得证；又由于 V 是径向无界的，结论(b)亦得证。由式(B.9)，由于 $x(t), z(t)$ 和 $\Gamma(x,z,t)$ 有界，因此 $\dot{x}(t)$ 也有界。将式(B.11)对时间积分，可得

$$\int_{t_0}^{t} x^{\mathrm{T}}(\tau)Qx(\tau)\,d\tau = -\int_{t_0}^{t}\dot{V}(\tau)\,d\tau = V(t_0) - V(t)$$

这说明

$$\lim_{t\to\infty}\int_{t_0}^{t} x^{\mathrm{T}}(\tau)Qx(\tau)\,d\tau = V(t_0) - V(\infty) < \infty$$

对 $x(t)$ 应用推论B.2.1，得 $\lim_{t\to\infty}\|x(t)\| = 0$，从而结论(c)得证。系统(B.9)和函数 V 满足 Matrosov 定理B.1.9的条件(i)、条件(iii)和条件(iv)。考虑集合

$$E = \{(x,z) : V^*(x,z) = 0\} = \{(x,z) : x = 0\}$$

以及辅助函数

$$W(x,z,t) = x^{\mathrm{T}}\Gamma^{\mathrm{T}}(x,z,t)z$$

其对时间的导数为

$$\dot{W} = (x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} + z^{\mathrm{T}}\Gamma)\Gamma^{\mathrm{T}}z + x^{\mathrm{T}}\dot{\Gamma}^{\mathrm{T}}z + x^{\mathrm{T}}\Gamma^{\mathrm{T}}(-\Lambda\Gamma Px)$$

根据假设(B.10)，在 $\mathbb{R}^{n+p}$ 上 E 中 $\dot{W}$ 非零定且 V 径向无界；在 $\mathbb{R}^{n+p}$ 中原点处的任意开连通邻域内 Matrosov 定理B.1.9适用，从而结论(d)得证。 □

现在，我们给出一个技术性的引理，这一结果是在具有静态非线性输出反馈(称为Lur'e问题)的线性系统稳定性分析中得到的。

引理 B.2.2 **(Meyer-Kalman-Yacubovich)** 令 A 为一个 $n\times n$ 维 Hurwitz 矩阵且 b 和 c^{T} 为两个 $n\times 1$ 维实向量。当且仅当三元组 (A,b,c) 满足**严格正实(strictly positive real)**条件

$$\mathrm{Re}\{c(\mathrm{j}\omega I - A)^{-1}b\} > 0, \quad \forall \omega \in (-\infty, +\infty) \tag{B.12}$$

那么，对于任意$n\times n$维正定对称矩阵Q，存在一个$n\times n$维正定对称矩阵P，一个$n\times 1$维实向量q以及一个正实数ε，满足

$$\begin{aligned} A^{\mathrm{T}}P+PA &= -qq^{\mathrm{T}}-\varepsilon Q \\ Pb &= c^{\mathrm{T}} \end{aligned} \tag{B.13}$$

□

评注B.2.1 比较上述引理B.2.2和定理B.1.7的叙述，注意式(B.13)中的正定对称矩阵$qq^{\mathrm{T}}+\varepsilon Q$不是任意的；在式(B.13)中只有$Q$是一个任意的正定对称矩阵，而$q$和$\varepsilon$需要应用式(B.12)求得，从而使得式(B.13)成立，且P可根据定理B.1.7计算得到，正如下面的构造性证明所示。 □

引理B.2.2的证明: 充分性。定义

$$m(s) = (sI-A)^{-1}b$$

且

$$\psi(s) = \det(sI-A)$$

假设(B.12)表明对于任意的$\omega\in(-\infty,+\infty)$有

$$\begin{aligned} 2\mathrm{Re}\{c(\mathrm{j}\omega I-A)^{-1}b\} &= m^*(\mathrm{j}\omega)c^{\mathrm{T}}+cm(\mathrm{j}\omega) \\ &\triangleq \frac{\eta(\mathrm{j}\omega)}{\psi(\mathrm{j}\omega)\psi(-\mathrm{j}\omega)}>0 \end{aligned} \tag{B.14}$$

其中$\eta(\mathrm{j}\omega)$是一个实多项式，其阶至多为$2n-2$，上标‘*’表示复共轭转置。由于对于任意$\omega\in(-\infty,+\infty)$，$\eta(\mathrm{j}\omega)$必须为正实数，从而得出$\eta(s)$是实系数偶次多项式，其阶数是4的倍数，且$\eta(\mathrm{j}\omega)$的零点关于实轴和虚轴都是对称的，而且在虚轴上没有零点。考虑函数$m^*(\mathrm{j}\omega)Qm(\mathrm{j}\omega)$，因为$Q$是对称正定的，可写为

$$m^*(\mathrm{j}\omega)Qm(\mathrm{j}\omega)\triangleq\frac{\beta(\mathrm{j}\omega)}{\psi(\mathrm{j}\omega)\psi(-\mathrm{j}\omega)}>0,\qquad \forall\omega\in(-\infty,+\infty) \tag{B.15}$$

其中$\beta(s)$是一个实偶次多项式，阶数至多为$2n-2$。因此，式(B.14)和式(B.15)都是正实有理函数，且随着ω趋于无穷而趋于零。另外，对于有限的ω它们为连续的，因此具有有限的(正的)的上界和下界。令k_{m}表示式(B.14)的下界，k_{M}表示式(B.15)的上界。对于所有的$\omega\in(-\infty,+\infty)$，式(B.14)和式(B.15)可写为

$$\frac{\eta(\mathrm{j}\omega)-\varepsilon\beta(\mathrm{j}\omega)}{\psi(\mathrm{j}\omega)\psi(-\mathrm{j}\omega)} = m^*(\mathrm{j}\omega)c^{\mathrm{T}}+cm(\mathrm{j}\omega)-\varepsilon m^*(\mathrm{j}\omega)Qm(\mathrm{j}\omega)>0 \tag{B.16}$$

其中ε是一个正实数，满足

$$\varepsilon<\frac{k_{\mathrm{m}}}{k_{\mathrm{M}}} \tag{B.17}$$

由于$\eta(\mathrm{j}\omega)-\varepsilon\beta(\mathrm{j}\omega)>0,\forall\omega\in(-\infty,+\infty)$，多项式$\eta(s)-\varepsilon\beta(s)$可以因式分解为

$$\eta(s)-\varepsilon\beta(s) = \alpha(s)\alpha(-s)$$

其中$\alpha(s)$是一个阶数至多为$n-1$的实系数多项式

$$\alpha(s) = \alpha_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\alpha_0 \tag{B.18}$$

其中 $\alpha_0 \neq 0$，其零点仅位于复平面的开左半平面，从而

$$\frac{\eta(s)-\varepsilon\beta(s)}{\psi(s)\psi(-s)} = \frac{\alpha(s)\alpha(-s)}{\psi(s)\psi(-s)} \tag{B.19}$$

首先考虑 (A, b) 对是可控的情形。可以说明，在此情形下存在一个实的常数向量 q 满足

$$\frac{\alpha(s)}{\psi(s)} = q^{\mathrm{T}} m(s) \tag{B.20}$$

不失一般性，假设 A 和 b 具有控制器标准型

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

从而有

$$m(s) = (sI-A)^{-1}b = \frac{1}{\psi(s)} \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ \vdots \\ s^{n-1} \end{bmatrix} \tag{B.21}$$

事实上，满足式 (B.20) 的向量 q 可表示为

$$q^{\mathrm{T}} = [\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}]$$

其中 α_i 是多项式 (B.18) 的系数。由于假设 A 是一个 Hurwitz 矩阵，由定理 B.1.7 可知

$$P = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{A^{\mathrm{T}}t}(qq^{\mathrm{T}}+\varepsilon Q)\mathrm{e}^{At}\,dt \tag{B.22}$$

是一个正定对称阵，满足

$$A^{\mathrm{T}}P + PA = \int_0^{\infty} \frac{d}{dt}[\mathrm{e}^{A^{\mathrm{T}}t}(qq^{\mathrm{T}}+\varepsilon Q)\mathrm{e}^{At}]\,dt = -qq^{\mathrm{T}} - \varepsilon Q$$

另外，由式 (B.16)、式 (B.19) 和式 (B.20) 可以得出

$$\begin{aligned} m^*(\mathrm{j}\omega)c^{\mathrm{T}} + cm(\mathrm{j}\omega) &= \varepsilon m^*(\mathrm{j}\omega)Qm(\mathrm{j}\omega) + m^*(\mathrm{j}\omega)qq^{\mathrm{T}}m(\mathrm{j}\omega) \\ &= m^*(\mathrm{j}\omega)(\varepsilon Q + qq^{\mathrm{T}})m(\mathrm{j}\omega) \\ &= -m^*(\mathrm{j}\omega)(A^{\mathrm{T}}P+PA)m(\mathrm{j}\omega) \end{aligned} \tag{B.23}$$

由于

$$-(A^{\mathrm{T}}P+PA) = (-\mathrm{j}\omega I - A^{\mathrm{T}})P + P(\mathrm{j}\omega I - A) \tag{B.24}$$

由式 (B.23)，可得对于任意的 ω

$$m^*(\mathrm{j}\omega)c^{\mathrm{T}} + cm(\mathrm{j}\omega) = b^{\mathrm{T}}Pm(\mathrm{j}\omega) + m^*(\mathrm{j}\omega)Pb$$

即

$$Pb = c^{\mathrm{T}}$$

在 (A,b) 对不可控的情形下，不失一般性，假设 A 和 b 具有可达型

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix}$$

其中 (A_1, b_1) 为控制器标准型且 A_1 和 A_3 均为 Hurwitz 的，相应地将 P, Q 和 q 分解为

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2^{\mathrm{T}} & P_3 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_2^{\mathrm{T}} & Q_3 \end{bmatrix}, \quad q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$$

则式 (B.13) 变为

(i) $A_1^{\mathrm{T}} P_1 + P_1 A_1 = -q_1 q_1^{\mathrm{T}} - \varepsilon Q_1$

(ii) $A_2^{\mathrm{T}} P_1 + A_3^{\mathrm{T}} P_2^{\mathrm{T}} + P_2^{\mathrm{T}} A_1 = -q_2 q_1^{\mathrm{T}} - \varepsilon Q_2^{\mathrm{T}}$

(iii) $A_2^{\mathrm{T}} P_2 + A_3^{\mathrm{T}} P_3 + P_2^{\mathrm{T}} A_2 + P_3 A_3 = -q_2 q_2^{\mathrm{T}} - \varepsilon Q_3$

(iv) $P_1 b_1 = c_1$

(v) $P_2^{\mathrm{T}} b_1 = c_2$

由式 (B.12) 可得

$$\mathrm{Re}\{c_1(\mathrm{j}\omega I - A_1)^{-1} b_1\} > 0, \qquad \forall \omega \in (-\infty, +\infty)$$

因此对于方程 (i) 和方程 (iv) 存在一个解 P_1, q_1 和 ε。只要找到这个解，即可求解关于未知量 P_2^{T} 和 q_2 的方程 (ii) 和方程 (v)。由方程 (ii) 可得

$$P_2^{\mathrm{T}} = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{A_3^{\mathrm{T}} t}(q_2 q_1^{\mathrm{T}} + A_2^{\mathrm{T}} P_1 + \varepsilon Q_2^{\mathrm{T}}) \mathrm{e}^{A_1 t}\, dt \tag{B.25}$$

将其代入方程 (v) 得

$$\left(\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{A_3^{\mathrm{T}} t} q_1^{\mathrm{T}} \mathrm{e}^{A_1 t} b_1\, dt \right) q_2 = c_2 - \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{A_3^{\mathrm{T}} t}(A_2^{\mathrm{T}} P_1 + \varepsilon Q_2^{\mathrm{T}}) \mathrm{e}^{A_1 t} b_1\, dt \tag{B.26}$$

由于式 (B.26) 的右端已知，若矩阵

$$R = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{A_3^{\mathrm{T}} t} q_1^{\mathrm{T}} \mathrm{e}^{A_1 t} b_1\, dt$$

非奇异，则式 (B.26) 对于 q_2 可解。不失一般性，假设 A_3 和 $\mathrm{e}^{A_3 t}$ 为三角型，从而对角线上的元素 R_{ii} 可表示为

$$\begin{aligned} R_{ii} &= \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{\lambda_i t} q_1^{\mathrm{T}} \mathrm{e}^{A_1 t} b_1\, dt = q_1^{\mathrm{T}}(-\lambda_i I - A_1)^{-1} b_1 \\ &= [q_1^{\mathrm{T}}(sI - A_1)^{-1} b_1]_{s=-\lambda_i} \end{aligned}$$

由于 A_3 是 Hurwitz 的，因而 λ_i 在开左半平面上，而 $-\lambda_i$ 在开右平面上。另一方面，由式 (B.20) 可知 $q_1^{\mathrm{T}}(sI - A_1)^{-1} b_1$ 的所有零点都在开左半平面上。因此，对角元素 R_{ii} 不为零且 R 为非奇异的。由方程 (iii) 能够找到一个正定对称阵 P_3 是

$$A_3^{\mathrm{T}} P_3 + P_3 A_3 = -q_2 q_2^{\mathrm{T}} - \varepsilon Q_3 - (A_2^{\mathrm{T}} P_2 + P_2^{\mathrm{T}} A_2)$$

的解，即

$$P_3 = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{A_3^{\mathrm{T}} t}(q_2 q_2^{\mathrm{T}} + \varepsilon Q_3 + A_2^{\mathrm{T}} P_2 + P_2^{\mathrm{T}} A_2) \mathrm{e}^{A_3 t}\, dt \tag{B.27}$$

最后，P 是正定的且为 Lyapunov 方程

$$A^{\mathrm{T}}P + PA \;=\; -qq^{\mathrm{T}} - \varepsilon Q$$

的解。

必要性。假设式 (B.13) 成立，则由式 (B.13) 的第一个方程可得

$$m^*(\mathrm{j}\omega)(A^{\mathrm{T}}P + PA)m(\mathrm{j}\omega) \;=\; -m^*(\mathrm{j}\omega)qq^{\mathrm{T}}m(\mathrm{j}\omega) - \varepsilon m^*(\mathrm{j}\omega)Qm(\mathrm{j}\omega)$$

回顾式 (B.24) 并利用式 (B.13) 的第二个方程，可得

$$\begin{aligned} m^*[(-\mathrm{j}\omega I - A^{\mathrm{T}})P + P(\mathrm{j}\omega I - A)]m \;&=\; b^{\mathrm{T}}Pm + m^*Pb = cm + m^*c \\ = 2\mathrm{Re}\{c(\mathrm{j}\omega I - A)^{-1}b\} \;&=\; m^*qq^{\mathrm{T}}m + \varepsilon m^*Qm \end{aligned}$$

再回想式 (B.21)，可得出式 (B.12)。 □

若在式 (B.9) 中有 $\Gamma^{\mathrm{T}}(x,z,t) = b\gamma^{\mathrm{T}}(cx,t)$，其中 b 和 c^{T} 为属于 $\mathbb{R}^n$ 的常向量，则三元组 (A,b,c) 满足严格正实条件 (B.12)，Meyer-Kalman-Yacubovich 引理 B.2.2 允许我们特殊化处理定理 B.2.1，从而可得到一个经常用于自适应观测器和自适应输出反馈设计的结论。

定理 B.2.2 考虑系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + b\gamma^{\mathrm{T}}(y,t)z, \qquad x \in \mathbb{R}^n,\ x(t_0) = x_0 \\ y &= cx, \qquad y \in \mathbb{R} \\ \dot{z} &= -\Lambda\gamma(y,t)y, \qquad z \in \mathbb{R}^p,\ z(t_0) = z_0 \end{aligned} \tag{B.28}$$

其中三元组 (A,b,c) 满足严格正实条件 (B.12)，$\gamma(y,t)$ 是一个 $p\times 1$ 维的光滑函数向量，且对于所有有界的 y 一致有界，Λ 为任意 $p\times p$ 维正定对称矩阵。则有

(a) 平衡点 $(x,z)=0$ 是一致稳定的；

(b) 式 (B.28) 的解 $x(t)$ 和 $z(t)$ 是一致有界的，$\forall t \geqslant t_0$、$\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$ 和 $\forall z_0 \in \mathbb{R}^p$；

(c) $\lim_{t\to\infty}\|x(t)\| = 0, \forall x_0 \in \mathbb{R}^n, \forall z_0 \in \mathbb{R}^p$。

并且，若对于所有有界的 y，$\partial\gamma/\partial t$ 一致有界，且存在一个 K 类函数 α，满足

$$z^{\mathrm{T}}\gamma(0,t)\gamma^{\mathrm{T}}(0,t)z \geqslant \alpha(\|z\|), \qquad \forall t \geqslant t_0, \forall z \in \mathbb{R}^p$$

则原点 $(x,z)=0$ 是系统 (B.28) 的一个全局一致渐近稳定平衡点。 □

证明: 应用定理 B.2.1，在 (B.9) 中令 $\Gamma(x,z,t) = \gamma(cx,t)b^{\mathrm{T}}$，由 Meyer-Kalman-Yacubovich 引理 B.2.2 可得，P 为式 (B.13) 的解。由 P 的这一选择，在式 (B.9) 中有

$$\begin{aligned} \dot{z} &= -\Lambda\Gamma(x,z,t)Px = -\Lambda\gamma(cx,t)b^{\mathrm{T}}Px = -\Lambda\gamma(cx,t)cx \\ &= -\Lambda\gamma(y,t)y \end{aligned}$$

□

当式 (B.9) 中令 $\Gamma(x,z,t) = \Gamma(t)$ 的特殊情形下，即当式 (B.9) 是一个线性时变系统时，条件 (B.10) 变为

$$z^{\mathrm{T}}\Gamma(t)\Gamma^{\mathrm{T}}(t)z \geqslant \alpha(\|z\|), \qquad \forall t \geqslant t_0, \forall z \in \mathbb{R}^p$$

其中 $\dot{\Gamma}(t)$ 一致有界。根据定理B.1.3，定理B.2.1给出了平衡点 $(x,z)=0$ 是全局指数稳定的充分条件。然而在这种情形下，当条件更弱时也可得出同样的结论，如下述结论所示，该结论是分析自适应观测器参数收敛的主要工具。

引理 B.2.3 (**持续激励(Persistency of Excitation)**) 考虑线性时变系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax+\Omega^{\mathrm{T}}(t)z, \qquad x\in\mathbb{R}^n\\ \dot{z} &= -\Lambda\Omega(t)Px, \qquad z\in\mathbb{R}^p\end{aligned}\tag{B.29}$$

其中 A 为一个 $n\times n$ 维 Hurwitz 矩阵，P 为 $n\times n$ 维正定对称矩阵，满足 $A^{\mathrm{T}}P+PA=-Q$，其中 Q 为正定对称的，且 Λ 为 $p\times p$ 维正定对称矩阵。若 $\|\Omega(t)\|$ 和 $\|\dot{\Omega}(t)\|$ 是一致有界的，且满足**持续激励条件**，即存在两个正实数 T 和 k 满足(**persistency of excitation condition**)

$$\int_t^{t+T}\Omega(\tau)\Omega^{\mathrm{T}}(\tau)\,d\tau\geqslant kI>0,\quad \forall t\geqslant t_0\tag{B.30}$$

则 $(x,z)=0$ 是系统(B.29)的一个全局指数稳定平衡点。 □

证明: 不失一般性，假设 $\Lambda=I$。实际上，若 $\Lambda\neq I$，考虑坐标变换

$$x = x,\qquad \zeta=(L^{\mathrm{T}})^{-1}z$$

其中 L 为一个 $p\times p$ 维非奇异矩阵，满足 $\Lambda=L^{\mathrm{T}}L$。在新的坐标系下有

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax+\Omega^{\mathrm{T}}L^{\mathrm{T}}\zeta\\ \dot{\zeta} &= -(L^{\mathrm{T}})^{-1}L^{\mathrm{T}}L\Omega Px=-L\Omega Px\end{aligned}$$

定义矩阵 $\beta(t)=L\Omega(t)$，则

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax+\beta^{\mathrm{T}}(t)\zeta\\ \dot{\zeta} &= -\beta(t)Px\end{aligned}$$

其与式(B.29)形式相同，其中 $\Lambda=I$，而对于一个合适的 $k_1>0$，条件(B.30)等价于

$$\begin{aligned}L\left(\int_t^{t+T}\Omega(\tau)\Omega^{\mathrm{T}}(\tau)\,d\tau\right)L^{\mathrm{T}} &= \int_t^{t+T}L\Omega(\tau)\Omega^{\mathrm{T}}(\tau)L\,d\tau\\ &= \int_t^{t+T}\beta(\tau)\beta^{\mathrm{T}}(\tau)\,d\tau\geqslant k_1I>0\end{aligned}$$

因此只考虑系统(B.29)，其中 $\Lambda=I$，即

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax+\Omega^{\mathrm{T}}(t)z\\ \dot{z} &= -\Omega(t)Px\end{aligned}\tag{B.31}$$

其中 $\Omega(t)$ 满足条件(B.30)。首先说明，对于任意的初始条件有 $\lim_{t\to\infty}\|x(t)\|=0$。考虑径向无界函数

$$V = x^{\mathrm{T}}Px+z^{\mathrm{T}}z\tag{B.32}$$

由式(B.31)可得，其对时间的导数为

$$\begin{aligned}\dot{V} &= x^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}P+PA)x+2x^{\mathrm{T}}P\Omega^{\mathrm{T}}z-2z^{\mathrm{T}}\Omega Px\\ &= -x^{\mathrm{T}}Qx\end{aligned}\tag{B.33}$$

由 Lyapunov 定理 B.1.5 可得，$(x,z)=0$ 是一个一致稳定的平衡点。另外，根据式 (B.32) 和式 (B.33)，对于任意的 $t\geqslant t_0$，$\|x(t)\|$ 和 $\|z(t)\|$ 一致有界。因此 $\|\Omega(t)\|$ 一致有界，$\|\dot{x}(t)\|$ 也一致有界。由于对于任意的 $t\geqslant t_0$，$V(t)$ 是一个一致有界非增函数

$$\lim_{t\to\infty}\int_{t_0}^{t} x^{\mathrm{T}}(\tau)Qx(\tau)\,d\tau = \lim_{t\to\infty}\int_{t_0}^{t} -\dot{V}(\tau)\,d\tau = V(t_0)-V(\infty)<\infty \tag{B.34}$$

所以对 $x(t)$ 应用推论 B.2.1 可得

$$\lim_{t\to\infty}\|x(t)\| = 0 \tag{B.35}$$

下面说明，对于任意的初始条件有

$$\lim_{t\to\infty}\|z(t)\| = 0 \tag{B.36}$$

即对于任意的 $\varepsilon>0$，存在 $T_\varepsilon>0$ 满足 $\|z(t)\|<\varepsilon,\forall t\geqslant T_\varepsilon$，首先证明下面的命题。 □

命题 给定任意的 $\varepsilon>0$ 和 $T>0$，对于任意的初始条件 $x(t_0)=x_0, z(t_0)=z_0$，存在 $t>T$ 满足 $\|z(t)\|<\varepsilon$。

命题的证明: 用反证法，等价地证明对于任意的 $\varepsilon>0$，不存在使

$$\|z(t)\|\geqslant\varepsilon,\qquad \forall t\geqslant t_1 \tag{B.37}$$

成立的时刻 t_1。考虑函数 $(T>0)$

$$\varphi(z(t),t) = \frac{1}{2}\left[z^{\mathrm{T}}(t+T)z(t+T)-z^{\mathrm{T}}(t)z(t)\right] \tag{B.38}$$

如前所述，对于任意的 $t\geqslant t_0, \|z(t)\|$ 是有界的，因此 φ 是有界的。由式 (B.31) 可得，式 (B.38) 对时间的导数满足

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi(z(t),t)}{dt} &= z^{\mathrm{T}}(t+T)\dot{z}(t+T)-z^{\mathrm{T}}(t)\dot{z}(t)=\int_t^{t+T}\frac{d}{d\tau}(z^{\mathrm{T}}(\tau)\dot{z}(\tau))\,d\tau\\ &= -\int_t^{t+T}\frac{d}{d\tau}(z^{\mathrm{T}}(\tau)\Omega(\tau)Px(\tau))\,d\tau\\ &= \int_t^{t+T}(x^{\mathrm{T}}P\Omega^{\mathrm{T}}\Omega P-z^{\mathrm{T}}\dot{\Omega}P-z^{\mathrm{T}}\Omega PA)x\,d\tau\\ &\quad -\int_t^{t+T}z^{\mathrm{T}}\Omega P\Omega^{\mathrm{T}}z\,d\tau\end{aligned} \tag{B.39}$$

现在将确定最后一式中两个积分的界。由假设可知 $\|\Omega(t)\|$ 和 $\|\dot{\Omega}(t)\|$ 一致有界。令 M_Ω 满足 $\|\Omega(t)\|\leqslant M_\Omega$ 且 $\|\dot{\Omega}(t)\|\leqslant M_\Omega,\forall t\geqslant t_0$。由式 (B.32) 和式 (B.33) 有

$$\begin{aligned}\|x(t)\| &\leqslant \sqrt{\frac{x_0^{\mathrm{T}}x_0\lambda_{\mathrm{M}}(P)+z_0^{\mathrm{T}}z_0}{\lambda_{\mathrm{m}}(P)}}\triangleq M_x\\ \|z(t)\| &\leqslant \sqrt{x_0^{\mathrm{T}}x_0\lambda_{\mathrm{M}}(P)+z_0^{\mathrm{T}}z_0}\triangleq M_z\end{aligned} \tag{B.40}$$

其中 (x_0,z_0) 为初始条件，$\lambda_{\mathrm{m}}(P)$ 和 $\lambda_{\mathrm{M}}(P)$ 分别为 P 的最小和最大特征值，对于式 (B.39) 中的第一个积分，可写出

$$\begin{aligned}\int_t^{t+T}(x^{\mathrm{T}}P\Omega^{\mathrm{T}}\Omega P-z^{\mathrm{T}}\dot{\Omega}P-z^{\mathrm{T}}\Omega PA)x\,d\tau &\leqslant (\lambda_{\mathrm{M}}(P)M_xM_\Omega^2\\ &\quad +\lambda_{\mathrm{M}}(P)M_zM_\Omega+\lambda_{\mathrm{M}}(P)M_z\|A\|M_\Omega)\int_t^{t+T}\|x\|\,d\tau\end{aligned} \tag{B.41}$$

另一方面，根据式 (B.35)，存在一个时刻 t_2 使得

$$\int_t^{t+T}(x^{\mathrm{T}}P\Omega^{\mathrm{T}}\Omega P - z^{\mathrm{T}}\dot{\Omega}P - z^{\mathrm{T}}\Omega PA)x\,d\tau \leqslant \frac{1}{2}k\lambda_{\mathrm{m}}(P)\varepsilon^2, \qquad \forall t \geqslant t_2 \tag{B.42}$$

由反证法，现在假设存在一个时刻 t_1，使得式 (B.37) 成立。假设式 (B.30) 说明

$$\int_t^{t+T} w^{\mathrm{T}}\Omega(\tau)P\Omega^{\mathrm{T}}(\tau)w\,d\tau \ \geqslant\ k\lambda_{\mathrm{m}}(P), \quad \forall t \geqslant t_0, \forall w : \|w\| = 1$$

由该式和式 (B.37) 可知对于式 (B.39) 中的第二个积分有

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varepsilon^2}\int_t^{t+T} z^{\mathrm{T}}(\tau)\Omega(\tau)P\Omega^{\mathrm{T}}(\tau)z(\tau)\,d\tau \ &\geqslant\ \int_t^{t+T}\frac{z^{\mathrm{T}}(\tau)}{\|z(\tau)\|}\Omega(\tau)P\Omega^{\mathrm{T}}(\tau)\frac{z(\tau)}{\|z(\tau)\|}\,d\tau\\ &\geqslant k\lambda_{\mathrm{m}}(P), \qquad \forall t \geqslant t_1\end{aligned}$$

即

$$\int_t^{t+T} z^{\mathrm{T}}(\tau)\Omega(\tau)P\Omega^{\mathrm{T}}(\tau)z(\tau)\,d\tau \geqslant k\varepsilon^2\lambda_{\mathrm{m}}(P), \quad \forall t \geqslant t_1 \tag{B.43}$$

由式 (B.39)、式 (B.43) 和式 (B.42)，可得

$$\frac{d\varphi(z(t),t)}{dt} \leqslant -\frac{1}{2}k\lambda_{\mathrm{m}}(P)\varepsilon^2, \qquad \forall t \geqslant t_3 \tag{B.44}$$

其中 $t_3 = \max\{t_1, t_2\}$，对于任意的 $t \geqslant t_0$，其与 $\varphi(z(t),t)$ 有界相矛盾。命题得证。

由式 (B.35)，对于任意的 $\varepsilon > 0$，存在一个时刻 t_ε，满足

$$\|x(t)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\lambda_{\mathrm{M}}(P)}}, \qquad \forall t \geqslant t_\varepsilon \tag{B.45}$$

由命题可知存在一个时刻 $T_\varepsilon > t_\varepsilon$，满足

$$\|z(T_\varepsilon)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \tag{B.46}$$

根据式 (B.40)、式 (B.45) 和式 (B.46)，由初始条件 $x(T_\varepsilon)$ 和 $z(T_\varepsilon)$ 可得

$$\|z(t)\| \ \leqslant\ \sqrt{x^{\mathrm{T}}(T_\varepsilon)x(T_\varepsilon)\lambda_{\mathrm{M}}(P) + z^{\mathrm{T}}(T_\varepsilon)z(T_\varepsilon)} \leqslant \varepsilon, \quad \forall t \geqslant T_\varepsilon$$

这说明式 (B.36) 成立。因而平衡点 $(x,z) = 0$ 是吸引的。由于式 (B.34) 对于 t_0 一致成立，式 (B.35) 和式 (B.36) 亦如此。从而得出 $(x,z) = 0$ 是一个全局一致渐近稳定的平衡点，且因为系统 (B.29) 是线性的，由定理 B.1.3 可得平衡点也是全局指数稳定的。

文献说明

书籍

读者可参考下面的基础教材：关于常微分方程的文献[4, 59, 60]；关于动态系统的文献[63]；关于Lyapunov稳定性定理的文献[58, 63, 80, 88, 100, 161, 197]；关于线性系统的文献[22, 30, 34, 55, 74, 176, 205, 206]；关于微分几何的文献[21, 199]。对于线性系统自适应控制的具体研究方法，读者可参见文献[6, 140, 165]；特别地，文献[140]研究了自适应观测器问题，并且给出了许多参考文献与应用，关于自适应输入输出线性化问题，文献[165]中的一章介绍了与本书不同的处理方法。这两本书都研究了针对未建模动态特性的鲁棒问题，而这些内容在本书中并未考虑。其余的线性系统自适应控制资料可参见文献[3, 47, 82, 97, 156]。关于不确定系统的鲁棒控制问题，文献[209]提供了最新的文献(经典文献另参见文献[193])。对于非线性理论(包括可达性、可观测性与实现)和非线性几何设计(包括多变量反馈线性化、干扰解耦和输入输出解耦)的更广泛研究可参见文献[68]和文献[150]。特别地，文献[68]包括了非线性调节器理论，文献[150]讨论了离散时间和机械非线性系统。前苏联关于非线性控制的论文可参见文献[142]，文献[7]综述了镇定方法，文献[86]研究了奇异摄动方法(本书中未采用)。机器人学和空间飞行器的应用、滑动控制器和反馈线性化以及自适应控制的介绍参见文献[173]。文献[5, 177]介绍了机器人动力学及控制。文献[89]研究了电机的建模(特别地，步进马达参见文献[1])；文献[104]和文献[45]研究了电力驱动控制，重点在于数字信号处理器的实现。文献[44]论述了电力系统建模。文献[99]则详细地研究了飞行器建模和控制。

第1章

非线性几何控制设计最初的应用可追溯到1972年，即感应电动机中所谓的“磁场定向控制”见文献[16]，现已在商用电动机中得以应用；机器人学中的“计算扭矩”文献[53](另参见文献[52, 54])已在各种机器人实验室中予以实现；直升机自动驾驶仪的设计文献[135, 134]已在被称为“Frobenius I”的原型机中得到尝试。问题1.10.1中给出的感应电动机模型取自于文献[117] (关于建模问题和磁场定向控制的更广泛研究另参见文献[104])。问题1.10.2中给出的二连杆平面机器人模型可在许多机器人学书籍中找到，例如文献[5, 177]详尽地讨论了有关状态反馈控制的问题，文献[174]介绍了机器人自适应控制(另参见文献[144, 187])，而文献[146]讨论了输出反馈控制。问题1.10.3与问题1.10.4中给出的刚体动力学已广为人知(例如文献[99])，本书分别取材于文献[33]和文献[42]。关于控制设计问题，读者可参见文献[28, 33, 42, 98, 62, 171, 169, 46, 136, 135, 134, 145]。运动小车上的倒立摆控制(问题1.10.5)是

控制实验室的一个典型实验(模型可参见文献[55])。问题1.10.6(球棒系统)也是一个典型实验，最近文献[61]再次对此进行了研究。问题1.10.7(见文献[22])是一个具有指导性的多变量卫星控制问题。问题1.10.8给出了最简单的集中弹性力学的机器人模型(见文献[177]，并设计了一个状态反馈控制；文献[128, 129]给出了设计输出反馈自适应控制的方法)；文献[143, 188, 189, 190]讨论了柔性关节机器人的各种控制问题。问题1.10.9由文献[110]改写而来，其中关于θ_i的表达式是以物理参数形式给出的。问题1.10.10取自于文献[121](建模问题参见文献[210, 35, 67, 1]，实验结果参见文献[17])。问题1.10.11是一个经典的控制问题。问题1.10.12是带有柔性太阳帆板的卫星(参见文献[202]中的可查询实例)的一个标准控制问题。例1.7取自于文献[83]，该文献对此进行了详细讨论。

第2章

极点配置定理可在许多线性系统的相关书籍中找到。关于标准型以及转换到标准型的状态变换与反馈变换，读者可参见文献[30, 74, 205, 34, 206, 176, 55]及其中的参考书目(另见文献[50]，从不同观点给出了论述)。文献[94]于1973年给出了通过局部微分同胚将非线性系统转换为线性可控系统的第一个结论(状态线性化定理2.3.1和定理2.6.1的一个证明可另参见文献[180, 160])。1978年，文献[23]提出了反馈线性化问题，并对一类受限的反馈变换给出了解。在文献[72, 65]中分别采用不同的表达形式建立了反馈线性化定理2.7.2 (关于这一问题的综述可见文献[175]和文献[160])；文献[179]给出了单输入情形下的结果(定理2.2.1)。文献[195]给出了在关于输入为非线性的系统的推广(见评注2.2.6)。文献[32, 33]阐述并讨论了本书未提及的更为一般的动态反馈线性化问题。在单输入情形下，文献[92]于1983年提出并解决了部分反馈线性化问题(定理2.4.2)。文献[113]解决了多输入部分线性化问题(定理2.7.5)。文献[114]提出并解决了三角型部分线性化问题(定理2.4.3)。文献[43]与文献[159] 分别独立解决了全局线性化问题(2.6节)(另参见文献[19, 66, 39, 18])。对于镇定的一般问题，特别是三角型系统的镇定问题，读者可参阅[7]及其中的参考书目(另参见文献[24, 27, 25, 26, 84, 87, 20, 192, 111, 163, 181])。例2.5.3取自文献[20]，而例2.8.5在文献[33]中讨论过。例2.5.1取自文献[81]。例2.8.6取自文献[117]。关于例2.8.3的更多细节，读者可以参考文献[210]，关于例2.8.2中所研究的问题1.10.9，更一般的讨论可参阅文献[110]。

第3章

在早期工作文献[2]的基础上，文献[76]得出了定理3.1.1。该定理推广了文献[182] (另参见文献[115])中介绍的非线性系统和文献[48]中的线性系统匹配条件(推论3.1.1)以及文献[77]中给出的增广匹配条件(推论3.1.2)。文献[167]阐述了与标称系统定义有关的问题。文献[132]给出了定理3.2.1和定理3.3.1(不同的控制算法可参考文献[51]，在问题1.10.2中的应用可参考文献[147])。这些结果推广了文献[10, 11, 40, 41, 152, 186]中得到的早期结果(关于这方面的综述可参考文献[36, 37, 57, 102, 101, 103, 153]和文献[209])。线性系统的状态反馈MRAC技术可见文献[97](对满足匹配条件的非线性系统的推广另参见文献[8])。定义3.4.1取自于文献[115]。在设计MRAC系统时应用的Lyapunov 稳定性定理可追溯到文献[151]及其中所引用的文章。定理3.4.1是从文献[182]中得到的，其中也阐述了针对未建模动态的鲁棒性问题。自适应反馈线性化定理3.4.2是根据文献[76]并结合文献[73]中给出的结果改写的(关于这方面的

综述另参见文献[85])。在例3.4.2中简述的避免过度参数化的步骤取自于文献[95]。例3.6.3是文献[121]中的一个结果的推广。本章中未提及的自适应状态反馈控制设计的更多工作可在文献[139, 31, 155, 158, 184]中找到。

第4章

文献[71]介绍了多变量跟踪标准型；零动态的概念是文献[24]及文献[112]在研究非线性系统的高增益反馈时引进的。文献[61]提到了例4.1.2。输入输出线性化定理4.2.1、定理4.6.1以及相对阶和解耦矩阵的相关概念可追溯到文献[157, 170, 52, 54, 172]。带有输出的多变量系统的反馈线性化问题已在文献[38]中得以解决，定理4.2.4是一个特例。文献[148]解决了带有输出的多变量系统的状态线性化问题。例4.2.4取自文献[120]。干扰解耦问题及其多变量情形分别在文献[71]和文献[64]中得以解决，它们均基于文献[12, 207]中线性系统的解。定理4.3.1的条件取自文献[149]，同时它也是文献[15]中关于线性系统的条件的推广。干扰衰减问题在文献[203, 204]中针对线性系统描述了(最初在文献[203, 204]中称为近似干扰解耦问题)，并给出了解(关于控制器的显式建立参见文献[162])。在文献[119, 118]中针对非线性系统进行了研究，并给出了充分条件。引理4.3.1取自文献[119]，而定理4.4.1和定理4.4.2是根据文献[118]改写的。定理4.5.2是由文献[76]改写的。例4.7.3和例4.7.4取自文献[117]。文献[190]给出了干扰衰减方法在问题1.10.8中的一个应用。本文并未提及自适应情形下输入输出反馈线性化控制的其他设计方法，该方法已在文献[166, 183]中给出并在文献[165]中进行了广泛的研究。文献[70]给出了本章未研究的非线性非最小相位系统的控制算法(自适应情形参见文献[133])。而有关非线性 H_∞ 技术的近期结果(本章未提及)可参见文献[69, 196, 194]。

第5章

5.1节回顾了线性系统的众所周知的结论(见文献[74, 34, 55, 30])。文献[90, 107, 108]中给出了线性系统的自适应观测器(更多的参考书目另参见文献[140])。定理5.2.1和定理5.2.2的局部情形是基于推论5.2.1的，它最初是由文献[91]于1983年得出的(另参见文献[185, 14])，这个结果是非线性观测器设计的一个起点，由文献[43, 159]中得到的结论可以将这些结果全局化。定理5.3.1、定理5.3.2和定理5.3.4取自文献[109](另参见文献[13]中的早期工作)。定理5.3.3和定理5.3.5取自文献[127]，而文献[122]给出了以文献[208]中提出的非自适应结果为基础的在多输出系统中的推广(另参见文献[93]中的早期工作)。定理5.4.1、例5.4.1、例5.4.2和习题5.6.16取自文献[208]。习题5.6.12取自文献[106]。文献[148]解决了习题5.6.18中提出的问题。文献[122]给出了多输出非线性系统的自适应观测器。针对具有自适应观测器型(5.30)的非线性系统，文献[123]给出了具有任意指数收敛率的自适应观测器。文献[105]中推导了非线性观测器设计的不同方法(自适应情形见[126])，本章对此并未加以研究。

第6章

文献[160]首次以不同的描述形式给出了定理6.1.1。定理6.2.1取自文献[124]。定理6.3.1是文献[129]所得结论的一种简化形式(相关结论另参见文献[154])。定理6.4.1取自于文献[130]。例6.5.4取自文献[116]，并进行了更深入的讨论。文献[29]从不同观点论述

了相对阶为1的系统的输出反馈镇定问题。关于输出反馈镇定问题的其他结论可参见文献[198, 191]。

第7章

定理7.2.1、定理7.2.3、定理7.3.1和定理7.3.2取自文献[129]。文献[96]建立了定理7.2.4给出的线性系统的充分条件，而文献[200]和文献[201]减弱了该条件(关于这方面的综述见文献[168])。文献[178, 164]给出了含有圆锥有界非线性摄动的线性系统输出反馈控制(见评注7.2.3和评注7.2.5)。文献[79]提出了在Lipschitz条件下摄动的自校正控制。定理7.4.1、定理7.4.2和定理7.4.3取自文献[128](特例见文献[131, 78]，早期结果见文献[125, 75])。定理7.4.4的不同证明方法可见文献[49, 138, 141, 56]。

附录A

大部分材料取自文献[21](另参见文献[199, 68, 150, 197])。动态系统的定义则取自文献[63]。

附录B

大部分结果和定义取自文献[58, 197]。定理B.1.2、定理B.1.3和定理B.1.5～定理B.1.8取自文献[197]，其中可找到相应的证明。Matrosov定理的论述取自文献[161]。Barbalat引理取自文献[156]，该结论最初由文献[9]给出，而Meyer-Kalman-Yacubovich引理是根据文献[137]改写的(关于导出该结论的Lur'e问题的具体说明，读者可参考文献[100])。持续激励引理B.2.3的等价论述可在文献[140, 165, 3]中找到，其中给出了不同的证明。

参考文献

[1] P. P. Acarnley. *Stepping Motors: a Guide to Modern Theory and Practice.* Peter Peregrinus, London, 1992.

[2] O. Akhrif and G. L. Blankeship. Robust stabilization of feedback linearizable systems. In *IEEE 27th Conf. on Decision and Control*, pages 1714–1719, Austin, TX, 1988.

[3] B. D. O. Anderson, R. R. Bitmead, C. R. Johnson, P. V. Kokotovic, R. L. Kosut, L. M. Y. Mareels, L. Praly, and B. D. Riedle. *Stability of Adaptive Systems: Pasivity and Averaging Analysis.* MIT Press, Cambridge, MA, 1986.

[4] V. I. Arnold. *Ordinary Differential Equations.* MIT Press, Cambridge, MA, 1973.

[5] H. Asada and J. J. E. Slotine. *Robot Analysis and Control.* J. Wiley and Sons, New York, 1986.

[6] K. J. Astrom and B. Wittenmark. *Adaptive Control.* Addison-Wesley, Reading MA, 1989.

[7] A. Bacciotti. *Local Stabilizability of Nonlinear Control Systems.* World Scientific, Singapore, 1991.

[8] A. Balestrino, G. De Maria, and L. Sciavicco. Hyperstable adaptive model following control of nonlinear plants. *Systems and Control Letters*, 1:232–236, 1982.

[9] I. Barbalat. Systèmes déquation différentielles d'oscillations non linéarires. *Revue de mathématiques pures et appliquées, Bucharest*, IV:267–270, 1959.

[10] B. R. Barmish, M. Corless, and G. Leitmann. A new class of stabilizing controllers for uncertain dynamical systems. *SIAM J. Control Optimiz.*, 21:246–255, 1983.

[11] B. R. Barmish and G. Leitmann. On ultimate boundedness control of uncertain systems in the absence of matching condition. *IEEE Trans. Automatic Control*, 27:153–157, 1982.

[12] G. Basile and G. Marro. Controlled and conditioned invariant subspaces in linear systems theory. *J. Opt. Theory and Applications*, 3:306–315, 1969.

[13] G. Bastin and M. Gevers. Stable adaptive observers for nonlinear time varying systems. *IEEE Trans. Automatic Control*, 33:650–658, 1988.

[14] D. Bestle and M. Zeitz. Canonical form observer design for nonlinear time variable systems. *Int. J. Control*, 38:419–431, 1983.

[15] S. P. Bhattacharya. Disturbance rejection in linear systems. *Int. J. Syst. Science*, 5:633–637, 1974.

[16] F. Blaschke. The principle of field orientation applied to the new transvector closed-loop control system for rotating field machines. *Siemens-Rev.*, 39:217–220, 1972.

[17] M. Bodson, J. Chiasson, R. Novotnak, and R.Rekowski. High performance nonlinear feedback control of a permanent magnet stepper motor. *IEEE Trans. Control System Technology*, 1:5–14, 1993.

[18] W. M. Boothby. Global feedback linearizability of locally linearizable systems. In M. Fliess and M. Hazewinkel, editors, *Algebraic and Geometric Methods in Nonlinear Control Theory*, pages 243–256, D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1986.

[19] W. M. Boothby. Some comments on global linearization of nonlinear systems. *Systems and Control Letters*, 4:143–147, 1984.

[20] W. M. Boothby and R. Marino. Feedback stabilization of planar nonlinear systems. *Systems and Control Letters*, 12:87–92, 1989.

[21] W. M. Boothby. *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*. Academic Press, New York, 1979.

[22] R. W. Brockett. *Finite Dimensional Linear Systems*. Wiley, New York, 1970.

[23] R. W. Brockett. Feedback invariants for non-linear systems. In *VII IFAC World Congress*, pages 1115–1120, Helsinki, Finland, 1978.

[24] C. I. Byrnes and A. Isidori. Global feedback stabilization of nonlinear systems. In *IEEE 24th Conf. on Decision and Control*, pages 1031–1037, Ft. Lauderdale, 1985.

[25] C. I. Byrnes and A. Isidori. New results and examples in nonlinear feedback stabilization. *Systems and Control Letters*, 12:437–442, 1989.

[26] C. I. Byrnes and A. Isidori. Asymptotic stabilization of minimum phase nonlinear systems. *IEEE Trans. Automatic Control*, 36:1122–1137, 1991.

[27] C. I. Byrnes and A.Isidori. Local stabilization of minimum phase nonlinear systems. *Systems and Control Letters*,11:9–17, 1988.

[28] C. I. Byrnes and A. Isidori. On the attitude stabilization of rigid spacecraft. *Automatica*, 27:87–95, 1991.

[29] C. I. Byrnes. A. Isidori, and J. C. Willems. Passivity, feedback equivalence and the global stabilization of minimum phase nonlinear systems. *IEEE Trans. Automatic Control*, 36:1228–1240, 1991.

[30] F. M. Callier and C. A. Desoer. *Linear System Theory*. Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[31] G. Campion and G. Bastin. Indirect adaptive state feedback control of linearly parametrized nonlinear systems. *Int. J. Adaptive Control and Signal Proc.*, 4:345–358, 1990.

[32] B. Charlet, J. Levine, and R. Marino. On dynamic feedback linearization. *Systems and Control Letters*, 13:143–151, 1989.

[33] B. Charlet, J. Levine, and R. Marino. Sufficient conditions for dynamic state feedback linearization. *SIAM J. Control Optimiz.*, 29:38–57, 1991.

[34] C. T. Chen. *Introduction to Linear System Theory, 2nd edn.* Rinehart and Winston, New York, 1986.

[35] D. Chen and B. Paden. Adaptive linearization of hybrid step motors. *IEEE Trans. Automatic Control*, 38:874–887. 1993.

[36] Y. H. Chen. On the robustness of mismatched uncertain dynamical systems. *ASME J. Dyn. Systems, Measur., and Control*, 109:29–35, 1987.

[37] Y. H. Chen and G. Leitmann. Robustness of uncertain systems in the absence of matching assumptions. *Int. J. Control*, 45:9–17, 1985.

[38] D. Cheng, A. Isidori, W. Respondek, and T. J. Tarn. Exact linearization of nonlinear systems with outputs. *Math. System Theory*, 21:63–83, 1988.

[39] D. Cheng T. J. Tarn, and A. Isidori. Global external linearization of nonlinear systems via feedback. *IEEE Trans. Automatic Control*, 30:808–811, 1985.

[40] M. J. Corless and G. Leitmann. Continuous state feedback guaranteeing uniform ultimate boundedness of uncertain dynamical systems. *IEEE Trans. Automatic Control*, 26:850–861, 1982.

[41] M. J. Corless and G. Leitmann. Erratum to "Continuous state feedback guaranteeing uniform ultimate boundedness of uncertain dynamical systems". *IEEE Trans. Automatic Control*, 28:249, 1983.

[42] P. Crouch. Spacecraft attitude control and stabilization: application of geometric control theory to rigid body models. *IEEE Trans. Automatic Control*, 29:321–331, 1984.

[43] W. P. Dayawansa, W. M. Boothby, and D. Elliott. Global state and feedback equivalence of nonlinear systems. *Systems and Control Letters*, 6:229–234, 1985.

[44] V. Deltoro. *Electric Machines and Power Systems*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1985.

[45] Y. Dote. *Servo Motor and Motion Control Using Digital Signal Processors*. Prentice Hall and Texas Instruments, Englewood Cliffs, NJ, DSP Series, 1990.

[46] T. A. W. Dwyer. Exact nonlinear control of large angle rotational maneuvers. *IEEE Trans. Automatic Control*, 29:769–777, 1984.

[47] B. Egardt. *Stability of Adaptive Controllers*. Springer-Verlag, Berlin, 1979.

[48] H. Erzberger. Analysis and design of model following systems by state space techniques. In *Joint Automatic Control Conf.*, pages 572–581, Ann Arbor, MI, 1968.

[49] A. Feuer and A. S. Morse. Adaptive Control of single-input single-output linear systems. *IEEE Trans. Automatic Control*, 23:557–569, 1978.

[50] M. Fliess. Generalized controller canonical forms for linear and nonlinear dynamics. *IEEE Trans. Automatic Control*, 35:994–1001, 1990.

[51] R. A. Freeman and P. V. Kokotovic. Design of 'softer' robust nonlinear control laws. *Automatica*, 29:1425–1437, 1993.

[52] E. Freund. Decoupling and pole assignment in nonlinear systems. *Electronic Letters*, 9:16, 1973.

[53] E. Freund. *Method and arrangement for the control of manipulators and industrial robots*. US Patent 4218172, Patent Specification Japan Sho-53-75664, 1976.

[54] E. Freund. The structure of decoupled nonlinear systems. *Int. J. Control*, 21:443–450, 1975.

[55] B. Friedland. *Control System Design: an Introduction to State Space Methods*. McGraw-Hill, New York, 1987.

[56] G. C. Goodwin and D. Q. Maine. A parameter estimation perspective of continuous time model reference adaptive control. *Automatica*, 23:57–70, 1987.

[57] S. Gutman. Uncertain dynamical systems: Lyapunov min-max approach. *IEEE Trans. Automatic Control*, 24:437–443, 1979.

[58] W. Hahn. *Stability of Motion*. Springer-Verlag, Berlin, 1967.

[59] J. K. Hale. *Ordinary Differential Equations*. Krieger Huntington, New York, 1980.

[60] P. Hartmann. *Ordinary Differential Equations, 2nd edn*. Birkhäuser, Boston, 1982.

[61] J. Hauser, S. S. Sastry, and P. V. Kokotovic. Nonlinear control via approximate input-output linearization: the ball and beam example. *IEEE Trans. Automatic Control*, 37:392–398, 1992.

[62] J. Hauser, S. S. Sastry, and G. Meyer. Nonlinear control design for slightly nonminimum phase systems: application to V/STOL aircraft. *Automatica*, 28:605–679, 1992.

[63] W. H. Hirsch and S. Smale. *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra.* Academic Press, New York, 1974.

[64] R. M. Hirschorn. (A,B)-invariant distributions and disturbance decoupling of nonlinear systems. *SIAM J. Control Optimiz.*, 19:1–19, 1981.

[65] L. R. Hunt, R. Su, and G. Meyer. Design for multi-input nonlinear systems. In R.W. Brockett, R.S. Millmann, and H.J. Sussmann, editors, *Differential Geometric Control Theory*, pages 268–298, Birkhäuser, Boston, 1983.

[66] L. R. Hunt, R. Su, and G. Meyer. Global transformations of nonlinear systems. *IEEE Trans. Automatic Control*, 28:24–30, 1983.

[67] M. Ilic'-Spong, R. Marino, S. M. Peresada, and D. G. Taylor. Feedback linearizing control of switched reluctance motors. *IEEE Trans. Automatic Control*, 32:371–379, 1987.

[68] A. Isidori. *Nonlinear Control Systems.* Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[69] A. Isidori and A. Astolfi. Disturbance attenuation and H_∞-control via measurement feedback in nonlinear systems. *IEEE Trans. Automatic Control*, 37:1283–1293, 1992.

[70] A. Isidori and C. I. Byrnes. Output regulation of nonlinear systems. *IEEE Trans. Automatic Control*, 35:131–140, 1990.

[71] A. Isidori, A.J. Krener, C. Gori-Giorgi, and S. Monaco. Nonlinear decoupling via feedback: a differential geometric approach. *IEEE Trans. Automatic Control*, 26:331–345, 1981.

[72] B. Jakubczyk and W. Respondek. On linearization of control systems. *Bull. Acad Polonaise Sci. Ser. Sci. Math.*, 28:517–522, 1980.

[73] Z. P. Jiang and L. Praly. Iterative design of adaptive controllers for systems with nonlinear integrators. In *IEEE 30th Conf. on Decision and Control*, pages 2482–2487, Brighton, England, 1991.

[74] T. Kailath. *Linear Systems.* Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1980.

[75] I. Kanellakopoulos, P. V. Kokotovic, and A. S. Morse. Adaptive output-feedback control of systems with output nonlinearities. In P.V. Kokotovic, editor, *Foundations of Adaptive Control*, pages 495–525, Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[76] I. Kanellakopoulos, P. V. Kokotovic, and A. S. Morse. Systematic design of adaptive controllers for feedback linearizable systems. *IEEE Trans. Automatic Control*, 36:1241–1253, 1991.

[77] I. Kanellakopoulos, P. V. Kokotovic, and R. Marino. An extended direct scheme for robust adaptive nonlinear control. *Automatica*, 27:247–255, 1991.

[78] I. Kanellakopoulos, P. V. Kokotovic, and A. S. Morse. Adaptive output-feedback control of systems with output nonlinearities. *IEEE Trans. Automatic Control*, 37:1666–1682, 1992.

[79] H. K. Khalil and A. Saberi. Adaptive stabilization of a class of nonlinear systems using high-gain feedback. *IEEE Trans. Automatic Control*, 32:1031–1035, 1987.

[80] H. K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Macmillan Publishing Co., New York, 1992.

[81] P. V. Kokotovic. Control theory in the 80's: Trends in feedback design. *Automatica*, 21:225-236, 1985.

[82] P. V. Kokotovic, editor. *Foundations of Adaptive Control*. Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[83] P. V. Kokotovic and R. Marino. On vanishing stability regions in nonlinear systems with high-gain feedback. *IEEE Trans. Automatic Control*, 31:967–970, 1986.

[84] P. V. Kokotovic and H. J. Sussmann. A positive real condition for global stabilization of nonlinear systems. *Systems and Control Letters*, 12:125–133, 1989.

[85] P. V. Kokotovic, I. Kanellakopoulos, and A. S. Morse. Adaptive feedback linearization of nonlinear systems. In P. V. Kokotovic, editor, *Foundations of Adaptive Control*, pages 311–346, Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[86] P. V. Kokotovic, H. K. Khalil, and J. O'Reilly. *Singular Perturbation Methods in Control: Analysis and Design*. Academic Press, New York, 1986.

[87] P. V. Kokotovic and H. Sussmann. The peaking phenomenon and the global stabilization of nonlinear systems. *IEEE Trans. Automatic Control*, 36:424–440, 1991.

[88] N. N. Krasowsky. *Problems of the Theory of Stability of Motion*. Stanford Univ. Press, Stanford, CA, 1963.

[89] P. C. Krause. *Analysis of Electrical Machinery*. McGraw-Hill, New York, 1986.

[90] G. Kreisselmeier. Adaptive observers with exponential rate of convergence. *IEEE Trans. Automatic Control*, 22:2–8, 1977.

[91] A. J. Krener and A. Isidori. Linearization by output injection and nonlinear observers. *Systems and Control Letters*, 3:47–52, 1983.

[92] A. J. Krener, A. Isidori, and W. Respondek. Partial and robust linearization by feedback. In *IEEE 22nd Conf. on Decision and Control*, pages 126–130, 1983.

[93] A. J. Krener and W. Respondek. Nonlinear observers with linearizable error dynamics. *SIAM J. Control Optimiz.*, 23:197–216, 1985.

[94] A. J. Krener. On the equivalence of control systems and the linearization of nonlinear systems. *SIAM J. Control Optimiz.*, 11:670–676, 1973.

[95] M. Krstic, I. Kanellakopoulos, and P. V. Kokotovic. Adaptive nonlinear control without overparametrization. *Systems and Control Letters*, 19:177–185, 1992.

[96] H. Kwakernaak. A condition for robust stabilizability. *Systems and Control Letters*, 2:1–5, 1982.

[97] Y. D. Landau. *Adaptive Control: the Model Reference Approach*. Marcel Dekker, New York, 1979.

[98] S. H. Lane and R. F. Stengel. Flight Control design using nonlinear inverse dynamics. *Automatica*, 24:471–483, 1988.

[99] D. McLean. *Automatic Flight Control Systems*. Prentice Hall, New York, 1990.

[100] S. Lefschetz. *Stability of Nonlinear Control Systems*. Academic Press, New York, 1965.

[101] G. Leitmann. Guaranteed asymptotic stability for a class of uncertain linear dynamical systems. *J. Opt. Theory and Applications*, 27:99–106, 1979.

[102] G. Leitmann. Guaranteed asymptotic stability of some linear systems with bounded uncertainties. *ASME J. Dyn. Systems, Measur., and Control*, 101:212–216, 1979.

[103] G. Leitmann. On the efficiency of nonlinear control in uncertain linear systems. *ASME J. Dyn. Systems, Measure., and Control*, 103:95–102, 1981.

[104] W. Leonhard. *Control of Electrical Drives*. Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[105] J. Levine and R. Marino. Nonlinear systems immersion, observers and finite dimensional filters. *Systems and Control Letters*, 7:133–142, 1986.

[106] J. Levine and R. Marino. On fault tolerant observers. *IEEE Trans. Automatic Control*, 35:623–628, 1990.

[107] G. Luders and K. S. Narendra. An adaptive observer and identifier for a linear systems. *IEEE Trans. Automatic Control*, 18:496–499, 1973.

[108] G. Luders and K. S. Narendra. A new canonical form for an adaptive observer. *IEEE Trans. Automatic Control*, 19:117–119, 1974.

[109] R. Marino. Adaptive observers for single output nonlinear systems. *IEEE Trans. Automatic Control*, 35:1054–1058, 1990.

[110] R. Marino. An example of nonlinear regulator. *IEEE Trans. Automatic Control*, 29:276–279, 1984.

[111] R. Marino. Feedback stabilization of single-input nonlinear systems. *Systems and Control Letters*, 10:201–206, 1988.

[112] R. Marino. High-gain feedback in nonlinear control systems. *Int. J. Control*, 42:1369–1385, 1985.

[113] R. Marino. On the largest feedback linearizable subsystem. *Systems and Control Letters*, 6:345–351, 1986.

[114] R. Marino, W.M. Boothby, and D.L. Elliott. Geometric properties of linearizable control systems. *Math. System Theory*, 18:97–123, 1985.

[115] R. Marino and S. Nicosia. Linear model following control and feedback equivalence to linear controllable systems. *Int. J. Control*, 38:473–485, 1984.

[116] R. Marino, S. Peresada, and P. Tomei. Adaptive output feedback control of currentfed induction motors, in *12th IFAC World Congress*, pages 451–454, Sydney, 1993.

[117] R. Marino, S. Peresada, and P. Valigi. Adaptive input-output linearizing control of induction motors. *IEEE Trans. Automatic Control*, 38:208–221, 1993.

[118] R. Marino, W. Respondek, A. J. van der Schaft, and P. Tomei. Nonlinear H_∞ almost disturbance decoupling. *Systems and Control Letters*, 23:159–168, 1994.

[119] R. Marino, W. Respondek, and A. J. van der Schaft. Almost disturbance decoupling for single-input single-output nonlinear systems. *IEEE Trans. Automatic Control*, 34:1013–1017, 1989.

[120] R. Marino, W. Respondek. and A. J. van der Schaft. Equivalence of nonlinear systems to input-output prime forms. *SIAM J. Control Optimiz.*, 32:387–407, 1994.

[121] R. Marino and P. Tomei. Adaptive control of stepper motors via nonlinear extended matching. In *IFAC Workshop on Motion Control for intelligent Automation*. pages 135–139, perugia, Italy, 1992.

[122] R. Marino and P. Tomei. Adaptive observers for a class of multi-output nonlinear systems. *Int. J. Adaptive Control and Signal Proc.*, 6:353–365, 1992.

[123] R. Marino and P. Tomei. Adaptive observers with arbitrary exponential rate of convergence for nonlinear systems. *IEEE Trans. Automatic Control*, 1995.

[124] R. Marino and P. Tomei. Dynamic output feedback linearization and global stabilization. *Systems and Control Letters*, 17:115–121, 1991.

[125] R. Marino and P. Tomei. Global adaptive observers and output-feedback stabilization for a class of nonlinear systems. In P.V. Kokotovic, editor, *Foundations of Adaptive Control*, pages 455–494, Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[126] R. Marino and P. Tomei. Global adaptive observers for a class of nonlinear systems. In H. Kimura and S. Kodama, editors, *Recent Advances in Mathematical Theory of Systems, Control, Networks and Signal Processing II*, pages 313–318, Mita Press, Tokyo, 1992.

[127] R. Marino and P. Tomei. Global adaptive observers for nonlinear systems via filtered transformations. *IEEE Trans. Automatic Control*, 37:1239–1245, 1992.

[128] R. Marino and P. Tomei. Global adaptive output-feedback control of nonlinear systems. Part I: linear parameterization. *IEEE Trans. Automatic Control*, 38:17–32, 1993.

[129] R. Marino and P. Tomei. Global adaptive output-feedback control of nonlinear systems. Parti II: nonlinear parameterization. *IEEE Trans. Automatic Control*, 38:33–49, 1993.

[130] R. Marino and P. Tomei. Global exponential tracking control of nonlinear systems by output feedback. *J. Math. Systems, Estimation, and Control*, 1995.

[131] R. Marino and P. Tomei. Observer-based adaptive stabilization for a class of nonlinear systems. *Automatica*, 28:787–793, 1992.

[132] R. Marino and P. Tomei. Robust stabilization of feedback linearizable time-varying uncertain nonlinear systems. *Automatica*, 29:181–189, 1993.

[133] R. Marino, P. Tomei. I. Kanellakopoulos, and P. V. Kokotovic. Adaptive tracking for a class of feedback linearizable systems. *IEEE Trans. Automatic Control*, 39:1314-1319, 1994.

[134] G. Meyer and L. Cicolani. Applications of nonlinear systems inverses to automatic flight control design. In P. Kant, editor, *Theory and Application of Optimal Control in Aerospace Systems*, NATO AGARDOGRAPH - AG 251, 1980.

[135] G. Meyer and L. Cicolani. *A formal structure for advanced automatic flight control systems*. Technical Report NASA TND-7940, NASA Ames Research Center, 1975.

[136] G. Meyer, R. Su, and L. R. Hunt. Application of nonlinear transformation to automatic flight control. *Automatica*, 20:103–107, 1984.

[137] K. R. Meyer. On the existence of Lyapunov functions for the problem of Lur'e. *J. SIAM Control*, 3:373–383, 1966.

[138] A. S. Morse. Global stability of parameter adaptive control systems. *IEEE Trans. Automatic Control*, 25:433–439, 1980.

[139] K. Nam and A. Arapostathis. A model reference adaptive control scheme for pure feedback nonlinear systems. *IEEE Trans. Automatic Control*, 33:803–811, 1988.

[140] K. S. Narendra and A. M. Annaswamy. *Stable Adaptive Systems*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1989.

[141] K. S. Narendra, Y. H. Lin, and L. S. Valavani. Stable adaptive controller design Part II: proof of stability. *IEEE Trans. Automatic Control*, 25:440–448, 1980.

[142] B. Naumov, editor. *Philosophy of Nonlinear Control Systems*. Mir Publishers, Moscow, and CRC Press, Boca Raton, FL, 1990.

[143] S. Nicosia and P. Tomei. A method for the state estimation of elastic joint robots by global position measurements. *Int. J. Adaptive Control and Signal Proc.*, 4:475–486, 1990.

[144] S. Nicosia and P. Tomei. Model reference adaptive control for industrial robots. *Automatica*, 20:635–644, 1984.

[145] S. Nicosia and P. Tomei. Nonlinear observer and output feedback attitude control of spacecraft. *IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems*, 28:970–977, 1992.

[146] S. Nicosia and P. Tomei. Robot control by using only joint position measurements. *IEEE Trans. Automatic Control*, 35:1058–1061, 1990.

[147] S. Nicosia and P. Tomei. Self-tuning control of robot manipulators. *Int. J. Adaptive Control and Signal Proc.*, 7:405–416, 1993.

[148] H. Nijmeijer. State space equivalence of an affine nonlinear system with outputs to a minimal linear system. *Int. J. Control*, 39:919–922, 1984.

[149] H. Nijimeijer and K. Tchon. *An Input-Output Characterization of Nonlinear Disturbance Decoupling*. Technical Report 502, Dept. Math., Twente Univ. Tech., Feb. 1985.

[150] H. Nijmeijer and A. J. van der Schaft. *Nonlinear Dynamical Control Systems*. Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[151] P. C. Parks. Lyapunov redesign of model reference adaptive control systems. *IEEE Trans. Automatic Control*, 11:362–367, 1966.

[152] I. R. Petersen. A procedure for simultaneously stabilizing a collection of single input linear systems using nonlinear state feedback control. *Automatica*, 23:33–40, 1987.

[153] I. R. Petersen. Structural stabilization of uncertain systems. Necessity of the matiching condition. *SIAM J. Control Optimiz.*, 23:286–296, 1985.

[154] J. B. Pomet, R. M. Hirschorn, and W. A. Cebubar. Dynamic output feedback regulation for a class of nonlinear systems. *Math. Control Signals Systems*, 6:106–125, 1993.

[155] J. B. Pomet and L. Praly. Adaptive nonlinear regulation: estimation from the Lyapunov equation. *IEEE Trans. Automatic Control*, 37:729–740, 1992.

[156] V. M. Popov. *Hyperstability of Control Systems*. Springer-Verlag, Berlin, 1973.

[157] W. A. Porter. Diagonalization and inverses for nonlinear systems. *Int. J. Control*, 11:67–76, 1970.

[158] L. Praly, G. Bastin, J. B. Pomet, and Z. P. Jiang. Adaptive stabilization of nonlinear systems. In P.V. Kokotovic, editor, *Foundations of Adaptive Control*, pages 347–434, Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[159] W. Respondek. Global aspects of linearization, equivalence to polynomial forms and decomposition of nonlinear control systems. In M. Fliess and M. Hazewinkel, editors, *Algebraic and Geometric Methods in Nonlinear Control Theory*, D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1986.

[160] W. Respondek. Linearization, feedback and Lie brackets. In B. Jakubczyk, W. Respondek, and K. Tchon, editors, *Geometric Theory of Nonlinear Control Systems*, pages 131–166, Wroclaw Technical University Press, Wroclaw, 1985.

[161] N. Rouche, P. Habets, and M. Laloy. *Stability Theory by Lyapunov's Direct Method*. Springer-Verlag, Berlin, 1977.

[162] A. Saberi. Output feedback control with almost disturbance decoupling property: a singular perturbation approach. *Int. J. Control*, 45:1705–1722, 1987.

[163] A. Saberi, P.V. Kokotovic, and H.J. Sussmann. Global stabilization of partially linear composed systems. *SIAM J. Control Optimiz.*, 28:1491–1503, 1990.

[164] A. Saberi and P. Sannuti. Observer-based control of uncertain systems with nonlinear uncertainties. *Int. J. Control*, 52:1107–1130, 1990.

[165] S. S. Sastry and M. Bodson. *Adaptive Control: Stability, Convergence, and Robustness*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ. 1989.

[166] S. S. Sastry and A. Isidori. Adaptive control of linearizable systems. *IEEE Trans. Automatic Control*, 34:1123–1131, 1989.

[167] D. Seto, A. M. Annaswamy, and J. Baillieul, Adaptive control of nonlinear systems with a triangular structure. *IEEE Trans. Automatic Control*, 39:1411–1428, 1994.

[168] D. D. Siljak. Parameter space methods for robust control design: a guided tour. *IEEE Trans. Automatic Control*, 34:674–688, 1989.

[169] S. N. Singh and T.C. Bossart. Exact feedback linearization and control of space station using CMG. *IEEE Trans. Automatic Control*, 38:184–187, 1993.

[170] S. N. Singh and W.J. Rugh. Decoupling in a class of nonlinear systems by state variable feedback. *ASME J. Dyn. Systems, Measur., and Control*, 94:323–329, 1972.

[171] S. N. Singh and A. Shy. Output feedback nonlinear decoupled control synthesis and observer design for maneuvering aircraft. *Int. J. Control*, 31:781–806, 1980.

[172] P. K. Sinha. State-feedback decoupling of nonlinear systems. *IEEE Trans. Automatic Control*, 22:487–489, 1977.

[173] J. J. E. Slotine and W. Li. *Applied Nonlinear Control.* Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1991.

[174] J. J. E. Slotine and W. Li. on the adaptive control of robot manipulators. *Int. J. Robotics Research*, 6:49–59, 1987.

[175] R. Sommer. Control design for mulitvariable nonlinear time-varying systems. *Int. J. Control*, 31:883–891, 1980.

[176] E. D. Sontag. *Mathematical Control Theory.* Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[177] M. W. Spong and M. Vidyasagar. *Robot Dynamics and Control.* John Wiley and Sons, New York, 1989.

[178] A. Steinberg and M. Corless. Output feedback stabilization of uncertain dynamical systems. *IEEE Trans. Automatic Control*, 30:1025–1027, 1985.

[179] R. Su. On the linear equivalents of nonlinear systems. *Systems and Control Letters*, 2:48–52, 1982.

[180] H. J. Sussmann. Lie-brackets, real analyticity and geometric control theory. In R. W. Brockett, R. S. Millmann, and H. J. Sussmann, editors, *Differential Geometric Control Theory*, pages 1–115, Birkhäuser, Boston, 1983.

[181] H. J. Sussmann. Limitations on the stabilizability of globally minimum phase systems. *IEEE Trans. Automatic Control*, 32:117–119, 1990.

[182] D. Taylor, P. V. Kokotovic, R. Marino, and I. Kanellakopoulos. Adaptive regulation of nonlinear systems with unmodeled dynamics. *IEEE Trans. Automatic Control*, 34:405–412, 1989.

[183] A. Teel, R. Kadiyala, P. V. Kokotovic, and S. S. Sastry. Indirect techniques for adaptive input-output linearization of nonlinear systems. *Int. J. Control*, 53:193–222, 1991.

[184] A. R. Teel. Error based adaptive nonlinear control and regions of feasibility. *Int. J. Adaptive Control and Signal Proc.*, 6:319–327, 1992.

[185] F. E. Thau. Observing the state of nonlinear dynamic systems. *Int. J. Control*, 17:471–475, 1973.

[186] J. S. Thorp and B.R. Barmish. On guaranteed stability of uncertain linear sytems via linear control. *J. Opt. Theory and Applications*, 35:559–579, 1981.

[187] P. Tomei. Adaptive PD controller for robot manipulators. *IEEE Trans. Robotics and Automation*, 7:565–570, 1991.

[188] P. Tomei. An observe for flexible joint robots. *IEEE Trans. Automatic Control*, 35:739–743, 1990.

[189] P. Tomei. A simple PD controller for robots with elastic joints. *IEEE Trans. Automatic Control*, 36:1208–1213, 1991.

[190] P. Tomei. Tracking control of flexible joint robots with uncertain parameters and disturbance. *IEEE Trans. Automatic Control*, 39:1067–1072, 1994.

[191] J. Tsinias. Optimal controllers and output feedback stabilization. *Systems and Control Letters*, 15:277–284, 1990.

[192] J. Tsinias. Sufficient Lyapunov-like conditions for stabilization. *Math. Control Signals Systems*, 2:343–357, 1989.

[193] V. I. Utkin. *Sliding Modes and their Application in Variable Structure Systems*. Mir Publishers, Moscow, 1978.

[194] A. J. van der Schaft. L_2-gain analysis of nonlinear systems and nonlinear state feedback H_∞ control. *IEEE Trans. Automatic Control*, 37:770–784, 1992.

[195] A. J. van der Schaft. Linearization and input-output decoupling for general nonlinear systems. *Systems and Control Letters*, 5:27–33, 1984.

[196] A. J. van der Schaft. On a state space approach to nonlinear H_∞ control. *Systems and Control Letters*, 16:1–8, 1991.

[197] M. Vidyasagar. *Nonlinear Systems Analysis, 2nd edn.* Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1993.

[198] M. Vidyasagra. On the stabilization of nonlinear systems using state detection. *IEEE Trans. Automatic Control*, 25:504–509, 1980.

[199] F. W. Warner. *Foundations of Differential Manifolds and Lie Groups*. Springer-Verlag, New York, 1983.

[200] K. Wei and B. R. Barmish. An iterative design procedure for simultaneous stabilization of MIMO systems. *Automatica*, 24:643–652, 1988.

[201] K. Wei and R. K. Yedavalli. Robust stabilizability for linear systems with both parameter variation and unstructured uncertainty. *IEEE Trans. Automatic Control*, 34:149–156, 1989.

[202] B. Wie and C. T. Plescia. Attitude stabilization of flexible spacecraft during station keeping maneuvers. *AIAA J. Guidance and Control*, 7:430–436, 1984.

[203] J. C. Willems. Almost invariant subspaces: an approach to high-gain feedback design. Part I: Almost controlled invariant subspaces. *IEEE Trans. Automatic Control*, 26:235–252, 1981.

[204] J. C. Willems. Almost invariant subspaces: an approach to high-gain feedback design. Part II: Almost conditionally invariant subspaces. *IEEE Trans. Automatic Control*, 27:1071–1085, 1981.

[205] W. A. Wolovich. *Linear Multivariable Systems*. Springer-Verlag, New York, 1974.

[206] W. M. Wonham. *Linear Multivariable Control: a Geometric Approach*. Springer-Verlag, New York, 1979.

[207] W. M. Wonham and A. S. Morse. Decoupling and pole assignment in linear mulitivariable systems. *SIAM J. Control Optimiz.*, 8:1–18, 1970.

[208] X. H. Xia and W. B. Gao. Nonlinear observer design by observer erro linearization. *SIAM J. Control Optimiz.*, 27:199–216, 1989.

[209] A. S. I. Zinober, editor. *Deterministic Control of Uncertain Systems*. Peter Peregrinus, Stevenage, 1990.

[210] M. Zribi and J. Chiasson. Position control of a PM stepper motor by exact linearization. *IEEE Trans. Automatic Control*, 36:620–625, 1991.

索引